泛函分析

李文清著

科学出版社

內 容 簡 介

本书分为三篇共十章．第一篇为基础部分，扼要地敘述了距离空間；綫性賦范空間等等．第二篇为非綫性分析，闡述向量函数及其微积分等等．第三篇为譜論，敘述希尔伯特空間的自共軛运算的譜的分解等等．此外书末有附录部分，由关肇直及林羣两同志合写，系統地敘述了国內解放后在非綫性方程的近似解方面的一些成果．

此书可供高等学校专門化課程之用，也可作为大学青年教师及泛函分析工作者参考之用．

泛 函 分 析

李 文 清 著

科学出版社出版（北京朝阳門大街117号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第061号

中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

*

1960年2月第一版　书号：2059　字数：252000

1962年3月第二次印刷　开本：850×1168　1/32

（京）9,001—13,900　印张：9 1/2

定价：1.40元

序

数学的发展和其它事物一样，由低級演化到高級．算术所討論的是数的四则运算（+，−，×，÷）．代数进了一步，引入变数及多項式，而多項式是簡单的函数．

函数的理論由牛頓-来布尼茲的微积分直到十九世紀的光輝的函数論时代，构成数学史上伟大的遺产．但这一时期的特点，大多討論特殊函数的性質，如茄瑪（Gama）函数，貝塞耳函数，椭圓函数等等．这种研究往往局現于一个函数的特殊的性質．

二十世紀的数学迈进了一步．数学家大多考虑函数类，如連續函数类、解析函数类、有界变差函数类．一个函数类，若具有一收斂的定义，这函数类构成了一函数空間．同一函数类，若其中元列的收斂定义不同，即形成不同的空間．一函数空間如何定义其元的收斂是很重要的一件事．

泛函分析主要內容是研究函数空間(或叫抽象空間)的結构及其变換的科学．目前一般教科书都着重討論綫型运算，但由于非綫型运算的重要性越来越被重視，于是非綫性分析将要成为重要的研究对象．此外由于物理学，特别是量子力学的需要，譜論及特征値問題也被重視起来．全书內容包括三大部分：距离空間及巴那赫空間；非綫性分析和譜論．本书着重的用了"分析"的方法，把实函数、复函数及微分方程的一些定理及方法滲透到泛函数分析里去，而泛函数分析也可以看作上述諸分支的綜合体．

本书曾在 1955—1958 三年間在廈門大学作过教本，幷且在同时期举行討論班，丰富了本书的內容．和我共同工作的有林鴻庆、陈孟平和李秋秀同志，他們对我的教学提供过宝貴的意見．中国科学院数学研究所关肇直先生曾耐心地閱讀我的手稿，幷作了一些文字上的修改．他和林羣同志写了非綫性方程近似解法作为本

书的附录．这不仅补充了本书的內容，也同时总結了我国数学界关于非綫性分析的一些成就．对帮助我的同志們特此致謝．

最后厦門大学数学系的党組織对本門学科給予很大的支持，为了迎接祖国1959年的更大的跃进，把这份材料整理写出作为向十周年的国庆献礼．

李文清

1959年2月于厦門

目　　录

第一篇　一般理論

第二篇　非綫性分析

第三篇　譜　　論

第一篇 一般理論

第一章 距离空間

§ 1. 距离空間，开集合与閉集合

R 表示一集合，其元 $a, b, \cdots$ 滿足下列三公理，叫做距离空間. 对任意二元 $a, b \in R$ 对应着一实数 $\rho(a, b)$ 滿足

公理 1. $\rho(a, a) = 0$，且 $a \neq b$ 时 $\rho(a, b) > 0$;

公理 2. $\rho(a, b) = \rho(b, a)$;

公理 3. $\rho(a, b) + \rho(b, c) \geqslant \rho(a, c)$.

