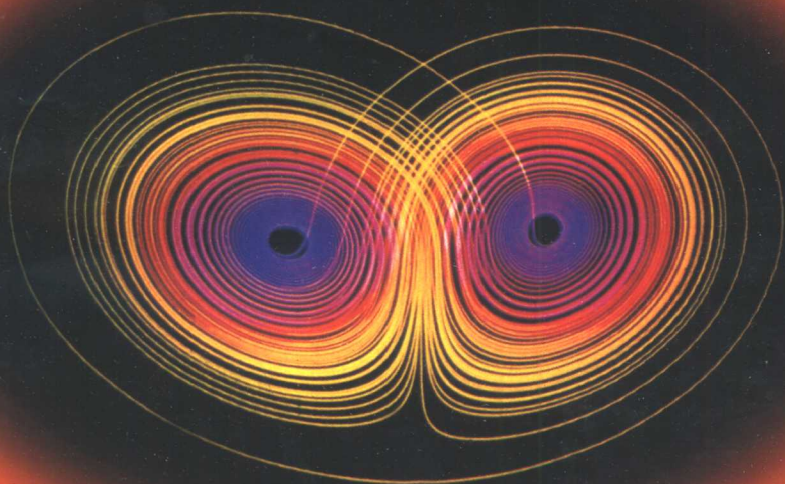


混沌动力学初步

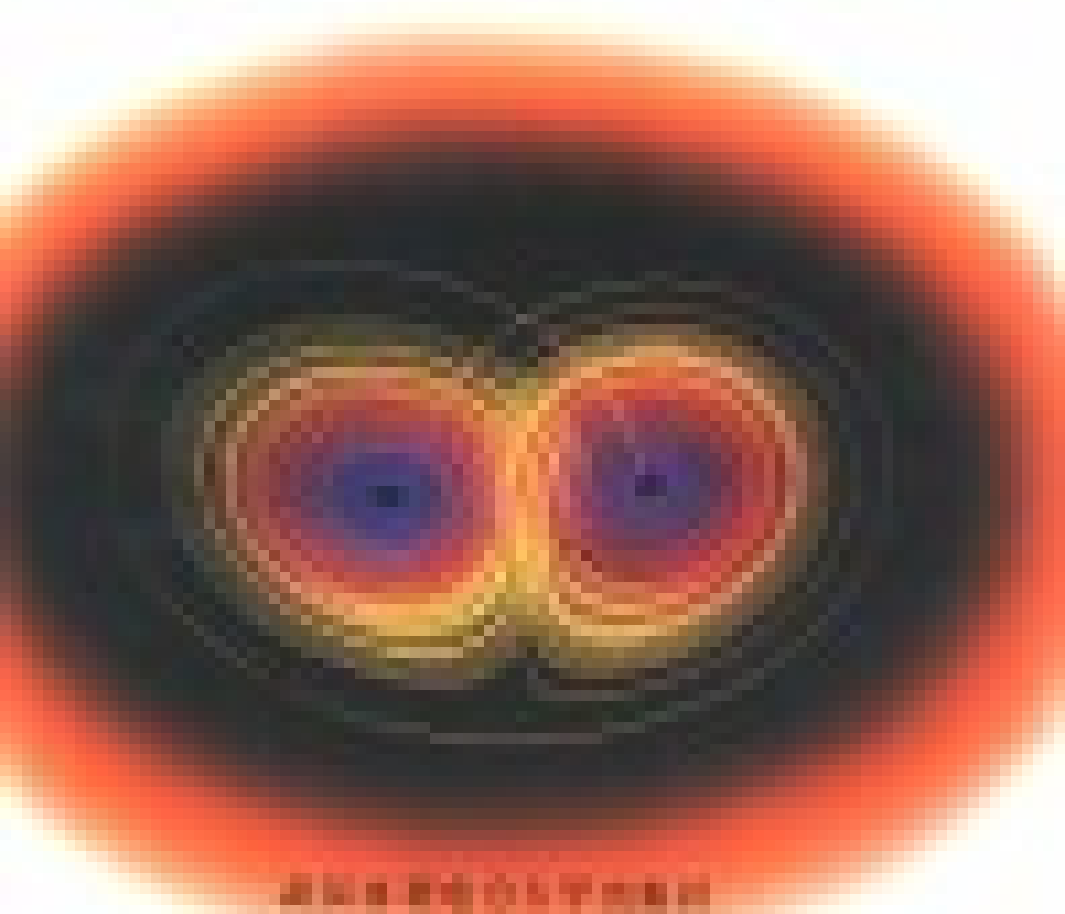
陈士华 陆君安 编著



武汉水利电力大学出版社

混沌动力学初步

周志华 顾德宏 编著



南京邮电大学教材

混沌动力学初步

陈士华 陆君安 编著

武汉水利电力大学出版社

(鄂)新登字 15 号

图书在版编目(CIP)数据

混沌动力学初步/陈士华,陆君安编著. —武汉:武汉水利电力大学出版社,1998.8

ISBN 7-81063-000-8

I.混… II.①陈… ②陆… III.动力学 IV.O313

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 20435 号

责任编辑:李汉保 封面设计:涂 驰

武汉水利电力大学出版社出版发行

(武汉市武昌东湖南路 8 号 邮编 430072)

武汉大学出版社印刷总厂印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:7.875 字数:184 千字

1998 年 8 月第 1 版 1999 年 11 月第 2 次印刷

ISBN 7-81063-000-8/O·1 定价:12.80 元

序

混沌(Chaos)是确定的非线性动力系统中出现的随机现象。由于其在概念上的突破,混沌已成为当前科学的前沿。过去我们只知道确定的系统只有确定的结果,今天我们更知道,确定的系统也可以有不确定性的结果,这是非线性动力系统内在的随机性;过去我们只知道离散的动力系统(迭代)可以收敛到不动点,今天我们更知道,它还会“收敛”到混沌吸引子,若用过去的观点看,这似乎应该叫不收敛。因此混沌概念的提出使我们对自然现象的认识大大提高了一步。

从动力学观点来看,受恢复力作用的单摆运动表现为振荡(周期)的运动形态,地球绕太阳公转的二体问题在万有引力作用下表现为椭圆轨道。但是若在单摆运动中加上强迫振荡变成振动摆,那么运动的形态就可能成为混沌。若运动涉及到三个相互吸引的天体(即所谓三体问题),那么轨道就可以出现非常复杂的混沌轨道。因此混沌的发现丰富了动力系统的理论。

