

泛函分析

李文清著



科学出版社

內 容 簡 介

本书分为三篇共十章。第一篇为基础部分，扼要地叙述了距离空间；线性赋范空间等等。第二篇为非线性分析，阐述向量函数及其微积分等等。第三篇为谱论，叙述希尔伯特空间的自共轭运算的谱的分解等等。此外书末有附录部分，由关肇直及林羣两同志合写，系统地叙述了国内解放后在非线性方程的近似解方面的一些成果。

此书可供高等学校专门化课程之用，也可作为大学青年教师及泛函分析工作者参考之用。

泛 函 分 析

李 文 清 著

*

科学出版社出版 (北京朝阳门大街 117 号)

北京市书刊出版业营业登记证字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总经售

*

1960 年 2 月第 一 版

书号：2059 字数：252000

1960 年 3 月第二次印刷

开本：850×1168 1/32

(京) 9,001—13,900

印张：9 1/2

定价：1.40 元

序

数学的发展和其它事物一样，由低級演化到高級。算术所討論的是数的四則运算（+，-，×，÷）。代数进了一步，引入变数及多項式，而多項式是简单的函数。

函数的理論由牛頓-来布尼茲的微积分直到十九世紀的光輝的函数論时代，构成数学史上伟大的遺产。但这一时期的特点，大多討論特殊函数的性质，如茄瑪（Gama）函数，貝塞耳函数，椭圓函数等等。这种研究往往局現于一个函数的特殊的性质。

二十世紀的数学迈进了一步。数学家大多考慮函数类，如連續函数类、解析函数类、有界变差函数类。一个函数类，若具有一收敛的定义，这函数类构成了一函数空間。同一函数类，若其中元列的收敛定义不同，即形成不同的空間。一函数空間如何定义其元的收敛是很重要的一件事。

泛函分析主要内容是研究函数空間（或叫抽象空間）的結構及其变换的科学。目前一般教科书都着重討論綫型运算，但由于非綫型运算的重要性越来越被重視，于是非綫性分析将要成为重要的研究对象。此外由于物理学，特別是量子力学的需要，譜論及特征值問題也被重視起来。全书內容包括三大部分：距离空間及巴那赫空間；非綫性分析和譜論。本书着重的用了“分析”的方法，把实函数、复函数及微分方程的一些定理及方法渗透到泛函数分析里去，而泛函数分析也可以看作上述諸分支的綜合体。

本书曾在 1955—1958 三年間在廈門大学作过教本，并且在同时期举行討論班，丰富了本书的內容。和我共同工作的有林鴻庆、陈孟平和李秋秀同志，他們对我的教学提供过宝贵的意見。中国科学院数学研究所关肇直先生曾耐心地閱讀我的手稿，并作了一些文字上的修改。他和林羣同志写了非綫性方程近似解法作为本

书的附录。这不仅补充了本书的内容，也同时总结了我国数学界关于非线性分析的一些成就。对帮助我的同志們特此致謝。

最后廈門大学数学系的党組織对本門学科給予很大的支持，为了迎接祖国 1959 年的更大的跃进，把这份材料整理写出作为向十周年的国庆献礼。

李文清

1959年2月于廈門

目 录

第一篇 一般理論

第一章 距離空間.....	1
§ 1. 距離空間,开集合与閉集合	1
§ 2. 收斂.....	7
§ 3. 属于第二綱的集.....	13
§ 4. 部分空間,可析空間	18
§ 5. B -集合.....	23
§ 6. 連續映象.....	26
§ 7. B -映象.....	31
§ 8. 巴那赫压缩映象原理.....	36
第二章 線型空間与运算.....	40
§ 1. 代数运算.....	40
§ 2. 線型空間.....	43
§ 3. 線型运算.....	45
§ 4. 線型賦范空間.....	49
§ 5. 有限維空間及子空間.....	51
§ 6. 線型賦范空間的線型运算.....	55
§ 7. 線型运算空間.....	56
§ 8. 逆运算.....	59
§ 9. 線型方程的迭代解法.....	61
第三章 線型泛函.....	65
§ 1. 線型賦范空間的線型泛函.....	65
§ 2. 某些函数空間的線型泛函的一般形式.....	70
§ 3. 共轭空間及共轭运算.....	79
§ 4. 泛函数序列的弱收斂性.....	83
§ 5. 空間元素的弱收斂性.....	85