上列公理 3，叫做三角形公理. 設 a 是空間 R 的一元（或称为一点），則集合 $\{x: \rho(a, x) < \varepsilon\}$ 叫做以 a 为心，以 ε 为半径的球，以 $U_\varepsilon(a)$ 表之. 为了表明这球是含在空間 R，可以用 $U_\varepsilon^R(a)$ 表之. 关于距离空間的球有下列簡单的性質.

$$U_\varepsilon(a) \cap U_\delta(b) = 0, \quad 当\ \varepsilon + \delta \leqslant \rho(a, b). \tag{1}$$

这个公式的意义是对两个不同的点，可做两个不相交的球而以該两点为球心.

証. 設 $x \in U_\varepsilon(a)$，則

$$\rho(b, x) = \rho(x, b) \geqslant \rho(b, a) - \rho(a, x) > (\varepsilon + \delta) - \varepsilon = \delta;$$

于是我們得到 $x \bar{\in} U_\delta(b)$.

$$U_\varepsilon(a) \supset U_\delta(b), \quad 当\ \varepsilon - \delta \geqslant \rho(a, b). \tag{2}$$

証. 設 $x \in U_\delta(b)$，則

$$\rho(a, x) \leqslant \rho(a, b) + \rho(b, x) < \varepsilon - \delta + \delta = \varepsilon;$$

于是得到

$$x \in U_\varepsilon(a).$$

公式(2)的几何意义是，在一球内任一点为心可以作一小球完全落在原来的球内.

$$U_\varepsilon(a) \supset U_\delta(a), \quad 当\ \varepsilon \geqslant \delta. \tag{3}$$

公式(3)表示同心球的关系.

設 Λ 为一由正实数所組成的集合,则得下式成立:

$$U_\varepsilon(a)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda(a),\quad 当\ \varepsilon=\sup_{\lambda\in\Lambda}\lambda. \tag{4}$$

公式(4)的意义为,取一切以 λ 为半径的同心球的和集仍为一球,其半径是一切 λ 的上确界.

證. 由(3)明显的有

$$U_\lambda(a)\subset U_\varepsilon(a),$$

$$\bigcup_{\lambda\subset\Lambda}U_\lambda(a)\subset U_\varepsilon(a).$$

設 $x\in U_\varepsilon(a)$. 按 $\varepsilon=\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\lambda$, 因之有 λ 存在使

$$\rho(x,a)<\lambda<\varepsilon,\quad \lambda\in\Lambda,\quad x\in U_\lambda(a),$$

而 x 是 $U_\varepsilon(a)$ 的任一点,所以 $U_\varepsilon(a)\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda(a)$.

定理 1.1. 設 $U_\varepsilon(a)\cap U_\delta(b)\ni c$, 则存在一 γ 滿足

$$U_\gamma(c)\subset U_\varepsilon(a)\cap U_\delta(b).$$

證. 由假設可知, $\rho(a,c)<\varepsilon$, $\rho(b,c)<\delta$. 命

$$\gamma=\min\{\varepsilon-\rho(a,c),\ \delta-\rho(b,c)\},$$

则得

$$\begin{aligned}\varepsilon-\gamma&=\varepsilon-\min\{\varepsilon-\rho(a,c),\ \delta-\rho(b,c)\}\\&\geqslant\varepsilon-(\varepsilon-\rho(a,c))=\rho(a,c).\end{aligned}$$

按(2)得

$$U_\gamma(c)\subset U_\varepsilon(a).$$

又

$$\begin{aligned}\delta-\gamma&\geqslant\delta-\min\{\varepsilon-\rho(a,c),\ \delta-\rho(b,c)\}\\&\geqslant\rho(b,c);\end{aligned}$$

又按(2)得

$$U_\gamma(c)\subset U_\delta(b).$$

所以

$$U_\gamma(c)\subset U_\delta(b)\cap U_\varepsilon(a).$$

定义 1. 开集合:設 A 为 R 的一集合,若对一点 $\alpha\in A$,常有球 $U_\varepsilon(\alpha)\subset A$,則称 A 为开集合.空集合 0 規定为开集合.閉集合:若集合 A 的余集 A' 是开集合时,A 叫閉集合[1].

由定义 1 可推出,空集合 0 亦为閉集.任一球 $U_\varepsilon(a)$ 是一开集.