混沌产生的原因归根结底是由于相互联系的事物不是单方面的影响,而是相互影响、相互制约、相互依存的。这种相互作用在动力系统中的作用就是状态变量之间是相互耦合的,那么该动力系统一定是非线性的。

非线性耗散动力系统中形态不断发生变化(局部不稳定),而整体上形态又被限制在有限的空间中(整体稳定),这就必然导致动力系统中含有相差好多量级的大大小小时空尺度,其中很多物理量是随尺度而变化的。我们要寻找该动力系统中随尺度变化而不变的量,这就是所谓标度不变性(Scaling invariance)。分形(Fractal)中的分数维就是这种不变性之一,所以混沌必然和分形相联系。

自从1963年劳伦兹(E.N. Lorenz)从三维自治动力系统中发现混沌以来,它已经对自然界的复杂现象(如湍流、气候、地震、生命、临聚态、经济、生长现象等)的研究起着极大的影响。《混沌动力学初步》一书既包含了动力系统理论中的基础知识,又通过实例介绍了混沌动力学的基本概念。该书取材合理,叙述严谨,具有较高的可读性。原国家教委工科研究生数学课程指导小组对该书作了较高的评价。我相信该书的出版必将对应用数学、力学、物理学等专业的学生和研究生去了解混沌的本质起到入门指导的作用。

北京大学教授、博士生导师

刘式达

1998年5月4日北大100年校庆

前 言

自 1975 年,“混沌”(Chaos)作为一个新的科学名词出现在文献中以来,混沌动力学已迅速发展成为一个内容极其丰富、应用极其广泛的研究领域,混沌动力学的许多概念和方法逐步应用到自然科学、工程技术和社会科学的许多领域之中,并对于开阔和深化人们对自然界的认识起着越来越重要的作用,因而原国家教委工科研究生数学课程指导小组明确指出,在工科研究生中应开设动力系统课程,讲授混沌动力学中的基本知识和方法。

我校自 1995 年以来就为工科研究生开设了有关混沌动力学知识的讲座,作者在主持这个讲座的过程中,深感一本真正适合工科研究生使用的混沌动力学教材的重要和难得,因此,我们在原讲座使用讲义的基础上,根据原国家教委工科研究生数学课程指导小组所规定的动力系统课程基本内容进行整理,编写了这本《混沌动力学初步》,并经过原国家教委工科研究生数学

