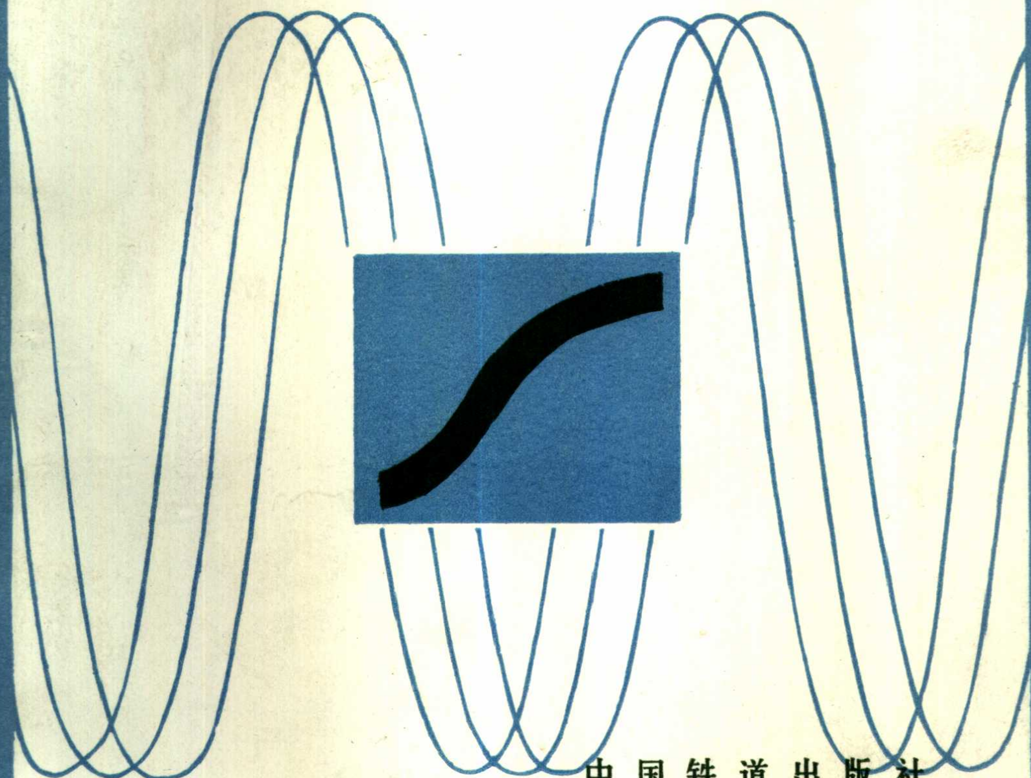
张景绘　张希农

工程中的振动问题习题解答



中国铁道出版社

-44

工程中的振动问题习题解答

张景绘　张希农

中国铁道出版社

1983年·北京

工程中的振动问题习题解答

张景绘　张希农

中国铁道出版社出版

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 1/16　印张：20.75　字数：518 千

1 9 8 3 年 5 月　第 1 版 1 9 8 3 年 5 月　第 1 次印刷

印数：0001—13,000 册　定价：2.60 元

前　言

S.Timoshenko, D.H.Young and W.Weaver《Vibration Problems in Engineering》(Fouth Edition)和该书的中译本《工程中的振动问题》(胡人礼译，中国铁道出版社出版)在国内广为发行，为不少高等院校的力学、建筑、机械等专业选为教材或主要参考书，并广泛为从事结构振动计算的工程技术人员和从事振动理论研究的科技人员所参考。原著的重要章节都附有习题，而且与正文叙述的内容配合十分恰当。正确地求解习题，有助于加深对基本理论的理解。工程中的振动问题种类繁多，对振动习题进行较多的演习，还可为解决实际振动问题广开思路。因此，我们求解了原著的全部习题，以供高等院校有关专业师生、科研人员和工程技术人员参考，亦供自学者参考。

一个题目的求解方法可有多种，我们主要使用原著相应章节所介绍的方法，有些题目还附有最简单的求解方法。本习题解的编排顺序以及使用的符号和术语均与中译本相同。题解的叙述方法力求清楚和完整，对原著的少数题目本身，根据题意作了补充，使读者能单独使用本习题解学习求解工程振动问题的方法。

本书的全部插图由孙文斌同志绘制。

我们的知识有限，难免有错误和不当之处，欢迎读者赐教。

编　者

1982年1月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

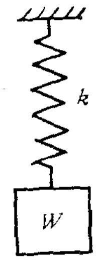
主要符号

p	固有角频率	c_{cr}	临界阻尼系数
τ	固有周期	γ	阻尼比
f	固有频率	$n=\dfrac{c}{2m}=\dfrac{cg}{2W}$	
p_d	阻尼振动角频率	$\mathbf{M}$	质量矩阵
τ_d	阻尼振动周期	$\mathbf{S}$	刚度矩阵
f_d	阻尼振动频率	$\mathbf{F}$	柔度矩阵
W	重物的重量	$\mathbf{X}_N$	归一化模态矩阵
k	弹簧常数	p_i	第i阶固有角频率
c	阻尼系数	X_i	第i阶归一化振型（特征函数）