定理 1.2. 有限个开集 $A_1,\cdots,A_k$ 之积仍为开集,任一开集系[2] $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 之和仍为开集.

証.(i) 設 $x\subset A\cap B$,A 及 B 是开集.則 $x\in A$,由定义知存在一球 $U_{\varepsilon_1}(x)\subset A$,同理存在一球 $U_{\varepsilon_2}(x)\subset B$,取 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ 得 $U_\varepsilon(x)\subset A\cap B$.按有限归納法,得有限个开集之积是开集.

(ii) 若 $x\in\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$,$A_\lambda$ 是开集,則至少有一 λ 使

$$x\in A_\lambda\subset\bigcup_{\lambda\subset\Lambda}A_\lambda$$

成立.故存在

$$U_\varepsilon(x)\subset A_\lambda\subset\bigcup_{\lambda\subset\Lambda}A_\lambda;$$

所以

$$\bigcup_{\lambda\subset\Lambda}A_\lambda\ \text{是开集.}$$

定理 1.3. 有限个閉集 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 之和集仍为閉集.任一閉集系 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的积仍为閉集.

証.对任一集系 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 下式成立:

(i) $$\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)'=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A'_\lambda;$$

(ii) $$\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)'=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A'_\lambda.$$

再应用定理 1.2,即得定理 1.3.

---

1) 开集合簡称开集,閉集合簡称閉集.

2) 所謂集合系即集合的集合.

定义 2. 点集 A 所含的一切开集合之和集叫 A 的开核．以 A^0 表之，又含有 A 的一切閉集合的积叫 A 的閉包，以 $\overline{A}$ 表之（$\overline{A}$ 又写做 A^-）．

明显的 A^0 是开集，$\overline{A}$ 是閉集．

定理 1.4. 点集合 A 为开集的充要条件是 $A = A^0$，又 A 为閉集的充要条件是 $A = \overline{A}$．

以下我們討論开核与閉包的一些关系式，讀者应熟习这些基本公式．

$$A^0 \subset A \subset \overline{A}, \tag{5}$$

$$A^{0\prime} = A^{\prime -}, \quad A^{\prime 0} = \overline{A}^{\prime}. \tag{6}$$

証．(i) $A^{0\prime} = \left(\bigcup_{A_\lambda \subset A} A_\lambda\right)^{\prime}$（$A_\lambda$ 是 A 内的开集）

$$= \bigcap_{A_\lambda^{\prime} \supset A^{\prime}} A_\lambda^{\prime} = A^{\prime -} \text{（因 } A_\lambda^{\prime} \text{ 是含有 } A^{\prime} \text{ 的閉集）}.$$

(ii) $\overline{A}^{\prime} = \left(\bigcap_{A_\lambda \supset A} A_\lambda\right)^{\prime}$（$A_\lambda$ 是含有 A 的閉集）

$$= \bigcup_{A_\lambda^{\prime} \subset A^{\prime}} A_\lambda^{\prime} = A^{\prime 0}.$$

$$A^0 = A^{\prime - \prime}, \qquad A^- = A^{\prime 0 \prime} \quad \text{（由(6)而得）}. \tag{7}$$

$$A^{00} = A^0, \qquad \overline{\overline{A}} = \overline{A}. \tag{8}$$

$$\text{若 } A \supset B, \text{ 則 } A^0 \supset B^0, \ \overline{A} \supset \overline{B} \text{ 成立}. \tag{9}$$

$$(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0, \quad \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{10}$$

証．(i) 由 $A \cap B \supset A^0 \cap B^0$，則 $(A \cap B)^0 \supset (A^0 \cap B^0)^0 \supset (A^0 \cap B^0)$，又由 $A^0 \supset (A \cap B)^0$ 及 $B^0 \supset (A \cap B)^0$ 得 $A^0 \cap B^0 \supset (A \cap B)^0$．所以

$$(A \cap B)^0 = (A^0 \cap B^0) \text{（本节計算利用公式(9)）}.$$

(ii) 按 $\overline{(A \cup B)} = (A \cup B)^{\prime 0 \prime} = (A^{\prime} \cap B^{\prime})^{0\prime}$

$$= (A^{\prime 0} \cap B^{\prime 0})^{\prime} = A^{\prime 0 \prime} \cup B^{\prime 0 \prime} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

$$\overline{A} \cap B^0 \subset (\overline{A \cap B}) \subset \overline{A} \cap \overline{B}, \quad A^0 \cup B^0 \subset (A \cup B)^0 \subset A^0 \cup \overline{B}. \tag{11}$$