课程指导小组的评审和修改,作为工科研究生的教材出版。

全书共分六章。第一章对本书所用到的一些数学知识作了简单的叙述。第二章主要对离散动力系统中周期点、沙可夫斯基定理、稳定性、吸引子等内容进行了介绍。分析了双曲不动点附近的轨线结构,特别是介绍了双曲鞍点的稳定流形与不稳定流形,以一个具体例子说明了拓扑共轭的概念及其作用,并且讨论了符号动力系统 (Σ_2, σ) 以及它的重要性质。第三章引入了混沌的概念,通过对虫口模型的分支、混沌以及 Hénon 映射的奇怪吸引子、同宿轨等的分析,深化混沌的概念,介绍动力系统通向混沌的各种途径,最后对奇怪吸引子的重要特征量:李雅谱诺夫指数、分数维等进行了介绍。对时间序列的重构相空间等方法也作了深入的阐述。第四、五两章主要是供没有学过常微分方程的读者选用的。此部分主要叙述了 $\mathbf{R}^n$ 中微分方程组的解的存在唯一性,解的延拓,解对初值和参数的连续依赖和可微性定理,并对 $\mathbf{R}^n$ 中常微线性系统的基解矩阵,常数变易法以及常系数线性微分方程组的解法作了简要的介绍。引入了 Lyapunov 稳定性概念,介绍了一次近似稳定性理论以及 Lyapunov 第二方法,举例说明了 Lyapunov 函数的几种构造方法,并对一类非自治系统——周期线性系统的稳定性作了介绍。第六章主要介绍由常微自治系统所定义的动力系统,分析了其轨道的各种发展趋势。对平面上奇点作了较完整的分析,介绍了自治系统的稳定流形,不稳定流形,中心流形及其定理。对平面自治系统闭轨的存在性,稳定性定理作了介绍。分析了几种常见的分支现象。举例说明了 Mélnikov 方法及其应用,并对自治系统产生混沌的条件进行了讨论,最后对 Lorenz 方程的静态分支, Hopf 分支,同宿轨分支以及奇怪吸引子进行了分析。

我们在编写过程中,不片面地追求内容上的面面俱到,而是

着重介绍混沌动力学中最基本、最引人入胜的混沌、分支、分形等内容,试图使读者通过学习一本篇幅不大的教材,便能了解和掌握混沌动力学的主要内容和处理实际问题的方法。同时,始终注意从工科研究生的实际出发,对基本概念、理论和方法的叙述和介绍力求深入浅出,清晰直观,对某些复杂的纯数学定理,既不追求其证明细节,又不失理论上的严谨。此外,我们特别注重该书的实用性,对实际应用中大量使用的混沌动力学方法作了详细的介绍,并配有丰富的实例、插图和练习。但由于作者水平有限,书中谬误在所难免,恳请读者不吝指正。

本书的完成得到了各方面的大力支持,在此一并致谢。作者特别要感谢原国家教委工科研究生数学课程指导小组的专家和武汉大学博士生导师曾宪武教授,他们仔细审阅了书稿,所提出的许多修改意见为本书增色不少;作者还要感谢武汉水利电力大学研究生部、“211工程”办公室,他们在本书的编写和出版过程中自始至终提供了支持和资助;感谢武汉水利电力大学出版社的编辑和工作人员,他们为本书的出版付出了艰辛的劳动。

作者于武汉水利电力大学
1998年元月

目 录

序

前言

第 1 章	引言	1
§ 1	动力系统及其实例	1
§ 2	预备知识	5
2.1	度量空间	6
2.2	$\mathbf{R}^n$ 的映射	7
2.3	隐函数定理	11
练习一		12
第 2 章	离散动力系统初步	14
§ 1	周期轨与沙可夫斯基定理	16
§ 2	周期点的稳定性	18
§ 3	双曲不动点的稳定流形与不稳定流形	23
§ 4	不变集与吸引子	28
§ 5	拓扑共轭与符号动力系统	29
练习二		34
第 3 章	混沌	37
§ 1	混沌的概念	38
§ 2	虫口模型中的混沌	43
2.1	$0 < \lambda \leq 1$ 的情形	43
2.2	$1 < \lambda < 3$ 的情形	43