§ 6. 全連續運算	88
------------	----

第二篇 非線性分析

第四章 向量函數	90
§ 1. 引言	90
§ 2. 連續向量函數	91
§ 3. 向量函數的微分	95
§ 4. 可測函數	99
§ 5. P -積分	102
§ 6. B -積分	104
§ 7. 黎曼-斯梯階積分及有界變差函數	109
第五章 无限維空間函數的积分	118
§ 1. 引言	118
§ 2. 平均值的存在定理	124
§ 3. 平均值 $M(f)$ 与但尼爾 (Daniell) 積分的条件	127
§ 4. 中值定理	129
§ 5. 線型与二次型泛函數	130
§ 6. 維納 (Wiener) 測度及其在 C 空間的积分	132
§ 7. 被积泛函數的变数变换	136
§ 8. 加头积分	139
§ 9. 加头平均值	140
§ 10. 杰逊方法	141
§ 11. 結束語	143
第六章 抽象函數	144
§ 1. 齊式及多項式	144
§ 2. 抽象函數的微分	147
§ 3. 高次微分	153
§ 4. 泛函數的弱微分在变分法上的应用	153
第三篇 譜論	
第七章 希爾伯特空間及線型運算	157
§ 1. 希爾伯特空間	157

§ 2. 可加运算	160
§ 3. 射影, 黎斯定理	160
§ 4. 盖尔芬德定理	163
§ 5. 各态历经定理	164
§ 6. 积空间, 图, 共轭运算	165
§ 7. 闭运算	167
§ 8. 对称运算	168
§ 9. 线型方程的逐次近似解法(弛缓法)	172
§ 10. 保距运算及富利哀变换	173
第八章 谱的分解	178
§ 1. 单位运算的分解	178
§ 2. 正定符号的数列	184
§ 3. 保距运算的谱分解	191
§ 4. 凯来 (Cayley) 变换	194
§ 5. 奈依曼 (Neumann) 的谱分解定理	196
§ 6. 谱分解的例	198
§ 7. 半有界运算	200
第九章 特征值問題	203
§ 1. 谱	203
§ 2. 全連續性, 积分运算子	207
§ 3. 自共轭运算的特征值	208
§ 4. 不变子空间	210
§ 5. 微分运算的特征值	212
§ 6. 无限区间: $q(x) \in L(0, \infty)$	218
§ 7. 二级线型方程的特例	221
第十章 巴那赫空间上的谱論	223
§ 1. 巴那赫-汉恩定理	223
§ 2. 解析向量函数	224
§ 3. 极大值原理	226
§ 4. 许瓦兹辅助定理	227
§ 5. 巴那赫空间谱的概念	227
§ 6. 运算微积	228

§ 7. 譜集.....	232
附录 非綫性函數方程的近似解法(关肇直、林 羣著).....	240
§ 1. 迭代法.....	241
§ 2. 牛頓方法及其各种推广.....	251
§ 3. 最速下降法.....	268
§ 4. 用近似方程代替原方程的方法.....	275
参考文献.....	287

第一篇 一般理論

第一章 距 离 空 間

§ 1. 距 离 空 間, 开集合与閉集合

R 表示一集合, 其元 a, b, \dots 滿足下列三公理, 叫做距离空間. 对任意二元 $a, b \in R$ 对应着一实数 $\rho(a, b)$ 滿足

公理 1. $\rho(a, a) = 0$, 且 $a \neq b$ 时 $\rho(a, b) > 0$;

公理 2. $\rho(a, b) = \rho(b, a)$;

公理 3. $\rho(a, b) + \rho(b, c) \geq \rho(a, c)$.