證. (i) 由 $A\subset\bar{A}$, $B\subset\bar{B}$ 可推出 $A\cap B\subset\bar{A}\cap\bar{B}$. 因 $\bar{A}\cap\bar{B}=\overline{\bar{A}\cap\bar{B}}$, 故得

$$\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}.$$

(ii) $A=(A\cap B)\cup(A\cap B')\subset(A\cap B)\cup B'$. 所以

$$\bar{A}\subset\overline{(A\cap B)\cup B'}=(\overline{A\cap B})\cup B'^{-}=(\overline{A\cap B})\cup B^{0\prime}.$$

$$\bar{A}\cap B^{0}\subset\{(\overline{A\cap B})\cap B^{0}\}\cup(B^{0\prime}\cap B^{0})$$
$$=(\overline{A\cap B})\cap B^{0}\subset\overline{A\cap B}.$$

故得結論

$$\bar{A}\cap B^{0}\subset\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}.$$

其次取上式各項的余集得

$$(\bar{A}\cap\bar{B})'\subset(\overline{A\cap B})'\subset(\bar{A}\cap B^{0})'.$$
$$\bar{A}'\cup\bar{B}'\subset(A\cap B)'^{0}\subset\bar{A}'\cup B^{0\prime}.$$

卽得

$$\bar{A}'\cup\bar{B}'\subset(A'\cup B')^{0}\subset\bar{A}'\cup B^{0\prime}.$$

今以 A' 代 A, B' 代 B 得

$$A'^{-\prime}\cup B'^{-\prime}\subset(A\cup B)^{0}\subset A'^{-\prime}\cup B'^{0\prime},$$

卽得

$$A^{0}\cup B^{0}\subset(A\cup B)^{0}\subset A^{0}\cup\bar{B}.$$

$$A^{-0-0}=A^{-0},\quad A^{0-0-}=A^{0-}. \tag{12}$$

此处用 A^{-0-0} 表示 $\overline{\bar{A}^{0}}^{0}$.

證. (i) 因 $A^{-0-}\supset A^{-0}$, 所以 $A^{-0-0}\supset A^{-0}$. 又因 $A^{-0}\subset A^{-}$, 所以 $A^{-0-0}\subset A^{--0}=A^{-0}$. 故得

$$A^{-0-0}=A^{-0}.$$

(ii) 因 $A^{0-0}\subset A^{0-}$, 所以

$$A^{0-0-}\subset A^{0--}=A^{0-},$$

又因 $A^{0-}\supset A^{0}$, 所以 $A^{0-0-}\supset A^{00-}=A^{0-}$. 故得

$$A^{0-0-}=A^{0-}.$$

定理 1.5. 設 A 为开集, B 为任一集合, 若 $A\cap B=0$, 則 $A\cap\bar{B}=0$.

証．因 $A = A^0$，故 $\bar{B} \cap A = \bar{B} \cap A^0 \subset (\overline{A \cap B}) = 0$．

定义 3. 設 a 为距离空間 R 的一点，若能取适当小的 $\varepsilon > 0$，存在一球 $U_\varepsilon(a) \subset A$，則 a 叫 A 的内点．又設 $a \in R$，且任一 $\varepsilon > 0$ 都使 $U_\varepsilon(a) \cap A \neq 0$ 时，則称 a 为 A 的接点．