第一章　具有一个自由度的系统

习题组1.1　自由谐和振动

1.1—1　图中螺旋弹簧的平均线圈直径$D=1$英寸，钢丝直径$d=0.1$英寸，包括20个线圈。钢丝受剪的弹性模量$G=12\times10^6$磅/英寸^2，悬挂重量$W=30$磅。试求算自由振动周期。



习题　1.1—1

【解】螺旋弹簧的弹簧常数为：

$$k=\frac{Gd^4}{8nD^3}$$

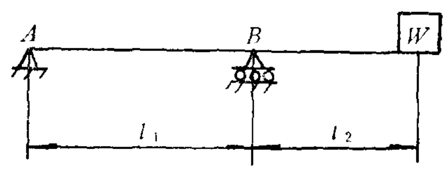
因此，自由振动的周期为：

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{W}{gk}}=\frac{4\pi D}{d^2}\sqrt{\frac{2WnD}{gG}}=\frac{4\pi\times1}{(0.1)^2}\sqrt{\frac{2\times30\times20\times1}{386\times12\times10^6}}=0.64\text{秒}$$

1.1—2　一根弯曲刚度$EI=12\times10^7$磅-英寸^{2}的简支梁，两支承之间的净跨$l_1=6$英尺，一端挑臂$l_2=3$英尺，如图所示。略去梁的分布质量，试求挑臂端点处重量为$W=600$磅的块体自由振动的频率。

【解】参看附录，挑臂端的等效弹簧常数为：

$$k=\frac{3EI}{l_2^2(l_1+l_2)}$$



习题　1.1—2

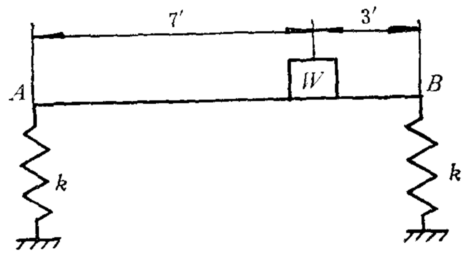
因此，自由振动的频率为：

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kg}{W}}=\frac{1}{2\pi l_2}\sqrt{\frac{3EIg}{W(l_1+l_2)}}$$

$$=\frac{1}{2\pi\times3\times12}\sqrt{\frac{3\times12\times10^7\times386}{600\times(6+3)\times12}}$$

$$=6.48\text{周/秒}$$

1.1—3　一根弯曲刚度$EI=30\times10^6$磅-英寸^{2}的梁AB，借弹簧支承于A点和B点处，每一弹簧系数$k=300$磅/英寸，如图所示。略去梁的分布质量，试求算位于B点左边3英尺处，重量$W=1000$磅的块体自由振动的周期。

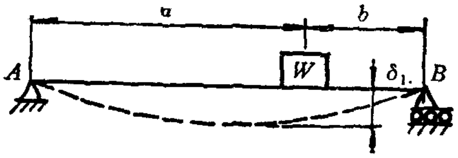


习题　1.1—3

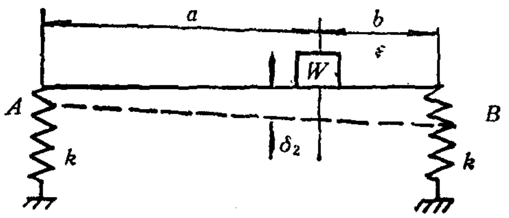
【解】在块体位置作用一静力W，习题1.1—3图所示系统的变形可看成下面二图所示系统变形的叠加。所以块体所在位置处的静挠度是两图所示系统在该处静挠度之和。分别计算如下：

把支座看成刚性的，则成图1.1—3(a)所示系统，是一简支梁，块体位置的静挠度为：

$$\delta_1=\frac{W(ab)^2}{3EI(a+b)}=\frac{1,000\times(7\times3\times12^2)^2}{3\times30\times10^6\times(7+3)\times12}=0.8467\text{英寸}$$



(a)



(b)

图 1.1—3

把AB杆看成刚性，支座为弹性，则成图1.1—3(b)所示系统。A和B两点弹簧受到的力R_A和R_B分别为：

$$R_A=\frac{b}{a+b}W \qquad R_B=\frac{a}{a+b}W$$

A点的挠度为：

$$\delta_A=\frac{R_A}{k}=\frac{bW}{k(a+b)}=\frac{3\times12\times1000}{300\times(7+3)\times12}=1\text{英寸}$$

B点的挠度为：

$$\delta_B=\frac{R_B}{k}=\frac{aW}{k(a+b)}=\frac{7\times12\times1000}{300\times(7+3)\times12}=2.333\text{英寸}$$

块体处的静挠度为：

$$\delta_2=\delta_A+\frac{a}{a+b}(\delta_B-\delta_A)=1+\frac{7\times12}{(7+3)\times12}(2.333-1)=1.933\text{英寸}$$

