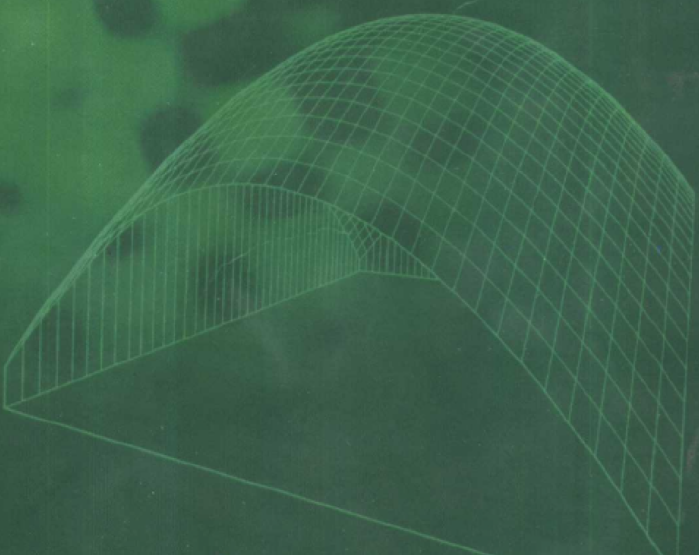
微积分（上）

Calculus (Vol.I)

苏德矿　吴明华
金蒙伟　杨起帆　编

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$



CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

微　积　分

(上)

主　编　苏德矿　吴明华

编　者　苏德矿　吴明华
　　　　金蒙伟　杨起帆

浙江大学数学系

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果，也是根据作者多年的教学和科研经验，集思广益，并广泛汲取校内外意见的一本改革性教材．本书分上、下两册出版．上册共6章，主要内容有：函数与极限，导数与微分，微分中值定理及导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程．本书可作为本科生教材，适用于工科、理科、经济及管理各专业．

本书在保留我国传统的重归纳、演绎、推理的特色之外，更注重分析综合的思想．许多定理的条件与结论用发现探索式方法给出，并用分析、综合的方法给予证明．为了培养学生的数学素质和自我发现的能力，本书把数学建模的最基本内容和最基本方法融入本书之中，便于学生在学习微积分的过程中，也学会用数学方法建立数学模型解决实际问题．此外，在教材中还增加了微积分在经济中的应用：如连续复利、年有效收益、现值与将来值、边际分析、弹性分析、最大利润、收入流等．与本书配合的微积分多媒体辅助教学光盘（CD－ROM），利用软件的文本、图形、动画及音效直观，清晰地讲授本书内容中的一些重要概念和定理，使学生容易理解和接受．

图书在版编目（CIP）数据

微积分（上）/苏德矿 吴明华 主编．－北京：高等教育出版社；海德堡：施普林格出版社，2000.7

ISBN 7-04-007900-3

Ⅰ．微… Ⅱ．苏… Ⅲ．微积分 Ⅳ．O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第16599号

微积分（上）

苏德矿 吴明华 金蒙伟 杨起帆 编

出版发行	高等教育出版社 施普林格出版社		
社 址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电 话	010－64054588	传 真	010－64014048
网 址	http://www.hep.edu.cn		
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京民族印刷厂		
开 本	787×1092 1/16	版 次	2000年7月第1版
印 张	21	印 次	2000年7月第1次印刷
字 数	520 000	定 价	26.00元

前　言

本书是由清华大学萧树铁教授主持的前国家教委“面向 21 世纪教学内容和课程体系改革”研究课题的成果之一，是根据国家教育部高等学校工科数学课程教学指导委员会拟定的高等数学课程教学基本要求，并参照中华人民共和国教育部制定的全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲，在认真研究部颁教材的基础上，取长补短而编写的．本书经过在浙江大学计算机系、化工系等系 3 年的教学试验，取得了良好的效果．本书主要内容有：函数极限与连续、一元函数微分学及应用(包括在经济中的应用)、一元函数积分学、常微分方程、矢量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数等 8 部分，可作为高等学校工科、理科(非数学类专业)、经济、管理等有关专业本科生的微积分课程的教材．书中冠有“ * ”号的部分供对微积分有较高要求的专业选用和有兴趣欲扩大知识面的学生阅读．