定理 1.6. A 为任一点集，則 A^0 是 A 的内点的全体；$\bar{A}$ 是 A 的接点的全体．

証．設 $x \in A^0$，因 A^0 是开集，存在 $U_\varepsilon(x) \subset A^0 \subset A$；所以 x 是 A 的内点．同时 A 的任一内点必属于 A^0．故知 A^0 是 A 的内点的全体．又 $U_\varepsilon(a) \cap A = 0$ 与 $U_\varepsilon(a) \cap \bar{A}$ 是等价的．由此推得对任一 $\varepsilon > 0$，当 $U_\varepsilon(a) \cap \bar{A} \neq 0$ 时，則 $U_\varepsilon(a) \cap A \neq 0$，此时 $a \in \bar{A}$．設相反 $a \bar{\in} \bar{A}$ 时，則 $a \in \bar{A}'$，必有 $U_\varepsilon(a) \subset \bar{A}'$，此时 $U_\varepsilon(a) \cap \bar{A} = 0$，引起矛盾．故知 $U_\varepsilon(a) \cap A \neq 0$ 对任一 $\varepsilon > 0$ 成立和 $a \in \bar{A}$ 是等价的．

例． 今举出一些常見的距离空間的例：

(i) 欧氏空間：設 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为此空間二点．其距离定义如下：

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

容易驗証在此距离下，滿足距离空間的公理．若 $n = 2$．即得到欧氏平面，实际上是我們常用的直角坐标的平面．在平面上由初等几何知道，任一三角形的两边的长度之和大于第三边的长度．

(ii) l^2 空間：在此空間的一点是一个序列，$x = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$，这序列滿足条件

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty.$$

若 $\{x_i\}$ 是实数序列，用 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$ 代替 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$．其距离的定义为：設 $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$，$y = (y_1, y_2, y_3, \cdots)$

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}.$$

由这个距离的定义看来，欧氏空間可看 l^2 的特例．因取 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, 0, 0, \cdots)$ 时实际上可看做欧氏空間的一点．所不同的是，l^2 的維数是可数无限，而欧氏空間的維数是 n.

(iii) (C) 空間：取一切在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上的連續函数 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\cdots$ 形成一空間，其距离定义为

$$\rho(x, y)=\max_{0 \leqslant t \leqslant 1}|x(t)-y(t)|.$$

讀者很容易証明在此距离下，(C) 空間满足三个距离公理．但这个空間中的一点是一个函数．因此我們称之为函数空間．泛函数分析这門科学主要目的是研究序列空間及函数空間的結构和在此奨空間上的变换．

以下再举几个例：

(iv) M 空間：定义在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 的一切眞性有界可測函数 $x(t)$, $y(t)$, $\cdots$, 其距离定义为

$$\rho(x, y)=\inf_{\substack{E \\ mE=0}} \sup_{t \in[0,1]-E}|x(t)-y(t)|.$$

(v) m 空間：有界序列空間．

設 $x=\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}$, $y=\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots\}$; 其距离的定义为

$$\rho(x, y)=\sup_{1 \leqslant i<\infty}|\xi_i-\eta_i|.$$

(vi) s 空間：一切序列空間．

設 $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots)$, $y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots)$; 其距离定义为

$$\rho(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}.$$

§2. 收斂

試考虑距离空間 R 中一个点列 $a_1, a_2, \cdots$. 若有 a 使

$$\lim_{i \to \infty} \rho(a_i, a)=0,$$

則謂 $a_1, a_2, \cdots$ 收斂于 a, 而 a 叫 $\{a_i\}_{i=1,2,\ldots}$ 的极限，写做

$$\lim_{i \to \infty} a_i=a.$$

此极限是唯一的．因若有 b 也是 $\{a_i\}$ 的极限，則

$$\lim_{i\to\infty}\rho(a_i, b) = 0;$$

而由于 $\rho(a, b) \leqslant \rho(a, a_i) + \rho(a_i, b)$ 立即得

$$\rho(a, b) = 0,$$

故极限是唯一的. 又当 $\lim\limits_{i,j\to\infty}\rho(a_i, a_j) = 0$ 时, $\{a_i\}$ 叫本来收斂列.

定理 2.1. 凡有极限的点列都是本来收斂列.