上列公理 3, 叫做三角形公理. 設 a 是空間 R 的一元 (或称为一点), 則集合 $\{x: \rho(a, x) < \epsilon\}$ 叫做以 a 为心, 以 ϵ 为半径的球, 以 $U_\epsilon(a)$ 表之. 为了表明这球是含在空間 R , 可以用 $U_\epsilon^R(a)$ 表之. 关于距离空間的球有下列简单的性质.

$$U_\epsilon(a) \cap U_\delta(b) = \emptyset, \text{ 当 } \epsilon + \delta \leq \rho(a, b). \quad (1)$$

这个公式的意義是对两个不同的点, 可做两个不相交的球而以該两点为球心.

証. 設 $x \in U_\epsilon(a)$, 則

$$\rho(b, x) = \rho(x, b) \geq \rho(b, a) - \rho(a, x) > (\epsilon + \delta) - \epsilon = \delta;$$

于是我們得到 $x \notin U_\delta(b)$.

$$U_\epsilon(a) \supset U_\delta(b), \text{ 当 } \epsilon - \delta \geq \rho(a, b). \quad (2)$$

証. 設 $x \in U_\delta(b)$, 則

$$\rho(a, x) \leq \rho(a, b) + \rho(b, x) < \epsilon - \delta + \delta = \epsilon;$$

于是得到

$$x \in U_\epsilon(a).$$

公式(2)的几何意义是, 在一球内任一点为心可以作一小球完全落在原来的球内.

$$U_\epsilon(a) \supset U_\delta(b), \text{ 当 } \epsilon \geq \delta. \quad (3)$$

公式(3)表示同心球的关系.

設 Λ 为一由正实数所組成的集合, 則得下式成立:

$$U_\epsilon(a) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda(a), \quad \text{当 } \epsilon = \sup_{\lambda \in \Lambda} \lambda. \quad (4)$$

公式(4)的意义为, 取一切以 λ 为半径的同心球的和集仍为一球, 其半径是一切 λ 的上确界.

証. 由(3)明显的有

$$\begin{aligned} U_\lambda(a) &\subset U_\epsilon(a), \\ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda(a) &\subset U_\epsilon(a). \end{aligned}$$

設 $x \in U_\epsilon(a)$. 按 $\epsilon = \sup_{\lambda \in \Lambda} \lambda$, 因之有 λ 存在使

$$\rho(x, a) < \lambda < \epsilon, \quad \lambda \in \Lambda, \quad x \in U_\lambda(a),$$

而 x 是 $U_\epsilon(a)$ 的任一点, 所以 $U_\epsilon(a) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda(a)$.

定理 1.1. 設 $U_\epsilon(a) \cap U_\delta(b) \ni c$, 則存在一 γ 滿足
 $U_\gamma(c) \subset U_\epsilon(a) \cap U_\delta(b)$.

証. 由假設可知, $\rho(a, c) < \epsilon$, $\rho(b, c) < \delta$. 命

$$\gamma = \min\{\epsilon - \rho(a, c), \delta - \rho(b, c)\},$$

則得

$$\begin{aligned} \epsilon - \gamma &= \epsilon - \min\{\epsilon - \rho(a, c), \delta - \rho(b, c)\} \\ &\geq \epsilon - (\epsilon - \rho(a, c)) = \rho(a, c). \end{aligned}$$

按(2)得

$$U_\gamma(c) \subset U_\epsilon(a).$$

又

$$\begin{aligned} \delta - \gamma &\geq \delta - \min\{\epsilon - \rho(a, c), \delta - \rho(b, c)\} \\ &\geq \rho(b, c); \end{aligned}$$

又按(2)得

$$U_\gamma(c) \subset U_\delta(b).$$

所以

$$U_\gamma(c) \subset U_\delta(b) \cap U_\epsilon(a).$$

定义 1. 开集合: 設 A 为 R 的一集合, 若对一点 $a \in A$, 常有球 $U_\epsilon(a) \subset A$, 則称 A 为开集合. 空集合 \emptyset 規定为开集合. 闭集合: 若集合 A 的余集 A' 是开集合时, A 叫闭集合¹⁾.

