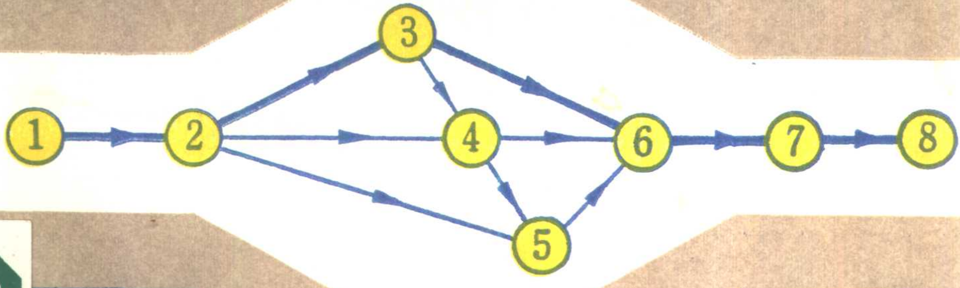
SHI YONG
YUN CHOU XUE

实用
运筹学

魏国华 傅家良 周仲良 编 著



复旦大学出版社

实 用 运 筹 学

魏国华　傅家良　周仲良　编著

复 旦 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书从实用的角度介绍了运筹学中线性规划、整数规划、网络规划、网络计划技术、动态规划、决策方法、对策论、存贮论、排队论、模拟技术等待面的基本概念和方法，特别注意把各种运筹学解法归纳成接近于程序语言的算法步骤，以便于读者在实际中应用。每章结尾都配上了一定数量的习题，部分习题还附有答案。

本书可作为管理、财经、理工科等方面有关专业和训练班的教科书或教学参考书，同时也可供工商企业、财经、管理和行政部门的管理人员和工程技术人员阅读和参考。

实 用 运 筹 学

复旦大学出版社出版

（上海国权路579号）

新华书店上海发行所发行

复旦大学印刷厂印刷

开本850×1168 1/32 印张15.5 字数375,000

1987年2月第1版 1987年2月第1次印刷

印数1—10,000

统一书号：13253·054 定价：3.10元

序

运筹学是用定量化方法为管理决策提供科学依据的一门学科，它把有关的管理系统首先归结成数学模型，然后用数学方法进行定量分析和比较，从而求得系统最优运行的方案，供管理人员和决策人员作参考。

运筹学是最近四十年里成长起来的一门新兴学科．它的许多分支目前还处于发展的阶段．线性规划和网络规划是其中理论和方法都比较成熟、应用又非常广泛的两个分支，因此本书用了较多的篇幅论述了这两个分支的基本内容．

本书试图以各种实际问题为背景，导出各种类型的运筹学模型，然后力求通过对几何特征的分析和其他直观的手段，说明求解方法的基本思想，并在此基础上系统地给出求解的方法．因为本书是为管理、财经、工科等方面有关专业编写的，所以我们尽量避免难度很大的数学论证．但考虑到学习运筹学的多数读者在微积分、线性代数、概率论等方面已具有一些基本的知识，因此本书对运筹学中的基本概念、基本理论、数学运算以及逻辑推理仍给予足够的重视，以便加深读者对有关内容的理解．

鉴于目前电脑已是运筹学应用中不可缺少的工具，本书特别注意把各种运筹学解法归纳成接近于程序语言的算法步骤，使得给出的算法更有实用的价值．为此，我们在论述算法思想时就引进易于化为计算步骤的数学式子和符号，并在计算步骤中采用了算法语言的一些语句的形式．此外，本书还配上了较多的习题供读者练习，部分习题还附有答案．有些章节打上了“*”号，教学时可根据具体情况决定其取舍．

本书在出版前曾印成讲义，并多次为复旦大学统计运筹系、上海铁道学院运输管理系等有关专业和培训班采用作运筹学教材。付印前，俞文鮆教授审阅了全书的手稿，并提出不少宝贵的修改意见，编者在此向他表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限，本书难免有不当之处，还望读者批评指正。