在内容安排上我们注意以下几点：

1．编写时力求表述确切、思路清楚、由浅入深、通俗易懂，并注意数学思维与数学方法的论述；对一些重要的知识，以注解的形式进行分析和总结．例题具有典型性，既便于教师教学，更利于学生自学．

2．在保留我国传统的重归纳、演绎、推理的基础上，更注重分析、综合的思想．对一些重要概念的引入，注重概念实际背景的分析与教学．许多定理的条件与结论用发现探索的方式引出(即由果索因)，并用分析、综合的方法给予证明．这样做的目的，便于学生对概念的理解．

3．将微积分与数学模型有机地结合起来，从而恢复了微积分的真实面目：即微积分来源于实践，又应用于实践，而数学模型的引入正是为学习微积分提供了实践基础，使学生在学习微积分的过程中，也学会用数学方法建立数学模型，解决实际问题，有利于提高学生的综合素质．

4．强调微积分在经济中的应用：如复利、连续复利、年有效收益、现值与将来值、边际分析、弹性分析、最大利润、收入流、收入流的现值与将来值等等．

5．把现代数学的基本概念和思想融入本书之中，如算子、泛函，并说明诸如导数、定积分分别是线性算子与线性泛函等等，为学生进一步了解和学习现代数学知识提供了一个良好的开端．

本书的第一、二、三、四、五、八、九、十、十一、十二章及附录由苏德矿撰稿，第六、七章由吴明华撰稿，金蒙伟对全书进行了认真仔细的校对和修改，杨起帆负责书中插图的创意与绘制．

浙江大学数学系蔡燧林教授、邵剑教授参加了编写本书大纲的讨论，提出了许多宝贵的建议，有些建议已在撰写本书时采纳．在此向他们二位表示衷心的感谢．

在这里，我们要特别感谢本书的主审人清华大学数学科学系的施学瑜教授和北京航空航天大学数学系的徐兵教授，他们花费了大量的时间，对书稿进行了非常认真仔细的审查，并提出了许多宝贵的意见和建议；此外，在本书的整个撰写过程中，自始至终得到了高等教育出版

社徐可同志的热情支持与帮助,他对全书进行了十分仔细的修改与审阅,并提出了许多好的建议.他们的意见和建议使本书增色不少,在此向他们表示衷心的感谢.

本书得到了浙江大学教务处、数学系的协助与鼓励.并得到了浙江大学远程教育学院副院长杨纪生教授、赖德生主任、郑潇、周丽娟老师以及浙江大学教材服务中心何宝鑫主任等的大力支持.借本书出版之机,我们一并表示衷心的感谢.

最后我们还要感谢李杰、江丽华夫妇,他们为书稿的排版与打印付出了辛勤的劳动.

本教材的书稿虽经试用和修改,但仍然会有一些错误,我们衷心地希望得到专家、同行和读者的批评指正,使本书在教学实践中不断完善起来.

编者于浙大求是园

2000年7月

责任编辑　徐　可
封面设计　王凌波
版式设计　李　杰
责任排版　李　杰
责任印制　陈伟光

目　　录

第一章　函数与极限 …… (1)
§1　函　数 …… (1)
§1.1　函数的概念 …… (1)
§1.2　具有某些特性的函数 …… (5)
习题1-1 …… (9)
§2　数列极限 …… (11)
§2.1　数列极限的概念 …… (11)
§2.2　收敛数列的性质 …… (16)
§2.3　数列极限存在的准则 …… (19)
*§2.4　数列极限存在的准则(续) …… (24)
习题1-2 …… (26)
§3　函数极限 …… (27)
§3.1　函数极限的概念 …… (27)
§3.2　函数极限的性质 …… (30)
§3.3　函数极限存在的准则 …… (32)
*§3.4　函数极限存在的准则(续) …… (34)
§3.5　两个重要极限 …… (35)
§3.6　无穷小量、无穷大量、阶的比较 …… (39)
习题1-3 …… (44)
§4　函数的连续性 …… (45)
§4.1　函数连续的概念 …… (45)
§4.2　连续函数的局部性质 …… (48)
§4.3　闭区间上连续函数的性质 …… (49)
§4.4　初等函数在其定义域区间上的连续性 …… (51)
*§4.5　闭区间上连续函数性质的证明 …… (53)
*§4.6　一致连续 …… (55)
习题1-4 …… (57)
第一章综合题 …… (58)
第二章　导数与微分 …… (60)
§1　导　数 …… (60)
§1.1　导数的概念 …… (60)
§1.2　导数的基本公式与运算法则 …… (64)
§1.3　参数式函数与隐函数的导数 …… (72)
§1.4　高阶导数 …… (75)