由定义 1 可推出, 空集合 \emptyset 亦为闭集. 任一球 $U_\epsilon(a)$ 是一开集.

定理 1.2. 有限个开集 A_1, \dots, A_k 之积仍为开集, 任一开集系²⁾ $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 之和仍为开集.

証. (i) 設 $x \in A \cap B$, A 及 B 是开集. 則 $x \in A$, 由定义知存在一球 $U_{\epsilon_1}(x) \subset A$, 同理存在一球 $U_{\epsilon_2}(x) \subset B$, 取 $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ 得 $U_\epsilon(x) \subset A \cap B$. 按有限归纳法, 得有限个开集之积是开集.

(ii) 若 $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, A_λ 是开集, 則至少有一 λ 使

$$x \in A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

成立. 故存在

$$U_\epsilon(x) \subset A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda;$$

所以

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \text{ 是开集.}$$

定理 1.3. 有限个闭集 A_1, A_2, \dots, A_k 之和集仍为闭集. 任一闭集系 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 的积仍为闭集.

証. 对任一集系 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 下式成立:

$$(i) \quad \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda;$$

$$(ii) \quad \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)' = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda.$$

再应用定理 1.2, 即得定理 1.3.

1) 开集合简称开集, 闭集合简称闭集.

2) 所謂集合系即集合的集合.

定义 2. 点集 A 所含的一切开集合之和集叫 A 的开核, 以 A^0 表之, 又含有 A 的一切闭集合的积叫 A 的闭包, 以 \bar{A} 表之 (\bar{A} 又写做 A^-).

明显的 A^0 是开集, \bar{A} 是闭集.

定理 1.4. 点集合 A 为开集的充要条件是 $A = A^0$, 又 A 为闭集的充要条件是 $A = \bar{A}$.

以下我們討論开核与闭包的一些关系式, 讀者应熟习这些基本公式.

$$A^0 \subset A \subset \bar{A}, \quad (5)$$

$$A^{0'} = A'^-, \quad A'^0 = \bar{A}' . \quad (6)$$

証. (i) $A^{0'} = \left(\bigcup_{A_k \subset A} A_k \right)' \quad (A_k \text{ 是 } A \text{ 内的开集})$

$$= \bigcap_{A'_k \supset A'} A'_k = A'^- \quad (\text{因 } A'_k \text{ 是含有 } A' \text{ 的闭集}).$$

(ii) $\bar{A}' = \left(\bigcap_{A_k \supset A} A_k \right)' \quad (A_k \text{ 是含有 } A \text{ 的闭集})$

$$= \bigcup_{A'_k \subset A'} A'_k = A'^0.$$

$$A^0 = A'^-, \quad A^- = A'^0 \quad (\text{由(6)而得}). \quad (7)$$

$$A'^0 = A^0, \quad \bar{A} = \bar{A}. \quad (8)$$

若 $A \supset B$, 則 $A^0 \supset B^0$, $\bar{A} \supset \bar{B}$ 成立. (9)

$$(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0, \quad \overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}. \quad (10)$$

証. (i) 由 $A \cap B \supset A^0 \cap B^0$, 則 $(A \cap B)^0 \supset (A^0 \cap B^0)^0 \supset (A^0 \cap B^0)$, 又由 $A^0 \supset (A \cap B)^0$ 及 $B^0 \supset (A \cap B)^0$ 得 $A^0 \cap B^0 \supset (A \cap B)^0$. 所以

$$(A \cap B)^0 = (A^0 \cap B^0) \quad (\text{本节計算利用公式(9)}).$$

(ii) 按 $\overline{(A \cup B)} = (A \cup B)^{0'} = (A' \cap B')^{0'}$
 $= (A'^0 \cap B'^0)' = A'^{0'} \cup B'^{0'} = \bar{A} \cup \bar{B}.$

$$\bar{A} \cap B^0 \subset \overline{(A \cap B)} \subset \bar{A} \cap \bar{B}, \quad A^0 \cup B^0 \subset (A \cup B)^0 \subset A^0 \cup \bar{B}. \quad (11)$$