原系统在块体处的总挠度为：

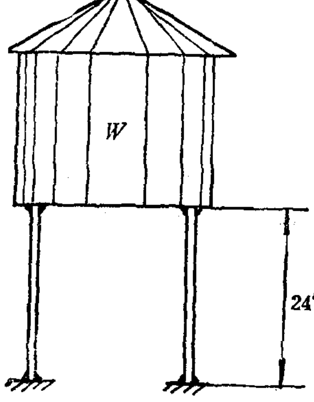
$$\delta_{st}=\delta_1+\delta_2=0.8467+1.933=2.7797\text{英寸}$$

因此，块体自由振动的周期为：

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{2.7797}{386}}=0.533\text{秒}$$

1.1—4　一个重量$W=150$千磅的水箱，借四根端点嵌固的竖置管柱支承着。每一柱的弯曲刚度$EI=2\times10^9$磅-英寸^2。试求算该水箱顺水平方向自由振动的周期。略去诸柱的分布质量。

【解】设在水平方向作用于水箱上一力P，则在水平方向上物体产生位移δ_{st}。由于结构对称，取出一根柱子，则在它的顶端受力为$\frac{P}{4}$；又因为柱子顶端与水箱刚接，所以在杆端转角应当为零，即还有一外力矩M，如图1.1—4。



习题　1.1—4

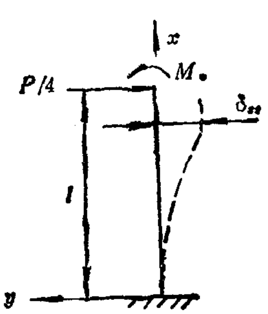


图　1.1—4

由材料力学知：$M(x)=M_0-\frac{P}{4}x$

$$EIy''=M=M_0-\frac{P}{4}x$$

积分一次得： $\theta=\frac{1}{EI}\left(M_0x-\frac{P}{8}x^2\right)+C$

$\because\ \theta|_{x=0}=0 \qquad \therefore\ C=0$

因此 $\theta=\frac{1}{EI}\left(M_0x-\frac{P}{8}x^2\right)$

再积分一次得： $y=\frac{1}{EI}\left(\frac{M_0x^2}{2}-\frac{P}{24}x^3\right)+D$

$\because\ y|_{x=0}=0 \qquad \therefore\ D=0$

所以 $y=\frac{1}{EI}\left(\frac{M_0x^2}{2}-\frac{P}{24}x^3\right)$

$\because \qquad \theta|_{x=l}=0$

$\therefore \qquad M_0l=\frac{P}{8}l^2 \qquad M_0=\frac{P}{8}l$

代入y的表达式中得：

$$y(x)=\frac{P}{8EI}\left[\frac{l}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]$$

当 $x=l$ 时，杆端挠度为：

$$\delta_{st}=y(l)=\frac{Pl^3}{48EI}$$

等效刚度系数为：

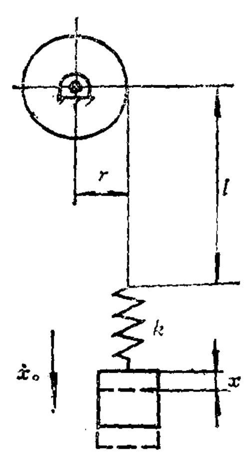
$$k_{eq}=\frac{P}{\delta_{st}}=\frac{48EI}{l^3}$$

因此，水箱顺水平方向自由振动的周期为：

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{W}{k_{eq}g}}=2\pi\sqrt{\frac{Wl^3}{48EIg}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{150\times10^3\times(24\times12)^3}{48\times2\times10^9\times386}}=1.95\text{秒}$$

1.1—5 假设图中重量W代表一个以等速$\dot{x}_0$向下运动的升降机，还假设钢索代表一弹簧，重量$W=10,000$磅，$l=60$英尺，钢索的横截面$A=2.5$英寸^2，钢索的弹性模量$E=15\times10^6$磅/英寸^2，$\dot{x}_0=3$英尺/秒。为了减少发生的最大动应力，在钢索下端与升降机之间加一个弹簧常数$k=2,000$磅/英寸的短弹簧。试求当钢索上端突然停止时产生的最大应力。钢索的重量略去不计。



习题 1.1—5

【解】设钢索的弹簧常数为k'，则

$$k'=\frac{P}{\Delta l}$$

$$\because \qquad \Delta l=\frac{Pl}{AE}$$

$$\therefore\ k'=\frac{EA}{l}=\frac{15\times10^6\times2.5}{60\times12}=52,083.3\text{磅/英寸}$$

由于k'与k串联，所以，等效弹簧常数由下式求得：

$$\frac{1}{k_{eq}}=\frac{1}{k'}+\frac{1}{k}$$

$$k_{eq}=\frac{k'k}{k+k'}=\frac{52,083.3\times2,000}{52,083.3+2,000}=1,926\text{磅/英寸}$$