§1.5 导数在实际中的应用 …… (79)
习题 2 - 1 …… (81)
§2 微 分 …… (86)
§2.1 微分的概念 …… (86)
§2.2 微分的基本性质 …… (88)
§2.3 近似计算与误差估计 …… (90)
* §2.4 高阶微分 …… (91)
习题 2 - 2 …… (92)
第二章综合题 …… (93)
第三章 微分中值定理及导数的应用 …… (95)
§1 微分中值定理 …… (95)
§1.1 费马定理、最大(小)值 …… (95)
§1.2 罗尔定理 …… (97)
§1.3 拉格朗日定理、函数的单调区间 …… (98)
§1.4 柯西定理 …… (103)
习题 3 - 1 …… (104)
§2 未定式的极限 …… (106)
§2.1 $\frac{0}{0}$型未定式的极限 …… (106)
§2.2 $\frac{\infty}{\infty}$型未定式的极限 …… (108)
§2.3 其它类型未定式的极限 …… (110)
习题 3 - 2 …… (112)
§3 泰勒定理、函数极值判定 …… (113)
§3.1 泰勒定理 …… (113)
§3.2 几个常用函数的麦克劳林公式 …… (115)
§3.3 带有佩亚诺余项的泰勒公式 …… (116)
§3.4 泰勒公式的应用 …… (118)
§3.5 函数极值的判定 …… (120)
习题 3 - 3 …… (121)
§4 数学建模初步(一) …… (122)
习题 3 - 4 …… (127)
§5 函数图形的凹向与拐点 …… (129)
习题 3 - 5 …… (131)
§6 函数图形的描绘 …… (132)
§6.1 曲线的渐近线 …… (132)
§6.2 函数图形的描绘 …… (133)
习题 3 - 6 …… (135)
* §7 导数在经济中的应用 …… (135)
§7.1 经济中常用的一些函数 …… (135)

§7.2　边际分析 …………………………………………………… (137)
§7.3　弹性分析 …………………………………………………… (139)
习题3-7 …………………………………………………… (141)
§8　曲率 …………………………………………………… (143)
§8.1　曲　率 …………………………………………………… (143)
§8.2　曲率圆 …………………………………………………… (145)
习题3-8 …………………………………………………… (147)
§9　方程的近似根 …………………………………………………… (147)
§9.1　图解法 …………………………………………………… (148)
§9.2　数值法 …………………………………………………… (148)
习题3-9 …………………………………………………… (153)
第三章综合题 …………………………………………………… (153)
第四章　不定积分 …………………………………………………… (155)
§1　不定积分的概念 …………………………………………………… (155)
§1.1　原函数与不定积分 …………………………………………………… (155)
§1.2　基本积分 …………………………………………………… (156)
§1.3　不定积分的性质 …………………………………………………… (156)
习题4-1 …………………………………………………… (158)
§2　不定积分的几种基本方法 …………………………………………………… (158)
§2.1　凑微分法(第一换元法) …………………………………………………… (158)
§2.2　变量代换法(第二换元法) …………………………………………………… (160)
§2.3　分部积分法 …………………………………………………… (163)
习题4-2 …………………………………………………… (166)
§3　某些特殊类型函数的不定积分 …………………………………………………… (168)
§3.1　有理函数的不定积分 …………………………………………………… (168)
§3.2　三角函数有理式的不定积分 …………………………………………………… (172)
§3.3　某些无理函数的不定积分 …………………………………………………… (175)
习题4-3 …………………………………………………… (178)
第四章综合题 …………………………………………………… (179)
第五章　定积分及其应用 …………………………………………………… (180)
§1　定积分概念 …………………………………………………… (180)
§1.1　定积分的定义 …………………………………………………… (180)
§1.2　可积函数类 …………………………………………………… (184)
习题5-1 …………………………………………………… (186)
§2　定积分的性质和基本定理 …………………………………………………… (186)
§2.1　定积分的基本性质 …………………………………………………… (187)
§2.2　微积分学基本定理 …………………………………………………… (190)
习题5-2 …………………………………………………… (193)
§3　定积分的计算方法 …………………………………………………… (194)