2.3	$\lambda = 3$ 到 $\lambda = 4$ 的过渡	46
2.4	$\lambda > 4$ 的情形	57
§ 3	Hénon 映射	62
3.1	奇怪吸引子	62
3.2	周期吸引子	69
3.3	同宿点和马蹄	70
§ 4	吸引子的特征	76
4.1	李雅谱诺夫指数	76
4.2	分形	81
4.3	柯尔莫哥罗夫熵	92
§ 5	时间序列的重构相空间	95
5.1	时间序列的重构相空间	95
5.2	关联维数	96
5.3	时间序列的 Lyapunov 指数	97
5.4	时间序列的确定性检验	99
5.5	时间序列的预测	101
	练习三	107
第 4 章	常微分方程基本理论	110
§ 1	$\mathbf{R}^n$ 中的常微分方程	110
§ 2	$\mathbf{R}^n$ 中常微分方程的解	113
§ 3	$\mathbf{R}^n$ 中微分方程解的性质	117
§ 4	$\mathbf{R}^n$ 中的线性微分方程组	119
4.1	齐次线性微分方程组的通解	120
4.2	非齐次线性微分方程组的解	124
§ 5	$\mathbf{R}^n$ 中常系数线性微分方程组	126
5.1	矩阵指数 $\exp A$ 的定义和性质	126
5.2	基解矩阵的求法	127

练习四	133
第 5 章 微分方程的稳定性	136
§ 1 稳定性的概念	136
1.1 稳定性的各种定义	139
1.2 稳定性的几何解释	143
§ 2 自治微分方程的稳定性	145
2.1 常系数线性齐次微分方程组的稳定性	145
2.2 按一次近似判断稳定性	147
2.3 李雅谱诺夫第二方法	151
§ 3 李雅谱诺夫函数构造举例	157
3.1 常系数线性系统的李雅谱诺夫函数	157
3.2 类比法	159
3.3 能量函数法	162
3.4 变量分离法	163
3.5 变梯度法	164
§ 4 周期系数的线性方程	167
练习五	171
第 6 章 常微分方程动力系统	175
§ 1 自治微分方程所定义的动力系统	176
1.1 流	176
1.2 轨线的极限状态	178
§ 2 奇点	180
2.1 平面线性系统的奇点	180
2.2 平面非线性系统的双曲奇点	188
2.3 中心流形定理	193
§ 3 极限环	197
3.1 极限环的稳定性	198

3.2	Poincaré 映射	201
3.3	闭轨的存在性	202
§ 4	分支与结构稳定性	206
4.1	几种典型的静态分支	208
4.2	动态分支	211
§ 5	同宿轨与 Mélnikov 方法	216
§ 6	微分方程动力系统的混沌	222
§ 7	Lorenz 方程	226
7.1	静态分支	227
7.2	Hopf 分支	229
7.3	参量改变对系统动态的影响	230
7.4	奇异不变集合	232
练习六		234
参考文献		239

第 1 章 引 言

§ 1 动力系统及其实例

我们常常将一些相互联系（或相互作用）的客体组成的集合称为一个系统。这些客体，既可以是自然科学中的一些物质，如气体、液体、固体、化合物、生物的各部分或其整体，也可以是各种社会事物和组织，如各种群体或财政经济结构以及生产力和知识等较抽象的事物。系统的性质或特征可以由一些所谓的状态变量所表征，如粒子的坐标和动量、化合物的浓度和人口密度等等。一个系统如果其历史和未来完全由某一指定时刻的状态（称为初态）所确定，则称之为确定性系统。动力系统就是要研究一个确定性系统的状态变量随时间变化的规律。确定性系统的变化规律有着丰富的刻画方式，既可以是状

态变量的微分方程、积分方程，也可以是状态变量的差分方程。这些方程既可以是线性的，也可以是非线性的，但实际问题中大多数是非线性的。

例1（捕食者与被捕食者模型）著名的意大利数学家沃特拉(V. Volterra)曾对软骨鱼及其食物进行研究。他将所有的鱼分为食用鱼和掠肉鱼两大类,设在时刻 t 时前者总数为 $N_1(t)$,后者总数为 $N_2(t)$ 。他认为食用鱼本身对食物的竞争并不强烈,因为食物丰富,这样,如果不存在掠肉鱼,食用鱼的生长应遵循马尔萨斯生物总数增长定律: $\frac{dN_1(t)}{dt} = aN_1(t)$, 其中 a 是正常数。其次,沃特拉认为,单位时间内掠肉鱼和食用鱼相遇次数与 $N_1(t)N_2(t)$ 成正比,因此, $\frac{dN_1(t)}{dt} = aN_1(t) - bN_1(t)N_2(t)$, 其中 $b > 0$ 。类似地,沃特拉认为掠肉鱼的自然减少率同它们存在的数目 $N_2(t)$ 成正比,而自然增长率同单位时间内掠肉鱼和食用鱼相遇的次数成正比,于是