系统的固有频率为：

$$p=\sqrt{\frac{k_{eq}g}{W}}=\sqrt{\frac{1926\times386}{10,000}}=8.622\text{秒}$$

在钢索上端突然停止前，为匀速运动，钢索承受的静荷载为W。从钢索上端突然停止时刻为时间的起点，又设x从静平衡位置量起，那末，初始条件可写成：

当$t=0$时，位移x为零；初始速度为$\dot{x}_0$，则振动的振幅为：

$$x_m=\frac{\dot{x}_0}{p}=\frac{3\times12}{8.622}=4.175\text{英寸}$$

作用在钢索上的最大动荷载为：

$$P_m=k_{eq}\cdot x_m=1,926\times4.175=8,041\text{磅}$$

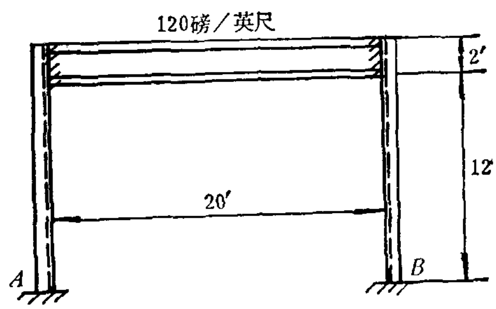
钢索承受的最大荷载为：

$$P_{max}=W+P_m=10,000+8,041=18,041\text{磅}$$

钢索产生的最大应力为：

$$\sigma_{max}=\frac{P_{max}}{A}=\frac{18,041}{2.5}=7,216\text{磅/英寸}^2\text{*}$$

1.1—6 有一门式框架，由一根20英尺长的24英寸重型工字钢，借与两根相对柔性的柱焊接成刚性连接，如图所示。每一柱为一根横截面面积$A=4.02$（英寸）^{2}的槽型钢，其最小回转半径$r=0.62$英寸，$E=30\times10^6$磅/(英寸)^2，试求算在框架平面内侧向振动的固有周期：（a）假设A和B处完全固定，（b）假设A和B为铰。略去工字梁的弯曲和柱的质量。



习题 1.1—6

【解】（a）设水平方向作用一力P，梁的水平位移为δ_1，由于结构对称，取出一根柱子分析，因柱子顶端为刚性连接，顶端转角为零，故可利用习题1.1—4的结果，得到柱子顶端的挠度：

$$\delta_1=\frac{Pl^3}{24EI}$$

等效弹簧常数为：

$$k_{eq}=\frac{P}{\delta_1}=\frac{24EI}{l^3}$$

因此，框架平面内侧向振动的固有周期为：

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{W}{gk_{eq}}}=2\pi\sqrt{\frac{Wl^3}{24EIg}}$$

$\because\quad I=Ar^2$

* 原书答案有误。

$$\therefore \quad \tau=2\pi\sqrt{\frac{Wl^3}{24EAr^2g}}=2\pi\sqrt{\frac{120\times20\times(12\times12)^3}{24\times30\times10^6\times4.02\times(0.62)^2\times386}}=0.812\text{秒}$$

（b）当A和B处均为铰时，A和B端的边界条件是挠度为零，弯矩为零，而柱顶端允许有挠度，但转角为零。若从相对运动的角度看，将柱顶当成固定端，A、B两点看成自由端，梁的变形状态不变。欲求柱顶端相对A点的挠度，相当于求图1.1—6A点相对柱顶的挠度。参看附录得：

$$\delta_2=\frac{Pl^3}{6EI}$$

等效弹簧常数为：$\quad k_{eq}=\dfrac{P}{\delta_2}=\dfrac{6EI}{l^3}$

固有周期为：$\quad \tau=2\pi\sqrt{\dfrac{W}{k_{eq}g}}=2\pi\sqrt{\dfrac{Wl^3}{6EAr^2g}}$

$$=2\pi\sqrt{\frac{120\times20\times(12\times12)^3}{6\times30\times10^6\times4.02\times(0.62)^2\times386}}=1.62\text{秒}$$

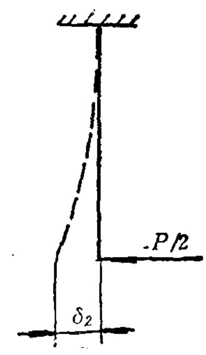


图 1.1—6

1.1—7 有一根由两个6英寸槽型钢，背靠背地组成两跨连续梁（$I=2\times17.4=34.8$英寸^4），在BC跨的中央处，承受一个重量$W=12$千磅的马达，如图所示。试求算该马达自由竖直振动的固有频率f。略去该梁的分布质量。