§3.1 几种基本的定积分计算方法 …… (194)
§3.2 几种简化的定积分计算方法 …… (197)
习题 5 - 3 …… (202)
§4 定积分的应用 …… (203)
§4.1 平面图形的面积 …… (203)
§4.2 立体及旋转体的体积 …… (207)
§4.3 微元法及应用 …… (209)
§4.4 定积分在物理中的应用 …… (216)
§4.5 定积分在经济中的应用 …… (220)
习题 5 - 4 …… (222)
§5 广义积分 …… (224)
§5.1 无穷区间上的广义积分 …… (224)
§5.2 无界函数的广义积分 …… (227)
* §5.3 广义积分敛散性的判别法 …… (229)
* §5.4 Γ函数 …… (233)
习题 5 - 5 …… (235)
§6 定积分的近似计算 …… (236)
§6.1 矩 形 法 …… (236)
§6.2 梯 形 法 …… (236)
§6.3 抛物线法 …… (237)
习题 5 - 6 …… (238)
第五章综合题 …… (239)
第六章 常微分方程 …… (241)
§1 基本概念 …… (241)
习题 6 - 1 …… (244)
§2 可分离变量方程 …… (244)
§2.1 可分离变量方程 …… (244)
§2.2 齐次微分方程 …… (246)
习题 6 - 2 …… (248)
§3 一阶线性微分方程 …… (249)
§3.1 一阶线性微分方程 …… (249)
§3.2 伯努利(Bernoulli)方程 …… (252)
习题 6 - 3 …… (253)
* §4 全微分方程 …… (254)
习题 6 - 4 …… (255)
§5 可降阶的二阶微分方程 …… (255)
§5.1 $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$型微分方程 …… (255)

§5.2　$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x,\frac{dy}{dx})$型微分方程 …… (256)
§5.3　$\frac{d^2y}{dx^2}=f(y,\frac{dy}{dx})$型微分方程 …… (258)
习题6-5 …… (259)
§6　二阶线性微分方程解的结构 …… (260)
习题6-6 …… (262)
§7　二阶常系数线性微分方程的解法 …… (263)
§7.1　二阶常系数线性齐次方程及其解法 …… (263)
§7.2　二阶常系数线性非齐次方程的解法 …… (265)
§7.3　欧拉方程 …… (271)
习题6-7 …… (272)
§8　常系数线性微分方程组 …… (273)
习题6-8 …… (275)
§9　二阶常系数线性微分方程的一般解法 …… (275)
§9.1　降阶法 …… (275)
§9.2　常数变易法 …… (276)
习题6-9 …… (278)
§10　数学建模(二)——微分方程在几何、物理中的应用举例 …… (278)
*§11　差分方程 …… (284)
§11.1　差分方程的基本概念 …… (284)
§11.2　一阶线性差分方程 …… (286)
§11.3　二阶常系数线性差分方程 …… (289)
习题6-11 …… (291)
第六章综合题 …… (292)
附录Ⅰ　线性空间与映射 …… (293)
附录Ⅱ　可积函数类的证明 …… (297)
附录Ⅲ　积分表 …… (302)
习题答案 …… (308)