编者　1986年3月于复旦大学

目　录

第一章　线性规划与单纯形法

线性规划是理论和方法都比较成熟、并具有广泛应用的一个运筹学分支。我们从讨论它的数学模型和几何特征着手，说明求解线性规划问题的基本思路，然后引进求解线性规划的单纯形法。

§1.1　数学模型与几何特征

1.1.1　数学模型

在经济建设、企业管理和生产实践等方面的各项活动中，我们常常需要合理分配有限资源，以期获得最大的效益。请看下列几个例子。

[**例 1.1**]（生产计划问题）　某厂生产 A、B 和 C 三种产品，每种产品都需经过三道工序：零件加工、电镀和装配。根据该厂在每道工序上现有的设备和劳动力等生产条件，可以确定各工序每周的生产能力，我们把它折合成有效工时来表示。每件产品在每道工序上所花费的工时，每道工序每周可利用的有效工时以及每件产品的利润情况由下表给出。试问：为使从一周内生产的产品中获得最大的利润，三种产品各应生产多少件？

生产工序	加工每件产品的工时			每周可利用的有效工时
	A	B	C	
零件加工	1.0	1.2	1.4	4800
电　　镀	0.5	0.6	0.6	1800
装　　配	0.7	0.7	0.8	2400
每件利润（元）	12	15	8	

解 设 x_1、x_2 和 x_3 分别表示产品 A、B 和 C 一周内的生产件数。于是一周内获得的利润 f 可写成下列形式：

$$f=12x_1+15x_2+8x_3.$$

我们希望在一定条件下 f 能取得最大值。首先，零件加工不能超过 4800 工时。由于生产 x_1 件产品 A 所需零件加工的工时数为 $1.0x_1$，生产 x_2 件产品 B 所需零件加工的工时数为 $1.2x_2$，生产 x_3 件产品 C 所需零件加工的工时数为 $1.4x_3$，故 x_1、x_2 和 x_3 应满足下列条件：

$$1.0x_1+1.2x_2+1.4x_3\leqslant 4800.$$

类似地，考虑到电镀工序和装配工序的生产条件，x_1、x_2 和 x_3 还应满足下面两个条件：

$$0.5x_1+0.6x_2+0.6x_3\leqslant 1800,$$
$$0.7x_1+0.7x_2+0.8x_3\leqslant 2400.$$

此外，x_1、x_2 和 x_3 显然只能取非负值，故有：

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0,\quad x_3\geqslant 0.$$

于是，问题可以写成下列数学形式：

$$\begin{aligned}&\max f=12x_1+15x_2+8x_3\\ \text{s.t.}\quad &1.0x_1+1.2x_3+1.4x_3\leqslant 4800,\\ &0.5x_1+0.6x_2+0.6x_3\leqslant 1800,\\ &0.7x_1+0.7x_2+0.8x_3\leqslant 2400,\\ &x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0,\quad x_3\geqslant 0,\end{aligned}$$

其中 $\max f=12x_1+15x_2+8x_3$ 表示要求函数 $f=12x_1+15x_2+8x_3$ 达到最大，s.t. 为英文“subject to”(受约束于)的缩写。因此，我们要求在上面所列出的全部条件下，求 x_1、x_2 和 x_3 的一组值，使函数 $f=12x_1+15x_2+8x_3$ 达到最大。

[例 1.2]（运输问题） 现要从两个仓库(发点)运送库存原棉来满足三个纺织厂(收点)的需要。三个纺织厂所需数量和两个仓

库现有库存量，以及每吨原棉从各个仓库运送到各个纺织厂所需的运费见下表. 试问在保证各个纺织厂的需求都得到满足的条件下，应采用哪一种运送原棉的方案，可使总运费达到最小？

运输单价（元/吨） 仓库 i^*	工厂 j^*			
	1^*	2^*	3^*	库存量（吨）
1^*	2	1	3	50
2^*	2	2	4	30
需求量（吨）	40	15	25	

（表中仓库 i^* 是指第 i 个仓库，工厂 j^* 是指第 j 个工厂，以后遇到类似的问题都不再说明）.