【解】
$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$$

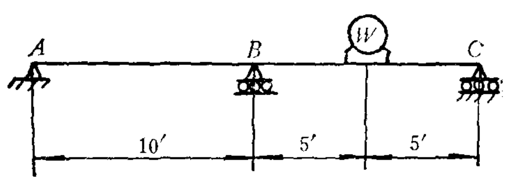
式中 $\quad\delta_{st}$——马达处的静挠度。

由于系统属于静不定问题，因此首先利用几何关系用叠加法求出B处支承反力R_B：

在图1.1—7（a）中，由附录得：

$$y_1=\frac{Wbx}{6EIl}(l^2-x^2-b^2) \qquad x\leqslant a \qquad (1)$$

在$x=l/2$处 $\qquad y_{1B}=\dfrac{Wb}{48EI}(3l^2-4b^2)$



习题 1.1—7

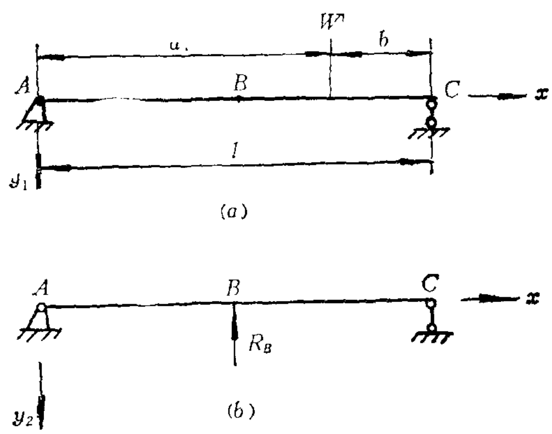


图 1.1—7

在图1.1—7（b）中，由附录得：

$$y_2=\frac{-R_Bl^3}{48EI}\left(3\frac{x}{l}-4\frac{x^3}{l^3}\right) \qquad x\leqslant\frac{l}{2} \qquad (2)$$

在$x=l/2$处 $\qquad y_{2B}=-\dfrac{R_Bl^3}{48EI}$

由于梁在B处有支座，所以梁在B处的挠度等于零，即

$$y_{1B}+y_{2B}=0$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\therefore\ R_B=\frac{Wb(3l^2-4b^2)}{l^3}=\frac{12\times10^3\times5\times12\times[3\times(20\times12)^2-4\times(5\times12)^2]}{(20\times12)^3}$$

$=8,250$磅

马达处的静挠度为：

$$\delta_{st}=y_1|_{x=a}+y_2|_{x=a}$$

$$y_1|_{x=a}=\frac{Wba}{6EIl}(l^2-a^2-b^2)$$

选取$E=30\times10^6$磅/英寸^2，则

$$y_1|_{x=a}=\frac{12\times10^3\times5\times12\times15\times12}{6\times30\times10^6\times34.8\times20\times12}[(20\times12)^2-(15\times12)^2-(5\times12)^2]$$

$=1.862$英寸

由于y_2是对称的，所以

$$y_2|_{x=a}=y_2|_{x=\frac{l}{4}}=\frac{-R_Bl^3}{48EI}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4^2}\right)=-\frac{8,250\times(20\times12)^3}{48\times30\times10^6\times34.8}\times\frac{11}{16}$$

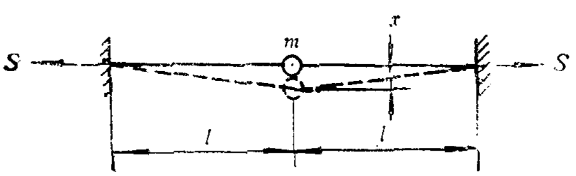
$=-1.565$英寸

$$\therefore\qquad \delta_{st}=1.862-1.565=0.297\text{英寸}$$

因此，马达竖直自由振动的固有频率为：

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{386}{0.297}}=5.738\text{周/秒}$$

1.1—8　有一个质量为m的很小的球，系于长度为$2l$紧拉着的钢丝中点处，如图所示。钢丝不能抵抗弯曲，并承受了很高的初始拉力S。试建立该球微小侧向振动时的运动微分方程，并说明如果钢丝中的拉力可以假设保持为常数，那末该运动将为简谐运动。要问在此情况下振动的周期是多少？



习题　1.1—8

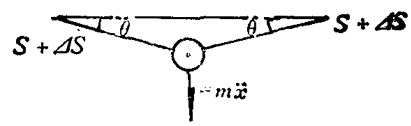


图　1.1—8

【解】

由图1.1—8，小球的运动方程为：

$$m\ddot{x}+2(S+\varDelta S)\sin\theta=0$$

由于是小振动，所以

$$\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{l^2+x^2}}\approx\frac{x}{l}$$

运动方程写成：

$$m\ddot{x}+2(S+\varDelta S)\frac{x}{l}=0$$

若钢丝中的拉力保持常数，即$\varDelta S=0$，则

$$m\ddot{x}+2\frac{Sx}{l}=0$$

由此可知小球作谐和运动，其固有频率为：

$$p=\sqrt{\frac{2S}{ml}}$$

振动周期为：

$$\tau=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{ml}{2S}}$$

习题 1.1—9

1.1—9 有一重量W，用三个弹簧k_1，k_2，k_3串联悬挂着，试说明系统的等效弹簧常数为：

$$k=\frac{k_1k_2k_3}{k_1k_2+k_2k_3+k_3k_1}$$

【解】 当重物W挂在三个串联的弹簧系统上后，每个弹簧承受相同的拉力W，每个弹簧的伸长量为

$\delta_1=\frac{W}{k_1}$，$\delta_2=\frac{W}{k_2}$，$\delta_3=\frac{W}{k_3}$，该重量的总的静力变位为：

