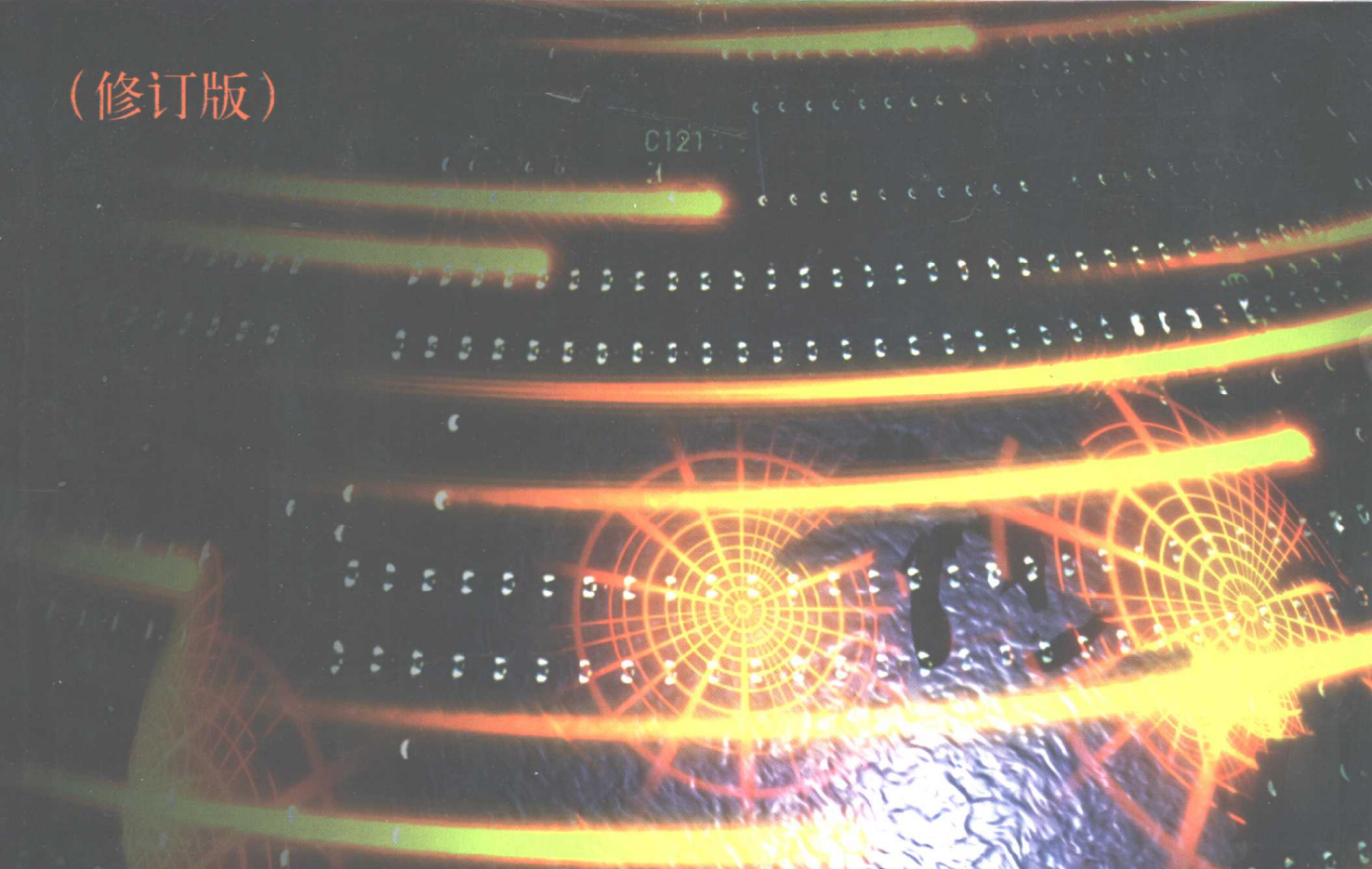


(修订版)



数字信号处理的 原理与实现

© 吴镇扬/编著

东南大学出版社

内 容 提 要

本书介绍了数字信号处理的基本原理和实现方法,内容包括:离散时间信号与系统;离散变换及其快速算法;数字滤波器设计;数字信号处理系统的实现;多采样率信号处理与离散小波变换等。

本书的特点是尽量压缩了与《信号与系统》课程重复的内容;介绍了数字信号处理硬件方面的知识;在多采样信号处理方面,具体讨论了过采样技术的原理与应用,并由正交镜像滤波器组引入了小波(Wavelet)变换的概念。书中配有较丰富的例题和习题,主要章节均配有实验指导书。

读者对象:高校电子信息与通信类专业本科生,也可供自动化、生物医学工程及机械专业的师生以及有关科技人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理的原理与实现/吴镇扬编著. —修订版.

