〔美〕索尔·加斯 著

# 线性规划方法与应用

王建华 郑乐宁 谭泽光

何坚勇 周兴华 译

高等教育出版社

# 线性规划

## 方法与应用

[美]索尔·加斯　著
王建华　郑乐宁　谭泽光
何坚勇　周兴华　译

高等教育出版社

# 内 容 提 要

此书是线性规划方面的著名教科书，可供大学的应用数学，经济管理，系统工程等专业作为教材或参考书，也可供有关的科技工作者参考.

此书由理论、计算与应用三个部分组成. 基本理论部分概念明确、条理清楚；计算部分附有计算例题与表格，便于掌握；应用部分用大量的实际应用例题来说明线性规划在解决实际问题方面的具大威力，并通过这些例题来讨论建立线性规划模型的技巧.

本书根据 McGraw-Hill 出版公司 1975 年出版的 "Linear Programming-Methods and Applications"(第四版)译出.

**线 性 规 划**

**方法与应用**

[美]索尔·加斯 著

王建华 郑乐宁 谭泽光

何坚勇 周兴华译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张16.75 字数 400 000

1990 年 6 月第 1 版 1990 年 6 月第 1 次印刷

印数 0001—2 780

ISBN 7-04-000268-X/O·289

定价4.85元

# 序　言

本书中的材料原来是为华盛顿美国农业部研究生院的一门线性规划课程准备的．在把讲稿扩充改写成一本合适的教科书时，我所追求的目标与原先讲授这门课程时的指导思想是一致的．基本的目的在于灌输给学生以认识潜在的线性规划问题的能力，把这类问题表达成线性规划的模型的能力，运用适当的计算方法去解决这类问题的能力，以及了解把线性规划的这些组成部分联系在一起的数学的各个方面的能力．

为了方便，可以把线性规划的题材划分为三个相互独立但实质上并无严格区别的领域：理论、计算和应用．在讲授这门课程时，我把三个领域里的材料尽可能地交织在一起，并且发现这样做对学生是合适的、有启发的和有益的．因此，在对线性规划的应用及其数学模型作引论性介绍（第一章）以后，接着介绍凸集和线性不等式的数学理论，以及用消元法解线性方程组的计算方法（第二章）．其次，介绍一般线性规划问题的解的数学性质．然后，为了充分说明单纯形计算步骤的基本原理，证明了极点解的产生方法是若当和高斯消元法的一种简单的变形（第三章）．下面几讲介绍G. B. Dantzig的单纯形法的理论上和计算上的要点（第四章）．再以下是关于线性规划的对偶性问题的讨论（第六章）以及关于某些举例性的应用问题的提法的讨论（第十、十一章）．在课程①的最后部分，讲述了线性规划与零和二人对策之间的关系．

已对原始的讲稿作了修订，增加了有关修正单纯形法（第五

---

① 一学期的课程，共十六讲，每讲约 $2\frac{1}{2}$ 小时．

章)、退化情形下的计算步骤(第七章)、参数规划(第八章)、其他算法(第九章)以及其他论题和应用的讨论. 按照人们的建议，作者把全部材料汇集成三个部分: 引论、方法——包括理论的和计算的方法、应用①. 我认为这样安排可以更好地发挥这本书作为一本参考书的作用，可以把线性规划的三个领域用一种相互关联但又彼此独立的方式加以阐述. 因而读者将会发现，有些相对说来比较高深的论题，例如分解法和参数线性规划，反而出现在关于运输问题和一般应用问题的基本讨论之前. 为了提高读者学习线性规划的积极性，建议不必按照书中各章的次序来学习，而应当尽快地(可能在第五章或第六章之后)熟悉应用部分的题材②.

作者认为，这本教科书里的材料适用于大学四年级或研究生第一年的数学课程. 但是，为了其他领域的读者学习线性规划方法的方便，书中包含了足够的有关矩阵和向量的材料，从而使这本书适用于一切读者(第二章). 应当指出的是，以后各章中用到的绝大多数数学记号都是在第二章中引入的.①

对于许多种类的问题，寻求它们的最佳、极大、极小解，或者更一般地寻求最优解，曾经在各个时代引起人们巨大的兴趣. 欧几里得在他的著作第三卷中讨论了求一点到一圆周的最大和最小直线段问题，在第四卷中他叙述了怎样求周长一定而面积为最大的平行四边形. 然而，对于这些问题以及更复杂的问题来说，要等到十七和十八世纪的伟大数学家发展出微积分和变分法这些有力的

① 这一版增加了第十二章非线性规划部分.