$$\delta_{st}=\delta_1+\delta_2+\delta_3=\frac{W}{k_1}+\frac{W}{k_2}+\frac{W}{k_3}=W\left[\frac{k_2k_3+k_1k_3+k_1k_2}{k_1k_2k_3}\right]=\frac{W}{k}$$

$$\therefore\qquad k=\frac{k_1k_2k_3}{k_2k_3+k_1k_3+k_1k_2}$$

习题组1.2 旋 转 振 动

1.2—1 一根重量$W=4$磅、长度$a=2$英尺的水平杆AB,其中央点处悬挂于长度$l=2$英尺、直径$d=1/8$英寸的铅直钢丝上，试求其扭转振动的频率。假设该杆细长，但是是刚性的。略去钢丝的质量，并取其剪切模量为$G=12\times10^6$磅/英寸^2。

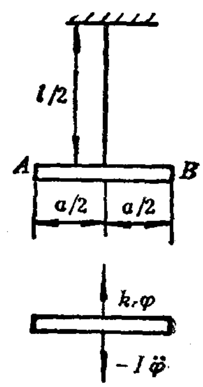


图 1.2—1

【解】

设在AB杆上加一绕z轴的静力矩M_t，则钢丝产生的扭转角为：

$$\varphi=\frac{32M_tl}{G\pi d^4}$$

扭转弹簧常数为：

$$k_r=\frac{M_t}{\varphi}=\frac{G\pi d^4}{32l}$$

根据达朗伯原理，由图1.2—1得：

$$I\ddot{\varphi}+k_r\varphi=0$$

固有角频率为： $p=\sqrt{\frac{k_r}{I}}$

其中 $k_r=\frac{12\times10^6\times\pi}{8^4\times32\times2\times12}=11.97$磅-英寸/弧度；

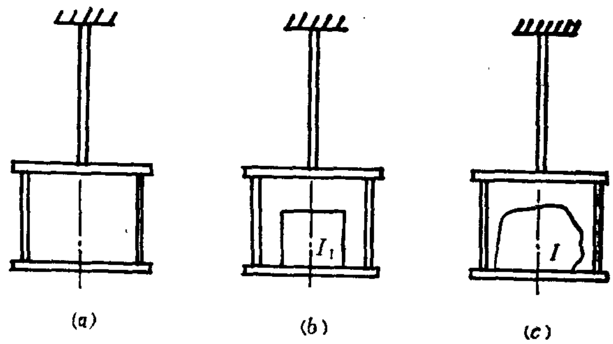
$$I=\int_{-a/2}^{a/2}\frac{W}{ag}x^2dx=\frac{Wa^2}{12g}=\frac{4\times(2\times12)^2}{12\times386}=0.497\text{磅-英寸-秒}^2\text{。}$$

因此、扭转振动的频率为：

$$f=\frac{1}{2\pi}p=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_r}{I}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{11.97}{0.497}}=0.781\text{周/秒}$$

1.2—2　图中表示一种对于实验确定不规则形状物体的质量惯性矩极为有用的装置。它由两块平行板组成，该平行板的整个装置如同附加于竖直轴上的刚体那样作用着，而且它的内部可以放置限于一定尺寸的任何物体。当它空着的时候（图a），此扭摆有一观察到的周期τ_0。当带着一个已知惯性矩为I_1的物体与它一起振动时（图b），该摆的周期为τ_1，而当带着未知惯性矩为I的物体时（图c），该摆以周期τ_2进行振动。试求出后一物体对旋转轴线（亦即该轴的轴线）的惯性矩I。



习题　1.2—2

【解】设装置的转动惯量为I_0，由计算旋转振动周期的公式（1.9）可知：

空装置时的固有周期为：

$$\tau_0=2\pi\sqrt{\frac{I_0}{k_r}} \tag{1}$$

装有惯性矩为I_1的物体时的固有周期为：

$$\tau_1=2\pi\sqrt{\frac{I_0+I_1}{k_r}} \tag{2}$$

装有惯性矩为未知的I的物体时的固有周期为：

$$\tau_2=2\pi\sqrt{\frac{I_0+I}{k_r}} \tag{3}$$

式中　k_r——等效扭转弹簧系数。

（2）式÷（1）式得：　$\dfrac{\tau_1^2}{\tau_0^2}=\dfrac{I_0+I_1}{I_0}$

$$\frac{I_1}{I_0}=\frac{\tau_1^2-\tau_0^2}{\tau_0^2} \tag{4}$$

（3）式÷（1）式得：　$\dfrac{\tau_2^2}{\tau_0^2}=\dfrac{I_0+I}{I_0}$

$$\frac{I}{I_0}=\frac{\tau_2^2-\tau_0^2}{\tau_0^2} \tag{5}$$

（5）式÷（4）式得：　$I=I_1\dfrac{\tau_2^2-\tau_0^2}{\tau_1^2-\tau_0^2}$

1.2—3　一根重量为W、长度为l的细长棱柱形杆AB，A处为一铰，B处借一常数为k的弹簧按水平状支承着，如图所示。试求该杆在竖直平面内有一个很小的角位移值ϕ时，其旋转振动的周期。略去弹簧的质量，并考虑杆是刚性的。