証. (i) 由 $A \subset \bar{A}$, $B \subset \bar{B}$ 可推出 $A \cap B \subset \bar{A} \cap \bar{B}$. 因 $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cap B}$, 故得

$$\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}.$$

(ii) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B') \subset (A \cap B) \cup B'$. 所以

$$\bar{A} \subset (\overline{A \cap B}) \cup B' = (\overline{A \cap B}) \cup B'^\circ = \overline{(A \cap B)} \cup B'^\circ.$$

$$\begin{aligned}\bar{A} \cap B^0 &\subset \{(\overline{A \cap B}) \cap B^0\} \cup (B'^\circ \cap B^0) \\ &= (\overline{A \cap B}) \cap B^0 \subset \overline{A \cap B}.\end{aligned}$$

故得結論

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}.$$

其次取上式各項的余集得

$$(\bar{A} \cap \bar{B})' \subset (\overline{A \cap B})' \subset (\bar{A} \cap B^0)'.$$

$$\bar{A}' \cup \bar{B}' \subset (A \cap B)^0 \subset \bar{A}' \cup B'^0.$$

即得

$$\bar{A}' \cup \bar{B}' \subset (A' \cup B')^0 \subset \bar{A}' \cup B'^0.$$

今以 A' 代 A , B' 代 B 得

$$A'^{-} \cup B'^{-} \subset (A \cup B)^0 \subset A'^{-} \cup B'^0,$$

即得

$$A^0 \cup B^0 \subset (A \cup B)^0 \subset A^0 \cup \bar{B}.$$

$$A^{-0-0} = A^{-0}, \quad A^{0-0-} = A^{0-}. \quad (12)$$

此处用 A^{-0-0} 表示 \bar{A}^0 .

証. (i) 因 $A^{-0-} \supset A^{-0}$, 所以 $A^{-0-0} \supset A^{-0}$. 又因 $A^{-0} \subset A^{-}$, 所以 $A^{-0-0} \subset A^{-0} = A^{-0}$. 故得

$$A^{-0-0} = A^{-0}.$$

(ii) 因 $A^{0-0} \subset A^{0-}$, 所以

$$A^{0-0-} \subset A^{0--} = A^{0-},$$

又因 $A^{0-} \supset A^0$, 所以 $A^{0-0-} \supset A^{00-} = A^{0-}$. 故得

$$A^{0-0-} = A^{0-}.$$

定理 1.5. 設 A 为开集, B 为任一集合, 若 $A \cap B = 0$, 則 $A \cap \bar{B} = 0$.

証。因 $A = A^0$, 故 $\bar{B} \cap A = \bar{B} \cap A^0 \subset (\bar{A} \cap \bar{B}) = \emptyset$.

定义 3. 設 a 为距离空間 R 的一点, 若能取适当小的 $\varepsilon > 0$, 存在一球 $U_\varepsilon(a) \subset A$, 則 a 叫 A 的內点. 又設 $a \in R$, 且任 $\varepsilon > 0$ 都使 $U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$ 时, 則称 a 为 A 的接点.

定理 1.6. A 为任一点集, 則 A^0 是 A 的內点的全体; \bar{A} 是 A 的接点的全体.