第一章　函数与极限

微积分的核心和基础是极限,极限的思想自始至终贯穿于微积分之中.极限是建立在无限基础上的概念,它的研究对象是函数,考虑的是一个动态过程.极限方法的无限性和动态性与初等函数处理问题的方法(其主要特征为有限性和静态性)有着本质的不同,但又有着密切的联系.**微积分就是一门以函数为研究对象,运用极限手段(如取无穷小或无穷逼近等极限过程)分析处理问题的数学学科.**

§1　函　数

§1.1　函数的概念

一、常量与变量

人们在观察、研究某一运动过程中,会遇到许多不同的量.其中有的量在研究过程中保持不变,这种量叫做**常量**;也有的量在运动过程中可取不同的值,这种量叫做**变量**.例如,火车在两车站之间的行驶过程中,乘客的数量是常量;而火车离两站的距离,燃料的储存量等都是变量.又如,在某一地点,物体自由下落的过程中,离地面的距离是变量,而重力加速度 g 是常量.必须注意,上述常量与变量的概念,依赖于所考察的过程.仍以落体为例,如果由高空落下,重力加速度就不是常量而是变量.

二、函数的定义

一切客观事物都是不断变化发展的,在变化过程中,各个变量的变化不是孤立的,而是彼此联系着的.为了探索和掌握运动的规律性,就必须深入研究变量的变化状态和变量间的依赖关系,这是微积分研究的主要内容.

函数是微积分研究的对象.虽然在中学已经讲授过一些有关函数的知识,但不够详尽透彻.我们要对函数有一个清楚的认识.

首先,我们再叙述一下一元函数的定义.

定义　设 A、B 是两个非空实数集,如果存在一个对应法则 f,使得对 A 中任何一个实数 x,在 B 中都有唯一确定的实数 y 与 x 对应,则称对应法则 f 是 A 上的函数,记为

$$f: x \mapsto y \quad 或 \quad f: A \to B.$$

y 称为 x 对应的函数值,记为

$$y = f(x), \quad x \in A.$$

其中 x 叫做自变量(即"原象"),y 又叫做因变量(即"象").

有时也简称因变量 y 是自变量 x 的函数,虽然这种说法并不太确切,但反映了 y 是依赖于 x 的变量,在使用上有方便之处.所以我们在以后常用这种说法,但应正确理解,**函数的本质是**

指对应法则 f,不是指因变量 y.

A 称为函数 f 的定义域,记为 $D(f)$. $f(A) \triangleq$[①] $\{f(x) \mid x \in A\}$ 称为函数的值域,记作 $R(f)$. 在平面坐标系 Oxy 下,集合 $\{(x,y): y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图形.

由函数的定义可知,定义域、对应法则是确定函数的二要素. 至于变量本身的具体意义及采用什么记号,那是无关紧要的,比如

$$y = f(x), x \in D \quad 与 \quad S = f(t), t \in D$$

代表同一个函数.

如果同时研究几个不同的函数,即不同的对应规律,就必须用不同的记号加以区别,如 f, g, φ, ψ, $\cdots$ 等等. 有时为了简便起见,可用 $y = y(x)$ 表示一个函数,这样 y 既代表对应规律又代表因变量.

在函数的定义中,当 x 在 D 上每取一个值 x_0,所对应的值 y_0 称为函数 f 在 $x = x_0$ 处的值,记作 $f(x_0)$,即有 $y_0 = f(x_0)$.

如果一个函数是由数学表达式给出,而定义域没有具体的规定,那么它的定义域就是使得函数在数学上有意义的自变量所取数值的全体. 如果该函数有实际背景,则它的定义域还要根据问题的实际条件来确定.

表示函数的定义域常用区间、不等式二种方法.