② 在每周讲授三次的课程中，可以把一次讲课用于应用和(或)学习书末文献目录中列出的研究报告上.

① 读者很快就会发现，理解线性规划数学的主要困难之一，是由这一领域的许多原始文献中采用的形形色色的复杂记号所引起的. 作者在本书中尽可能地采用了"标准的"、前后一致的并且是明确的记号.

方法以后，才真正有了精确的解法．利用这些方法，我们可以求出很广泛的一类最优化问题的极大、极小解．这些方法以及其他的最优化数学方法，主要都同求解几何、动力学或物理问题有关．有些问题，例如求最小回转曲线和最速下降曲线，就是用这些古典的最优化方法解决的．

最近，产生了一类新的最优化问题，它们来源于现代社会中复杂的组织结构．我们这里指的是象这样的问题：例如怎样最有效地管理一项经济；或者求飞机的最优部署方案，使一个国家赢得一场战争的机会为最大；或者求一种满足农业上规定条件的化肥的成分，使其成本为最低．对于诸如此类的问题，研究怎样用数学式子描述它们和怎样解决它们，已引起新的重要的最优化方法的发展．其中之一就是本书要讨论的题材——线性规划．线性规划的模型，也就是线性函数在线性约束条件下的最优化，从数学结构上说是简单的，但由于它在应用中适用的范围极其广泛，所以是一种强有力的方法．

从历史上看，线性规划的一般问题是在1947年由美国空军部的George B. Dantzig, Marshall Wood和他们的同事们首先提出和应用的．① 当时，这个小组受命研究将数学和有关的方法应用于军事规划和计划问题的可能性．这项研究使Dantzig提出了“把一个大的组织机构内的各项活动之间的相互关系看成一个线性规划型的模型，通过极小化一个线性目标函数来确定最优化程序．”为了进一步发展这一设想，空军部组织了一个研究小组，定名为SCOOP计划（Scientific Computation of Optimum Programs）．SCOOP计划除了使空军的规划和预算问题的确定有了更科学的理论根据外，它的主要贡献就是促进了线性规划模型

① 还应该提到苏联数学家和经济学家康脱罗维奇(L. V. Kantorovich)，他早在1939年就提出和解决了一个关于生产组织和计划的线性规划问题．

的发展和应用. 线性规划方法的早期应用大致属于三个主要的方面: 由SCOOP计划产生的军事方面的应用, 根据 Leontief 投入产出模型分析各部门之间的经济活动, 以及有关零和二人对策与线性规划的关系的问题. 在过去若干年内, 这几方面的应用有了扩充和发展, 但线性规划应用的重点已转移到一般的工业领域, 在社会和城市规划方面也有许多的应用.

线性规划一般问题的数学描述最初是由 Dantzig 在1947 年提出的, 他同时提出了一种系统的解法, 即单纯形法. 在此之前, 人们已经认识到, 有不少问题 (有些是未解决的) 是属于下述类型的问题, 即: 一个线性函数在某些线性约束条件下的最优化问题. 更重要的例子有 Hitchcock(1941) 和 Koopmans(1947) 独立地提出的运输问题和 Stigler 的食物配料问题(1945)等. 线性规划的问题在高速电子计算机上首次成功地获得解决, 是1952 年一月在国家标准局的 SEAC 机器上作出的. 从那时以后, 已为大多数中型和大型通用电子计算机编制了单纯形算法或其变形的计算程序. 今天, 线性规划已成为现代理论和应用数学的一个重要工具. 它惊人的发展是由于许多个人与研究团体的开拓性努力的结果. (以下人名, 团体名略).

这一版增加了关于推广的上界问题一节; 扩充了关于应用的一章; 运输问题的计算步骤一节作了修改; 增加了一些说明性的材料和一些数值的例子, 每一章都附有练习题, 部分习题并有答案. 在"线性规划应用文献目录"和"参考文献"中, 附入了许多新的文章与书籍的名称. 另外, 为了教学上的理由, 这一版把修正单纯形法 (第五章) 放在对偶性理论的讨论 (第六章) 之前.