証. 設 $x \in A^0$, 因 A^0 是开集, 存在 $U_\varepsilon(x) \subset A^0 \subset A$; 所以 x 是 A 的內点. 同时 A 的任一內点必属于 A^0 . 故知 A^0 是 A 的內点的全体. 又 $U_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$ 与 $U_\varepsilon(a) \cap \bar{A}$ 是等价的. 由此推得对任一 $\varepsilon > 0$, 当 $U_\varepsilon(a) \cap \bar{A} \neq \emptyset$ 时, 則 $U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$, 此时 $a \in \bar{A}$. 設相反 $a \notin \bar{A}$ 时, 則 $a \in \bar{A}'$, 必有 $U_\varepsilon(a) \subset \bar{A}'$, 此时 $U_\varepsilon(a) \cap \bar{A} = \emptyset$, 引起矛盾. 故知 $U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$ 对任一 $\varepsilon > 0$ 成立和 $a \in \bar{A}$ 是等价的.

例. 今举出一些常見的距离空間的例:

(i) 欧氏空間: 設 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 为此空間二点. 其距离定义如下:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

容易驗証在此距离下, 滿足距离空間的公理. 若 $n = 2$. 卽得到欧氏平面, 实际上是我們常用的直角坐标的平面. 在平面上由初等几何知道, 任一三角形的两边的长度之和大于第三边的长度.

(ii) l^2 空間: 在此空間的一点是一个序列, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, 这序列滿足条件

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty.$$

若 $\{x_i\}$ 是实数序列, 用 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$ 代替 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$. 其距离的定义为: 設 $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, $y = (y_1, y_2, y_3, \dots)$

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}.$$

由这个距离的定义看来, 欧氏空间可看 ℓ^2 的特例。因取 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, 0, \dots)$ 时实际上可看做欧氏空间的一点。所不同的是, ℓ^2 的维数是可数无限, 而欧氏空间的维数是 n 。

(iii) (C) 空间: 取一切在 $0 \leq t \leq 1$ 上的连续函数 $x = x(t)$, $y = y(t), \dots$ 形成一空间, 其距离定义为

$$\rho(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|.$$

读者很容易证明在此距离下, (C) 空间满足三个距离公理。但这个空间中的一点是一个函数。因此我们称之为函数空间。泛函分析这门科学主要目的是研究序列空间及函数空间的结构和在此类空间上的变换。

以下再举几个例:

(iv) M 空间: 定义在 $0 \leq t \leq 1$ 的一切真性有界可测函数 $x(t), y(t), \dots$, 其距离定义为

$$\rho(x, y) = \inf_{mE=0} \sup_{t \in [0, 1] - E} |x(t) - y(t)|.$$

(v) m 空间: 有界序列空间。

设 $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$, $y = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots\}$; 其距离的定义为

$$\rho(x, y) = \sup_{1 \leq i < \infty} |\xi_i - \eta_i|.$$

(vi) s 空间: 一切序列空间。

设 $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots)$; 其距离定义为

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|}.$$

§ 2. 收敛

试考虑距离空间 R 中一个点列 a_1, a_2, \dots 。若有 a 使

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \rho(a_i, a) = 0,$$

则谓 a_1, a_2, \dots 收敛于 a , 而 a 叫 $\{a_i\}_{i=1,2,\dots}$ 的极限, 写做

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a.$$

此极限是唯一的。因若有 b 也是 $\{a_i\}$ 的极限, 则

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \rho(a_i, b) = 0;$$

而由于 $\rho(a, b) \leq \rho(a, a_i) + \rho(a_i, b)$ 立即得

$$\rho(a, b) = 0,$$

故极限是唯一的。又当 $\lim_{i, j \rightarrow \infty} \rho(a_i, a_j) = 0$ 时, $\{a_i\}$ 叫本来收敛列。