解 设 x_{ij} 表示 i^* 仓库运送到 j^* 厂的原棉数量. 于是，总运费 f 为：

$$f=2x_{11}+x_{12}+3x_{13}+2x_{21}+2x_{22}+4x_{23}.$$

我们的目标是在一定条件下使 f 达到最小值. 由于从各仓库运出之原棉数量不能超过它的库存量，故应有：

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}\leqslant 50,$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}\leqslant 30.$$

同时，还应保证各纺织厂所需的原棉都得到满足，故应有：

$$x_{11}+x_{21}=40,$$

$$x_{12}+x_{22}=15,$$

$$x_{13}+x_{23}=25.$$

此外，运送量 x_{ij} 都应取非负值：

$$x_{ij}\geqslant 0,\quad i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3.$$

于是，问题可以写成下列形式：

$$\min f=2x_{11}+x_{12}+3x_{13}+2x_{21}+2x_{22}+4x_{23}$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & x_{11}+x_{12}+x_{13}\leqslant 50, \\
& x_{21}+x_{22}+x_{23}\leqslant 30, \\
& x_{11}+x_{21}=40, \\
& x_{12}+x_{22}=15, \\
& x_{13}+x_{23}=25, \\
& x_{ij}\geqslant 0,\quad i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

可以注意到，两个仓库的库存总量恰等于三个纺织厂的需求总量，即

$$50+30=40+15+25.$$

因此要保证各个纺织厂的需求都得到满足，两个仓库中的库存原棉就需全部运走，于是问题(1.1)中前两个不等式都可以改写成等式.

运输问题一般地可叙述如下：要把 m 个发点的货物运送到 n 个收点去. 已知 $i^{\#}$ 发点有货物 a_i 吨，$j^{\#}$ 收点需要货物 b_j 吨，单位货物从 $i^{\#}$ 发点运送到 $j^{\#}$ 收点的运费为 c_{ij} 元. 那么在保证每个收点对货物的需求条件下，应采用哪一种运输方案才能使总运费最省？

设 x_{ij} 为从 $i^{\#}$ 发点运送到 $j^{\#}$ 收点的货物量，则上述问题可以描述为：

$$
\begin{aligned}
& \min f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant a_i,\quad i=1,\ \cdots,\ m, \\
& \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\quad j=1,\cdots,n, \\
& x_{ij}\geqslant 0,\quad i=1,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ \cdots,\ n.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

特别地，当 m 个发点所具有的货物总量恰等于 n 个收点所需货物的总量$\left(\text{即 } \sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j\right)$时，它又可写成下列形式：

$$\min f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad &\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=1,\cdots,m,\\ &\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\quad j=1,\cdots,n,\\ &x_{ij}\geqslant 0,\ i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n.\end{aligned}\qquad(1.3)$$

[例 1.3]（营养问题） 某养鸡场欲利用 n 种天然饲料来配制一批配合饲料. 要求在这批配合饲料中必须含有 m 种不同的营养成分，并要求 $i^{\#}$ 营养成分的含量不低于 b_i. 已知 $i^{\#}$ 营养成分在每单位 $j^{\#}$ 天然饲料中的含量为 a_{ij}，每单位 $j^{\#}$ 天然饲料的价格为 c_j. 那么，在保证营养的条件下，应采用哪种配方才能使这批配合饲料的费用最小？