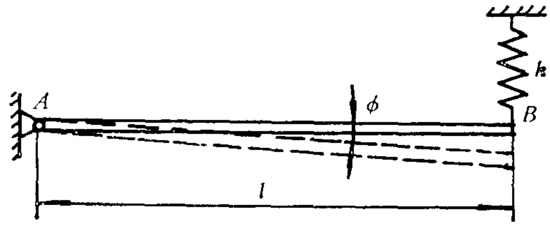
【解】 设杆转动一微小角φ，根据牛顿定理，则运动方程为：

$$I\ddot{\varphi}+kl^2\sin\varphi\cos\varphi=0$$

当φ很小时，$\sin\varphi\approx\varphi$和$\cos\varphi\approx1$，则

$$I\ddot{\varphi}+kl^2\varphi=0$$

式中 I是杆AB对A点的质量惯性矩。



习题 1.2—3

可知固有角频率为：

$$p^2=\frac{kl^2}{I}$$

固有周期为：

$$\tau=2\pi/p=2\pi\sqrt{\frac{I}{kl^2}}$$

质量惯性矩I可由下式求得：

$$I=\int_0^l\frac{W}{lg}x^2dx=\frac{W}{3g}l^2$$

代入上式得：

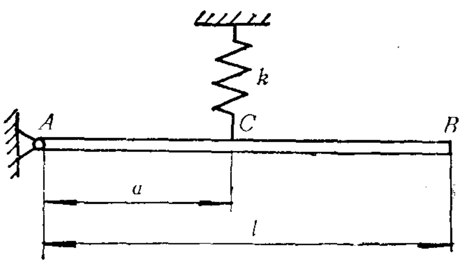
$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{W}{3gk}}$$

1.2—4 一根重量为W、长度为l的细长刚性棱柱形杆AB，A处为铰接，借C处作用竖直弹簧支承成水平位置（见图）。试求算该杆在竖直平面内有一微小旋转振幅的周期τ。假设弹簧常数为k，并略去质量不计。

【解】当有一角位移时，根据达朗伯原理，杆AB受力情况如图1.2—4，当φ很小时，系统的运动方程近似为：

$$I\ddot{\varphi}+ka^2\varphi=0$$

式中 I是AB杆对A点的质量惯性矩，参看习题1.2—3，$I=\frac{Wl^2}{3g}$。



习题 1.2—4

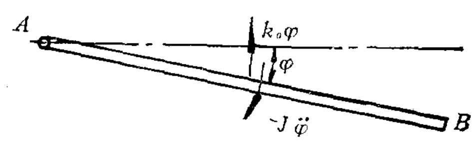


图 1.2—4

固有角频率为：

$$p^2=\frac{ka^2}{I}$$

固有周期为：

$$\tau=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{I}{ka^2}}=\frac{2\pi l}{a}\sqrt{\frac{W}{3gk}}$$

1.2—5 试确定图中所示盘的扭转振动的频率。假设该轴的端点嵌固于A处和B处，轴的两部分具有相同的直径d，但长度不同，为l_1和l_2。该盘的惯性矩为I。

【解】参阅附录，长度为l_1一段轴的扭转常数为：

$$k_1=\frac{\pi d^4 G}{32 l_1}$$

长度为l_2一段轴的扭转弹簧常数为：

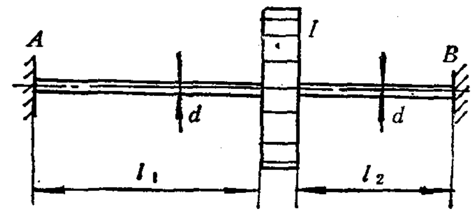
$$k_2=\frac{\pi d^4 G}{32 l_2}$$

图示系统的等效弹簧常数，可以认为是k_1和k_2并联的结果，由此可得：

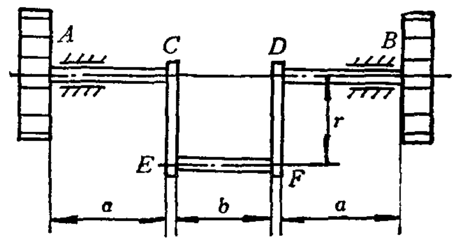
$$k=k_1+k_2=\frac{\pi d^4 G}{32 l_1 l_2}(l_1+l_2)$$

盘扭转振动的固有频率为：

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{I}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi d^4 G(l_1+l_2)}{32 I l_1 l_2}}$$