定理 2.1. 凡有极限的点列都是本来收敛列。
証. 設 $\{a_i\}$ 收敛于 a , 則由下列不等式

$$\rho(a_i, a_j) \leq \rho(a_i, a) + \rho(a, a_j)$$

可推出 $\{a_i\}$ 是本来收敛列。

定义 1. 設 A 是 R 的一点集, 若 A 的任何本来收敛列都有一极限点属于 A , 則称 A 为完备集。若 R 空間是一完备集时, R 叫做完备空間。

定理 2.2. 完备的点集是闭集合。

証. 設 A 是一完备集合, 对于任一点 $x \in \bar{A}$, 由定义有 a_n 存在使

$$a_n \in A \cap U_{\frac{1}{n}}(x), n = 1, 2, \dots$$

这样 $\rho(a_n, x) < \frac{1}{n}$, 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x, x \in A$. 故得 $\bar{A} \subset A$. 因之 $\bar{A} = A$, 而 A 是闭集。

定理 2.3. 若 R 是一完备空間, 則任一 R 内的闭集是完备的。

証. 設 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 为任一 A 的点列, 且設

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

由假設可知对任一 $\epsilon > 0$, 存在一 N 使 $n \geq N$ 时我們有

$$a_n \in U_\epsilon(a).$$

所以 $a \in \bar{A} = A$. 故得 A 是完备的。

定义 2. 設一集合 $A \subset U_\epsilon(a)$, 則 A 叫有界。

有限个有界集的和集仍为有界集。証明: 設 A_1, A_2, \dots, A_k 为有界集的和集。于是由定义 2, 存在一球系 $U_{\epsilon_1}(a_1), \dots, U_{\epsilon_k}(a_k)$,

使 $A_i \subset U_{\epsilon_i}(a_i), i = 1, 2, \dots, k$. 可作一球 $U_r(a_1) \supset \bigcup_{i=1}^k U_{\epsilon_i}(a_i)$,

(取 $\gamma = \max_{i=2,3,\dots,k} \rho(a_1, a_i) + \sum_{i=1}^k \epsilon_i$). 故得

$$\bigcup_{i=1}^k A_i \subset \bigcup_{i=1}^k U_{\epsilon_i}(a_i) \subset U_\gamma(a_1),$$

所以 $\bigcup_{i=1}^k A_i$ 是一有界集.

定义 3. 設集合 $A \subset R$. 若对任一 $\epsilon > 0$, 存在有限个点 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$, 使

$$A \subset \bigcup_{i=1}^k U_\epsilon(a_i),$$

則 A 叫全有界集合.

定理 2.4. 若 A 是全有界集合, 則对任一 $\epsilon > 0$, 都在 A 内存
在有限个点 b_1, b_2, \dots, b_m , 使 $A \subset \bigcup_{i=1}^m U_\epsilon(b_i)$.

証. 因 A 是全有界, 故对任意 $\epsilon > 0$, 存在 a_1, a_2, \dots, a_m 使

$$A \subset \bigcup_{i=1}^m U_{\frac{1}{2}\epsilon}(a_i).$$

取 $b_i \in A \cap U_{\frac{1}{2}\epsilon}(a_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$. 于是得

$$A \subset \bigcup_{i=1}^m U_{\frac{1}{2}\epsilon}(a_i) \subset \bigcup_{i=1}^m U_\epsilon(b_i).$$

定理 2.5. R 的点集 A 为全有界的一个充要条件是, 对任一 $\epsilon > 0$, 满足

$$\rho(x, y) \geq \epsilon \quad (x, y \in B, x \neq y)$$

的集合 $B \subset A$ 必为有限集合.

証. 設 A 为全有界, 則对任一 $\epsilon > 0$, 存在 a_1, a_2, \dots, a_k , 使

$$A \subset \bigcup_{i=1}^k U_{\frac{1}{2}\epsilon}(a_i).$$

設 $B = \{b_1, \dots, b_{k+1}\} \in A$, 則在 $U_{\frac{1}{2}\epsilon}(a_1), \dots, U_{\frac{1}{2}\epsilon}(a_k)$ 各球中至
少有一球含有 B 的两个元, 設 b_μ, b_λ 含在某一 $U_{\frac{1}{2}\epsilon}(a_i)$ 内, 則得

$$\rho(b_\mu, b_\lambda) \leq \rho(b_\mu, a_i) + \rho(a_i, b_\lambda) < \epsilon.$$