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = aN_1(t) - bN_1(t)N_2(t) \\ \frac{dN_2(t)}{dt} = -cN_2(t) + dN_1(t)N_2(t) \end{cases}$$

其中 c, d 为正常数。这是一个动力系统,它刻划了捕食者和被捕食者的发展规律,被称为捕食者和被捕食者模型。

上例中,被刻划的现象,其时间是连续变化的,通常称为连续动力系统。

例2 我们讨论一个简单的生态学问题:构造一种昆虫变化的数学模型。假定有一种昆虫,每年夏季成虫产卵后冬季全部死亡,第二年春天每个虫卵孵化成一只虫子。设第 n 年的虫口数目为 x_n ,每只成虫平均产卵 a 个,这样的过程年复一年地重复

下去,一般规律可以写为

$$x_n = ax_{n-1}$$

容易看出,若 x_0 表示最初年度的虫口数目,则

$$x_n = x_0 a^n$$

从而 $a > 1$ 时,虫口数目就会按指数上升,用不了许多年,整个地球就要“虫满为患”;相反,如果 $0 < a < 1$,则这种昆虫就会在若干年内灭绝,成为物竞天择的失败者。但这是一个简化模型(称为“虫口”模型)。为了把这个模型修正得更符合实际,我们必须考虑到昆虫在走向“虫满为患”的过程中的情况。显见,由于食物和空间有限,虫子会为争夺生存条件而相互咬斗,而且虫子数目多了,传染病会因为接触增加而蔓延,这都会造成虫子的减员。注意到咬斗和接触都是发生在两只虫子之间的事件,而 x_n 只虫子配对的事件总数是 $\frac{1}{2}x_n(x_n - 1)$,当 x_n 很大时,基本上是 $\frac{1}{2}x_n^2$ 。因此,修正后的虫口模型为

$$x_{n+1} = ax_n - bx_n^2,$$

适当地重新定义一下变量和参量,可将上面的式子写为常见的形式

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) \quad (\lambda > 0)$$

在这个模型(也称为 Logistic 模型)中,只是刻划了第一年,第二年,……,第 n 年虫口的变化规律,并没有刻划任一时刻的虫口规律,像这种只是刻划间断时间变化规律的系统,通常称为离散动力系统。

例 3 迄今为止,Newton 法仍是求解非线性方程(组)的有效算法。现考虑单变量的非线性方程 $f(x) = 0$,求其实根的 Newton 算法可写为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

由此可知,Newton法确定了一个离散动力系统,这也是实际应用中经常出现的。

离散动力系统的研究是非常重要的,一旦掌握了离散动力系统的基本性态,连续动力系统也就容易理解了。特别是离散动力系统与连续动力系统有着十分密切的联系。设一个确定性系统所有可能的状态集合为 M (物理上将此称为相空间),给出初态 $x_0 \in M$ 之后,系统在时刻 t 的状态 x_t 就被 x_0 和 t 所决定了。因而有

$$x_t = F(t, x_0)$$

其中 $x_0 \in M, x_t \in M, t \in (-\infty, +\infty)$, 即 x_t 是 x_0 和 t 的函数。取 $t = 1$, 记 $f(x) = F(1, x)$, 如果

$$F(t_1 + t_2, x_0) = F(t_2, F(t_1, x_0))$$

则有 $x_1 = f(x_0), x_2 = f(f(x_0)) = f(x_1)$, 一般地有

$$x_n = f(f(\cdots f(x_0)\cdots)) = f(x_{n-1})$$

由此可见,通过对 $x_n = f(x_{n-1})$ 的研究,可以提供系统在将来一串离散时刻状态变量的变化规律,当 $f(x)$ 可逆时,通过 $f(x)$ 的逆映射,可以追溯系统的历史。

从这一观点看,离散动力系统可以看作是某一依赖时间连续变化的确定性系统对时间的离散取样。这也大概是称为离散动力系统的另一含意。一般地将

$$x_n = f(x_{n-1})$$

称为是由 $f(x)$ 所决定的离散动力系统,当 $f(x)$ 不可逆时,为了强调只能刻划未来而不能追溯历史则称为离散半动力系统。

许多动力系统可以非常直观地理解和分析,不须求助于数学以及动力系统本身的理论。用一台计算器输入任何数,然后反