对区间我们常引入下面的记号. 开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \triangleq U(x_0, \delta)(\delta > 0)$ 称为以 x_0 为心,以 δ 为半径的邻域,简称为 x_0 的 δ 邻域. 若不需要指明半径 δ 时,记作 $U(x_0)$,称为 x_0 的某邻域. $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \triangleq \mathring{U}(x_0, \delta)$ 称为以 x_0 为心,以 δ 为半径的空心邻域,简称为 x_0 的 δ 空心邻域,若不需要指明半径 δ 时,记作 $\mathring{U}(x_0)$,称为 x_0 的某空心邻域. 同理,

$$(x_0, x_0 + \delta) \triangleq \mathring{U}_+(x_0, \delta), [x_0, x_0 + \delta) = U_+(x_0, \delta) \text{ 统称为 } x_0 \text{ 的右邻域},$$

$$(x_0 - \delta, x_0) \triangleq \mathring{U}_-(x_0, \delta), (x_0 - \delta, x_0] = U_-(x_0, \delta) \text{ 统称为 } x_0 \text{ 的左邻域}.$$

设 $M > 0$, $(M, +\infty) \triangleq U(+\infty, M)$ 称为 $+\infty$ 的左邻域; $(-\infty, -M) \triangleq U(-\infty, M)$ 称为 $-\infty$ 的右邻域; $(-\infty, -M) \cup (M, +\infty) \triangleq U(\infty, M)$ 称为 $\infty(\pm\infty)$ 的邻域.

例 1　(1) $y = x^2$,其中 $x \in [0,1]$. 该函数的定义域是 $[0,1]$;

(2) $y = x^2$. 该函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$;

(3) $y = x^2$,其中 x 表示正方形的边长,y 表示正方形的面积. 则它的定义域是 $[0, +\infty)$.

例 2　判断下列每组的两个函数是否表示同一个函数.

(1) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, y = x + 1$;　　(2) $y = \ln x^2, S = 2\ln|t|$.

解　(1) 函数 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的定义域是 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. 而函数 $y = x + 1$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$,即两个函数的定义域不同,尽管 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$,两个函数的对应法则相同,但不是同一个函数.

(2) 函数 $y = \ln x^2$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;而函数 $S = 2\ln|t|$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,所以两个函数的定义域相同. 又

---

① 符号"$\triangleq$"表示"定义为"或"记为".

$$S = 2\ln|t| = \ln|t|^2 = \ln t^2,$$

所以两个函数的对应法则也相同.尽管两个函数的自变量、因变量所用的字母不同,但两个函数表示同一个函数.

三、函数的表示方法

一般地,函数可以用三种不同的方法来表示,即表格法、图象法和公式法.

1. 表格法

例 3 保险丝的熔断电流 I(单位:A) 和直径 D(单位:mm) 之间有如下表所示的关系.

直径 D(mm)	0.508	0.559	0.61	0.71	0.813	0.915	1.22	3.0	3.5	4.0	5.0	6.0	7.0	10.00
熔断电流 I(A)	1.63	1.83	2.03	2.34	2.65	2.95	3.26	16.0	19.0	22.0	27.0	32.0	37.0	44.00

从表中由直径 D 可读出对应的 I 值.表格法的特点是简明方便,缺点是自变量的取值有限.

2. 图象法

有些函数自然地产生了图象.

例 4 在自动记录气压计中,有一个匀速转动的圆柱形记录鼓,印有坐标方格的记录纸就裹在这鼓上,记录鼓每 24 小时转动一周.气压计指针的端点装有一支黑水笔,笔尖接触着记录纸.这样经过 24 小时之后,取下的记录纸上就描画了一条曲线,这条曲线表示气压 P 随时间 t 变化的函数关系.

例 5 如图 1 - 1 所示的心电图(EKG)显示两个人的心率模式,一位正常,另一位不正常.尽管也可以构造一个心电图函数的近似公式,但很少这样做.这种重复出现的图形正是医生需要了解的.从图象上可以看出,每个心电图都把一个显示电流活动的函数表示为一个相对于时间的函数.

图 1 - 1

图象法的特点是形象直观,富有启发性,一目了然.

3. 公式法(解析法)

公式法是把一个函数通过指明运算的数学式子表示出来,依照它,从自变量的值可以计算出因变量的对应值.其特点是精确、完整,便于理论上分析研究.

公式法包含一类函数,称为**分段函数**,它是一个在其定义域的不同部分用不同数学表达式表示的函数.注意分段函数不是由几个函数组成,而是一个函数.

下面我们介绍几个常用的函数.