习题 1.2—5



习题 1.2—6

1.2—6 试确定一根直形轴的等效长度L_1，该轴与图示曲柄轴的轴颈具有相同的扭转刚度C_1。曲柄连接板CE和DF的弯曲刚度为B。假设A和B处的轴承具有足够的空隙，允许曲柄轴扭转过程中C和D自由侧向位移。曲柄插杆EF的扭转刚度为C_2，摆幅半径为r。

【解一】设在轴上加扭矩M_n后，$\overline{AC}$，$\overline{DB}$，$\overline{EF}$各段分别产生扭转角φ_{AC}，φ_{DB}，φ_{EF}，C、D在与轴垂直的平面内产生相对位移（由于幅条$\overline{CE}$和$\overline{DF}$的弯曲），$\overline{CE}$和$\overline{DF}$也分别产生转角φ_{CE}和φ_{DF}。

因为

$$\varphi_{AC}=\varphi_{DB}=\frac{M_n a}{C_1}$$

$$\varphi_{EF}=\frac{M_n b}{C_2}$$

$$\varphi_{CE}=\varphi_{DF}=\frac{M_n r}{B}$$

所以，总转角为：

$$\begin{aligned}\varphi&=\varphi_{AC}+\varphi_{CE}+\varphi_{EF}+\varphi_{DF}+\varphi_{DB}\\&=2\frac{M_n a}{C_1}+\frac{M_n b}{C_2}+2\frac{M_n r}{B}\\&=\frac{M_n}{C_1}\left[2a+\frac{C_1}{C_2}b+2\frac{C_1}{B}\right]\\&=\frac{M_n}{C_1}L_1\end{aligned}$$

因此，轴的等效长度为：

$$L_1=2a+\frac{C_1}{C_2}b+2\frac{C_1}{B}r$$

【解二】设：

k_{AC}为AC轴的扭转弹簧常数

k_{DB}为DB轴的扭转弹簧常数

k_{EF}为EF轴的扭转弹簧常数

k_{DF}为接板DF的弯曲弹簧常数

k_{EC}为接板CE的弯曲弹簧常数

它们的大小分别为：

$$k_{AC}=k_{DB}=\frac{C_1}{a}$$

$$k_{EF}=\frac{C_2}{b}$$

$$k_{DF}=k_{EC}=\frac{B}{r}$$

整个系统的等效扭转弹簧常数k可以看成是k_{AC}、k_{DB}、k_{EF}、k_{DF}、k_{EC}的串联，因此

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k_{AC}}+\frac{1}{k_{DB}}+\frac{1}{k_{EF}}+\frac{1}{k_{DF}}+\frac{1}{k_{EC}}$$

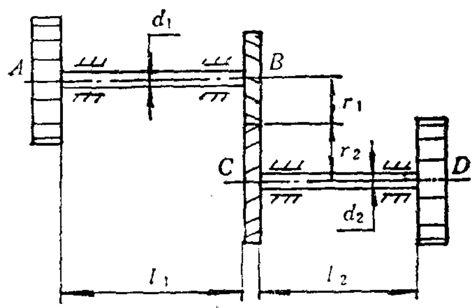
若将系统化成具有扭转度C_1的轴，设这轴的等效长度为L_1，则

$$\frac{1}{k}=\frac{L_1}{C_1}=\frac{a}{C_1}+\frac{a}{C_1}+\frac{b}{C_2}+\frac{r}{B}+\frac{r}{B}$$

所以，等效长度为：

$$L_1=2a+\frac{C_1}{C_2}b+2\frac{C_1}{B}r$$

1.2—7 有两个平行轴AB和CD支承于轴承上，以齿轮衔接传动，如图所示。每一轴的外端有一个很重的盘，该系统进行扭转振动。试计算在下列数据时的振动周期：$I_A=I_D=1000$磅-英寸-秒^2，$l_1=l_2=60$ 英寸，$d_1=d_2=3$英寸，$r_1/r_2=\frac{1}{2}$。略去两个齿轮和两根轴的惯性。假设每一轴的剪切模量$G=12\times10^6$磅/英寸^2。



习题 1.2—7

【解】 设k_{r1}表示AB轴段的扭转弹簧常数，k_{r2}表示CD轴段的扭转弹簧常数，由附录得：

$$k_{r1}=\frac{\pi G d_1^4}{32 l_1}$$

$$k_{r2}=\frac{\pi G d_2^4}{32 l_2}$$

在A盘上施加一扭矩M_A，卡住D盘使它不能转动。作用在AB轴上的扭矩为M_A，由于有齿轮的传动比（r_2/r_1）的关系，作用在C盘上的扭矩为$M_A(r_2/r_1)$，作用在CD轴上的扭矩也为$M_A(r_2/r_1)$。在这个扭矩的作用下，C盘的转角为：

$$\theta_c=\frac{M_A\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{k_{r2}}$$

因此，B盘的转角为：

$$\theta_B=\theta_C\cdot\frac{r_2}{r_1}=\frac{M_A\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}{k_{r2}}$$

另一方面，在扭矩M_A的作用下，A盘相对于B盘的转角为：

$$\theta_{AB}=\frac{M_A}{k_{r1}}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com