(以下感谢语略).

索尔·加斯

# 目　　录

# 第一部分

# 引　　论

# 第一章 一般描述

## 1. 线性规划问题

规划问题所涉及的是，对有限资源进行有效地利用或分配，以便达到所期望的目的. 这些问题的特点是，有大量的解满足每个问题的基本条件. 而把某一解选为最好的解，则与问题中某个方针或总的目标有关. 满足问题的条件同时又满足给定目标的解称为最优解. 典型的例子是，一个生产公司如何组织它的可用资源来制造产品，使得不仅满足生产进度的要求，而且其利润达到极大值. 此问题的基本条件是，可用资源所受的各种限制和对生产进度的各种要求，而它的目标是，公司希望获得最大盈利.

我们主要考虑的只是规划问题的一个很特殊的类型，它称为线性规划问题. 线性规划问题与一般规划问题的区别，在于这类问题的数学模型或描述可以用“直线”或线性的关系式来表示. 数学上这些关系式可以表示为

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_jx_j+\cdots+a_nx_n=b①,$$

在这里 $a_j(j=1,2,\cdots n)$ 和 $b$ 是已知的系数，而 $x_j(j=1,2,\cdots n)$ 是未知的变量. 一个线性规划问题的完整的数学描述，包括一个联立线性方程组，用来表示问题的条件，及一个线性函数，用来表示问题的目标. 在第 2 节中我们将叙述一些规划问题，并为它们建立线性规划模型.

为了求解线性规划问题，我们首先必须考虑相应的线性方程

---

① 几何上，这些关系式等价于二维平面中的直线、三维空间中的平面和多维空间中的超平面.

组的解.对线性方程组有各种不同的准则，利用这些准则可以揭示问题的解是否存在，是否有不止一个解(参看Hadley[199])①. 两个变量的两个方程

$$2x_1+3x_2=8,$$
$$x_1+2x_2=5$$

有唯一解$x_1=1$和 $x_2=2$. 而一个方程

$$x_1+2x_2=8 \tag{1.1}$$

有无穷多个解②. 由(1.1)有

$$x_1=8-2x_2 \text{ 或 } x_2=4-\frac{1}{2}x_1.$$

对于每个$x_2$的值(或$x_1$的值)就有一个对应的$x_1$值 (或$x_2$值). 如果我们进一步规定变量非负，即$x_1\geqslant 0$及$x_2\geqslant 0$，那么变量的范围就受到了限制，这是因为

$$\text{由 } x_1=8-2x_2\geqslant 0 \text{ 有 } 0\leqslant x_2\leqslant 4,$$

$$\text{由 } x_2=4-\frac{1}{2}x_1\geqslant 0 \text{ 有 } 0\leqslant x_1\leqslant 8.$$

我们仍有无穷多个解，但由于对 (1.1) 式加上了进一步的限制或约束条件，已使得变量活动的自由度有所减少. 正如将要指明的，变量非负的条件在线性规划问题中是很重要的条件. 象(1.1) 那样的方程组，变量的个数多于方程的个数，称为欠定方程组. 通常欠定线性方程组或者无解或者有无穷多组解.

对欠定方程组，确定解的一种重要方法是把它简化为变量个数与方程个数恰好相等的一个方程组，即一个确定组，令个数适当的变量等于零，这一点就能够实现. 例如一个欠定方程组

$$\left.\begin{aligned}2x_1+3x_2+x_3=8,\\ x_1+2x_2+2x_3=5\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

① 方括号中的数字是书末所列的参考书目中出版物的编号.

② 严格措词是"有无穷多解"，然而我们将采用"无穷多个解"这一普通的说法.

有三种这样的解:

$$x_1=0, x_2=11/4, x_3=-1/4;$$

$$x_1=11/3, x_2=0, x_3=2/3;$$

$$x_1=1, x_2=2, x_3=0①.$$

数学上，线性规划问题研究的是欠定线性方程组的非负解. 在以后的章节将会看到，我们必须考虑的解，只是用上述方法所得到的确定方程组的那些解②. 例如，如果令方程组(1.2)表示线性规划问题的条件，我们只需要考虑两组非负解$x_1=1, x_2=2, x_3=0$ 和 $x_1=11/3, x_2=0, x_3=2/3$. 其余的解或者不满足非负的要求，或者不满足将要讨论的其他准则.