例 6 取整函数

$$y = [x],\ x \in (-\infty, +\infty).$$

符号$[x]$表示不超过x的最大整数,其图象如图 1－2 所示. 如$[4]=4,[4.15]=4,[-4.5]=-5,[\sqrt{2}]=1$. 不难看出,取整函数有如下性质:$[x]\leqslant x<[x]+1$.

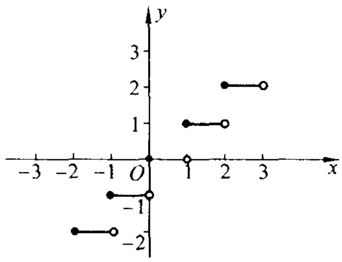


图 1－2

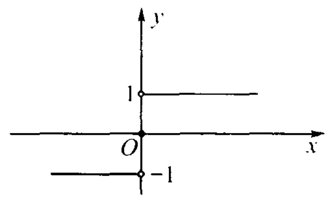


图 1－3

例7　符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

其图象如图 1－3 所示.

例 8　狄利克雷(Dirichlet)函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}.\end{cases}$$

这个函数定义在整个数轴上,把定义域全体实数分成两类,有理数的函数值为 1,无理数的函数值为 0,但无法画出它的图象.

四、复合函数

变量间的依赖关系有时是错综复杂的,表现之一是锁链式的依赖关系,即y依赖于u,u依赖于x,等等,这种关系在数学上就抽象为复合函数的概念.

定义　设$y=f(u),u\in E,u=\varphi(x),x\in D$. 若$D(f)\cap R(\varphi)\neq\varnothing$,则$y$通过$u$构成$x$的函数,称为由$y=f(u)$与$u=\varphi(x)$复合而成的函数,简称为**复合函数**,记作$y=f(\varphi(x))$.

复合函数的定义域为$\{x:x\in D\text{ 且 }\varphi(x)\in E\}$,其中$x$称为自变量,$y$称为因变量,$u$称为中间变量,$\varphi(x)$称为内函数,$f(u)$称为外函数. 例如,$y=\sqrt{u}$,$u=1-x^2$,则复合函数$y=\sqrt{1-x^2},x\in[-1,1]$.

若判断两个函数$y=f(u),u=\varphi(x)$能不能构成复合函数,只要看$y=f(\varphi(x))$的定义域是否为非空集. 若不为空集,则能构成复合函数,否则不能.

今后,我们要学会分析复合函数的复合结构,既要会把几个函数复合成一个复合函数,又要会把一个复合函数分拆成几个函数的复合.

五、反函数

函数$y=f(x)$表示了y依赖于x的对应规律,x是自变量,y是因变量. 如果反过来,让y独立变化,考察x如何依赖于y而变化,这就引出了反函数的概念.

定义　设$y=f(x),x\in D$. 若对$R(f)$中每一个y,都有唯一确定且满足$y=f(x)$的

$x \in D$ 与之对应，则按此对应法则就能得到一个定义在 $R(f)$ 上的函数，称这个函数为 f 的**反函数**，记作

$$f^{-1}: R(f) \to D \quad \text{或} \quad x = f^{-1}(y), y \in R(f).$$

由于习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以常把上述反函数改写成

$$y = f^{-1}(x), x \in R(f).$$

由函数、反函数的定义可知，反函数的定义域是原来函数的值域，值域是原来函数的定义域. 注意函数 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图象相同，函数 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 图象关于直线 $y = x$ 对称.

例如，按习惯记法，函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 是 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的反函数，$y = \arcsin x$ 是 $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的反函数.

六、初等函数

在中学数学课程中，我们已经熟悉了以下几类函数：

常值函数　$y = C$（C 是常数），$x \in \mathbf{R}$；

幂函数　$y = x^a$（a 为幂常数），该函数的定义域由常数 a 确定，且总包含区间 $(0, +\infty)$；

指数函数　$y = a^x (a > 0, a \neq 1), x \in \mathbf{R}$；

对数函数　$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1), x \in (0, +\infty)$；

三角函数　$y = \sin x, x \in \mathbf{R}$；　$y = \cos x, x \in \mathbf{R}$；

$y = \tan x, x \in (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}), k \in \mathbf{Z}$；

$y = \cot x, x \in (k\pi, k\pi + \pi), k \in \mathbf{Z}$；

反三角函数　$y = \arcsin x, x \in [-1, 1]$；$y = \arccos x, x \in [-1, 1]$；

$y = \arctan x, x \in \mathbf{R}$；$y = \operatorname{arccot} x, x \in \mathbf{R}$.