証. 設 $\{a_i\}$ 收斂于 a, 则由下列不等式

$$\rho(a_i, a_j) \leqslant \rho(a_i, a) + \rho(a, a_j)$$

可推出 $\{a_i\}$ 是本来收斂列.

定义 1. 設 A 是 R 的一点集, 若 A 的任何本来收斂列都有一极限点属于 A, 则称 A 为完备集. 若 R 空間是一完备集时, R 叫做完备空間.

定理 2.2. 完备的点集是閉集合.

証. 設 A 是一完备集合, 对于任一点 $x\in\overline{A}$, 由定义有 a_n 存在使

$$a_n \in A \cap U_{\frac{1}{n}}(x), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

这样 $\rho(a_n, x) < \dfrac{1}{n}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$, $x\in A$. 故得 $\overline{A}\subset A$. 因之 $\overline{A} = A$, 而 A 是閉集.

定理 2.3. 若 R 是一完备空間, 则任一 R 内的閉集是完备的.

証. 設 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 为任一 A 的点列, 且設

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

由假設可知对任一 $\varepsilon > 0$, 存在一 N 使 $n\geqslant N$ 时我們有

$$a_n\in U_\varepsilon(a).$$

所以 $a\in\overline{A} = A$. 故得 A 是完备的.

定义 2. 設一集合 $A\subset U_\varepsilon(a)$, 则 A 叫有界.

有限个有界集的和集仍为有界集. 証明: 設 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 为有界集的和集. 于是由定义 2, 存在一球系 $U_{\varepsilon_1}(a_1), \cdots, U_{\varepsilon_k}(a_k)$, 使 $A_i\subset U_{\varepsilon_i}(a_i)$, $i = 1, 2, \cdots, k$. 可作一球 $U_\gamma(a_1)\supset\bigcup\limits_{i=1}^{k} U_{\varepsilon_i}(a_i)$,

$\left(取\ \gamma = \max\limits_{i=2,3,\cdots,k} \rho(a_1, a_i) + \sum\limits_{i=1}^{k} \varepsilon_i\right)$. 故得

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\varepsilon_i}(a_i) \subset U_\gamma(a_1),$$

所以 $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$ 是一有界集.

定义 3. 設集合 $A \subset R$. 若对任一 $\varepsilon > 0$, 存在有限个点 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_k, 使

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_\varepsilon(a_i),$$

则 A 叫全有界集合.

定理 2.4. 若 A 是全有界集合, 则对任一 $\varepsilon > 0$, 都在 A 内存在有限个点 b_1, b_2, $\cdots$, b_m, 使 $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_\varepsilon(b_i)$.

証. 因 A 是全有界, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 a_1, a_2, $\cdots$, a_m 使

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{\frac{1}{2}\varepsilon}(a_i).$$

取 $b_i \in A \cap U_{\frac{1}{2}\varepsilon}(a_i)$, $i = 1, 2, \cdots, m$. 于是得

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{\frac{1}{2}\varepsilon}(a_i) \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_\varepsilon(b_i).$$

定理 2.5. R 的点集 A 为全有界的一个充要条件是, 对任一 $\varepsilon > 0$, 满足

$$\rho(x, y) \geqslant \varepsilon \quad (x, y \in B, x \neq y)$$

的集合 $B \subset A$ 必为有限集合.

証. 設 A 为全有界, 则对任一 $\varepsilon > 0$, 存在 a_1, a_2, $\cdots$, a_k, 使

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\frac{1}{2}\varepsilon}(a_i).$$

設 $B = \{b_1, \cdots, b_{k+1}\} \in A$, 则在 $U_{\frac{1}{2}\varepsilon}(a_1)$, $\cdots$, $U_{\frac{1}{2}\varepsilon}(a_k)$ 各球中至少有一球含有 B 的两个元, 設 b_μ, b_λ 含在某一 $U_{\frac{1}{2}\varepsilon}(a_i)$ 内, 则得

$$\rho(b_\mu, b_\lambda) \leqslant \rho(b_\mu, a_i) + \rho(a_i, b_\lambda) < \varepsilon.$$