一般规划问题都有某个目标，指导选择可用解. 同样，线性规划问题利用变量的某个线性函数来帮助选择问题的解. 变量的这个线性组合称为目标函数，必须通过选择解使其最优. 如对(1.2)式，我们希望目标函数 $x_1+x_2+x_3$有极大值，于是有两组非负解，其中一组解$x_1=11/3, x_2=0$，$x_3=2/3$是最优解，因为它得到的目标函数值为13/3，而另一组非负解的目标函数值为3. 如果想求目标函数$x_1-x_2$的极小值，那么解$x_1=1, x_2=2, x_3=0$ 将是最优解，其目标函数值为$-1$. 正像上面所指出的，最优解使变量的某一线性组合取极大值或极小值. 因为线性函数的极大值也等于这个线性函数的负函数的极小值的负值，不失一般性，我们只研究极小值问题.

加上了使目标函数最优化这一条件，我们就能选出满足问题所有条件的一组解. 方程组可能有许多组非负解使目标函数取相

---

① 当然，对(1.2)式，还会有其它无穷多组解，这些解可由任意令一个变量为常数而获得；例如，令 $x_1=a$，得到 $x_2=(11-3a)/4$ 和 $x_3=(-1+a)/4$.

② 对一组线性方程组寻找非负解的一种有效而系统的方法是第四章中描述的单纯形法.

同的最优值．一般说，把规划问题的线性约束条件和线性目标函数最优化两者结合起来考虑，就可以将描述规划问题的多解欠定方程组转化为能够求出一个解的方程组，这个解使目标函数取唯一的最优值．

下面，我们给出线性规划问题的一般数学描述：

$$
\begin{array}{ll}
\min & c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_jx_j+\cdots+c_nx_n, \\
\text{s.t.}① & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1j}x_j+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\
& a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2j}x_j+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{ij}x_j+\cdots+a_{in}x_n=b_i, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mj}x_j+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \\
& x_1 \geqslant 0, \\
& x_2 \geqslant 0, \\
& \vdots \\
& x_j \geqslant 0, \\
& \vdots \\
& x_n \geqslant 0,
\end{array}
$$

这里$c_j(j=1,2,\cdots n)$，$b_i(i=1,2,\cdots m)$以及$a_{ij}$全是常数，同时 $m<n$．$c_j$ 称为费用系数．

在以后几章中讨论的线性规划问题有下述几种情况：

1．无非负解．

2．非负解使目标函数值为无穷．

3．非负解使目标函数取有限值．

① 这里s.t.是subject to conditions的缩写，意思是“服从条件”或“约束条件是”——译者注．

若一个线性规划问题描述的是一个有效且实际的规划问题，一般它就有非负解且使目标函数取有限值.

## 2. 线性规划问题举例

作为上述线性规划问题的数学模型的应用，下面将对三个问题建立线性规划模型. 这些问题以及其他线性规划问题的更详细的讨论，在本书的第三部分给出.

运输问题.

一个制造厂希望把若干单位的产品从几个仓库发送到若干个零售点. 每个零售点都需要一定数量的产品，而每个仓库也能供应一定数量的产品. 这里作如下规定:

$m$ = 仓库的数目.

$n$ = 零售点的数目.

$a_i$ = 第 $i$ 个仓库能供应产品的总量.

$b_j$ = 第 $j$ 个零售点所需产品的总量.

假设能供应的总量等于需要的总量，即 $\sum_i a_i = \sum_j b_j$. 以后将要指出，这个假设不是一个限制性条件.

$x_{ij}$ = 从仓库 $i$ 运到零售点 $j$ 的产品数量.

这里 $x_{ij}$ 是待定的未知量. 如作出表格(当 $m=2, n=3$)

零售点

| | | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 仓库 | 1 | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $a_1$ |
| | 2 | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $a_2$ |
| | | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | |

则可以看出从仓库 1 运出产品的总量能用线性方程表示为