以上六类函数，我们统称为**基本初等函数**，由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所得到的函数，统称为**初等函数**.

例如，多项式函数 $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, x \in \mathbf{R}$ 是常值函数与正整数幂函数经过有限次四则运算得到的. 有理（分式）函数 $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$（$P_n(x), Q_m(x)$ 皆为多项式函数）的定义域是 $\mathbf{R}$ 中剔除使 $Q_m(x) = 0$ 的根的数集.

凡不是初等函数的函数，皆称为**非初等函数**.

一般说来，分段函数不是初等函数，如前面已提到的符号函数，狄利克雷函数. 但个别分段函数除外，例如，$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leqslant 0, \\ x, & x > 0, \end{cases}$ 由于 $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$ 是由 $y = \sqrt{u}, u = x^2$ 复合而成，所以该函数是初等函数.

§1.2　具有某些特性的函数

一、奇函数与偶函数

定义　设 D 是关于原点对称的数集，f 为定义在 D 上的函数，若对每一个 $x \in D$（这时也有 $-x \in D$），都有

$$f(-x)=-f(x)\quad (f(-x)=f(x)),$$

则称 f 为 D 上的**奇(偶)函数**.

从函数图象上看,奇函数的图象关于原点对称,偶函数的图象关于 y 轴对称.

例 9　判断函数 $y=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})(a>0,a\neq 1)$ 的奇偶性.

解　函数 y 的定义域是 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$,由于

$$f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\log_a(-x+\sqrt{1+x^2})$$

$$=\log_a\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\log_a(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

二、周期函数

设 f 为定义在 D 上的函数,若存在某个非零常数 T,使得对一切 $x\in D$,都有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 f 为周期函数. T 称为 f 的一个周期. 显然,若 T 是 $f(x)$ 的周期,则 kT 也是 $f(x)$ 的周期, $k\in\mathbf{Z}$. 若周期函数 f 的所有正周期中存在有最小正周期,则称这个最小正周期为 f 的**基本周期**. 一般地,函数的周期指的是基本周期.

例 10　$f(x)=x-[x],x\in(-\infty,+\infty)$ 的周期为 1(见图 1-4).

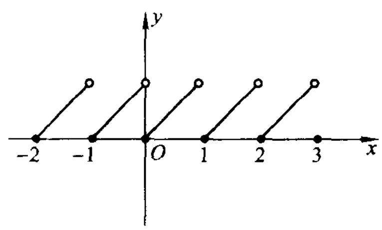


图 1-4

例11　$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$ 是周期函数,但不存在最小正周期. **事实上**,我们可以证明任何有理数都是 $D(x)$ 的周期. 设 T 是一个有理数,任给 $x\in\mathbf{R}$,(1) 当 x 是有理数时, $x+T$ 也是有理数,则 $D(x+T)=D(x)=1$;(2) 当 x 是无理数时, $x+T$ 也是无理数,则 $D(x+T)=D(x)=0$. 所以当 $x\in\mathbf{R}$ 时, $D(x+T)=D(x)$,故 T 是 $D(x)$ 的周期. 但是所有正有理数中不存在最小的正数,所以 $D(x)$ 无最小正周期.

三、单调函数

定义　设 f 为定义在 D 上的函数,若对于 D 中任意两个数 x_1,x_2 且 $x_1<x_2$,总有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称 f 为 D 上的递增(递减)函数. 特别地,若总成立严格不等式

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 f 为 D 上的严格递增(递减)函数.

递增和递减函数统称为**单调函数**,严格递增和严格递减函数统称为**严格单调函数**.

反函数存在性定理　**严格增(减)的函数必有严格增(减)的反函数.**