解 设 x_j 为 $j^{\#}$ 天然饲料的用量. 那么，$a_{ij}x_j$ 即为所用 $j^{\#}$ 天然饲料中 $i^{\#}$ 营养成分的含量，$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$ 即为在这批配合饲料中 $i^{\#}$ 营养成分的总含量，它不应低于 b_i. 于是，问题就可写成下列数学形式：

$$\min f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad &\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant b_i,\ i=1,\cdots,m,\\ &x_j\geqslant 0,\quad j=1,\cdots,n.\end{aligned}\qquad(1.4)$$

在上述几个例题中，都首先需要确定一组具有明确含意的变量，称之为**决策变量**. 问题的目标是选取这些决策变量的值使一个函数取得最大值或最小值，此函数称为**目标函数**. 我们又利用决策变量把问题的条件表示成等式或不等式，并称这些等式和不等式为**约束条件**. 如果目标函数是决策变量的线性函数，而且约束条件也都是关于决策变量的线性等式或线性不等式，则相应的

数学问题就称为一个**线性规划**问题。显然，上述三例都是线性规划问题。

在解决实际问题时，把问题归结成一个线性规划数学模型是很重要的一步，但往往也是困难的一步。模型建立得是否适当，直接影响到求解。而选择适当的决策变量，是我们建立有效模型的关键之一，希望读者能重视这方面的实践。

1.1.2 标准型和典则型的线性规划

为了研究上的方便，我们将下列形式的线性规划称为**标准型**：

$$
\begin{aligned}
&\min f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s.t.}\quad &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i,\ i=1,\ \cdots,\ m, \qquad \text{(LP)}\\
&x_j\geqslant 0,\ j=1,\ \cdots,\ n.
\end{aligned}
$$

也就是说，以后我们谈及的线性规划的标准型，都是指：对目标函数一律求最小值；决策变量一律为非负变量；约束条件除变量的非负条件外一律为等式约束。今后，记标准型为(LP)。

各种形式的线性规划模型都可化成标准型：

(1) 若问题的目标是求目标函数$z=\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$的最大值，即求：

$$\max z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

那么可令$f=-z$，于是，新问题为在相同的约束条件下求

$$\min f=\sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j.$$

显然，新问题与原问题在实质上是相同的，只是目标函数值相差一个符号而已。

(2) 如果约束条件中具有不等式$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leqslant b_i$，则可引进一个

新变量x'_i，称为**松弛变量**，并用下面两个约束条件取代这个不等式：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x'_i = b_i, \\ x'_i \geqslant 0. \end{cases}$$

(3) 如果约束条件中具有不等式 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i$，则可引进一个新变量 x''_i，称为**剩余变量**，并用下面两个约束条件取代这个不等式：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x''_i = b_i, \\ x''_i \geqslant 0. \end{cases}$$

(4) 如果约束条件中出现 $x_j \geqslant h_j$ $(h_j \neq 0)$，则可引进新变量 y_j，并令 $x_j = y_j + h_j$，将它代入问题的目标函数和约束条件中消去 x_j，于是原来的约束条件 $x_j \geqslant h_j$ 就化成为 $y_j \geqslant 0$。

(5) 如果决策变量 x_j 的符号不受限制（写成 $x_j \gtrless 0$），即

$$x_j > 0, \quad x_j = 0 \quad \text{或} \quad x_j < 0$$

都可以（我们称这种变量 x_j 为**自由变量**），则为了满足标准型关于每个变量非负的要求，可以引进两个新变量 y'_j 和 y''_j，并以 $x_j = y'_j - y''_j$ 代入问题的目标函数和约束条件中消去 x_j，同时在约束条件中添加 $y'_j \geqslant 0$ 和 $y''_j \geqslant 0$ 两个约束条件。

[例 1.4] 把下列线性规划问题化成标准型：

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \\ & x_1 + 7x_2 \geqslant 4, \\ & 2x_1 - x_2 = 3, \\ & x_1 \geqslant 0, \ x_2 \gtrless 0. \end{aligned}$$

解 它共有四处不符合标准型的要求：对目标函数 z 是求最大值；x_2 为自由变量；第一、第二个约束条件为不等式。为此，我们