南京:东南大学出版社, 2001. 11

ISBN 7-81050-300-6

I. 数... II. 吴... III. 数字信号—信号处理
IV. TN911. 72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 072265 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人: 宋增民

江苏省新华书店经销 如东县印刷厂印刷

开本: 787mm×1092mm 1/16 印张: 13.25 字数: 328 千字

2002 年 1 月第 2 版 2002 年 1 月第 5 次印刷

印数: 6101-9100 定价: 19.50 元

(凡因印装质量问题,可直接向承印厂调换)

修订版前言

本书是“数字信号处理的原理与实现”教材的第二版。在本教材第一版出版后,东南大学无线电工程系的三届本科生使用了本教材,另外,还使用第一版教材为全校硕士研究生开设了选修课程以及为一些研究单位开设了培训班。在使用中我们体会到“数字信号处理”是一门介于专业基础课程和专业课程之间的课程,教学中既应强调其基础理论知识,又应强调其应用背景,两者应当比较好地结合起来,特别是介绍新技术时,应当侧重于它的原理分析,不能变成文本或标准的缩写。学生在学习这门课程时还应掌握一些必要的软件工具,这既有利于加强概念的理解,又是今后进一步学习和研究所不可缺少的重要一步。近年来,高等教育取得了飞速的发展,特别是国家急需信息技术方面的人才,不少学校新设立了信息工程专业,该教材的出版受到了不少兄弟院校的欢迎,发行量也出乎我们的意料,已达六千多册,2000年该教材又获得了江苏省优秀教材二等奖,这对我们是极大的鞭策与鼓励。在使用中读者也提出了许多宝贵的意见和要求,作者根据各方面的意见和自己的教学体会完成了修订工作。与第一版相比主要有以下几点变化:

(1) 根据不少学校的要求,我们将实验指导书附在相关章节的后面,并以附录的形式简单地介绍了 MATLAB 这一软件的使用方法;

(2) 在第 2 章中补充了数字谱分析的一些重要概念;

(3) 在数字信号处理硬件方面,删除了一些陈旧的内容,补充了这方面的最新知识,以利学生拓宽视野,并将这部分内容并入第 5 章“数字信号处理系统的实现”;

(4) 在多采样信号处理方面,增补了关于过采样技术一节,比较详细地分析了过采样技术的原理;

(5) 对已发现的错漏之处进行了订正,统一规范了一些专用名词。

在修订过程中除得到第一版参与的老师及有关人员的指导与帮助外,还得到两位从事这门课程教学的方世良教授和毛卫宁副教授的热情帮助,两位博士研究生刘海滨和彭岳星帮助绘制了部分图稿,在此表示诚挚的谢意。

由于作者水平所限,书中难免还存在一些缺点和错误,殷切希望广大读者批评指正。作者的电子邮件地址是:zhenyang@seu.edu.cn

作者

2001 年 7 月

第一版前言

本书是为信息工程类专业编写的教材。由于计算机技术的发展,“数字信号处理”这门课程越来越受到有关专业师生的重视。与此同时,有关的一些课程体系结构已发生了较大的变化,例如,“信号与系统”课程中的离散信号与系统的比重已大大增加;一些新的课程已从“数字信号处理”中派生出来,有必要对原有的“数字信号处理”课程的教学内容作一些调整和补充。本书即基于上述构思,在原有讲义的基础上经修改编写而成。内容共分七章。第1章离散时间信号与系统以及第2章中的离散傅里叶变换(DFT)部分,在“信号与系统”课程中已有详细的介绍,这里仅作扼要介绍。第2章着重讨论快速傅里叶变换及其应用的有关内容。第3、4、5章讨论数字滤波器设计和数字信号处理系统实现中的一些具体问题,第6章介绍了数字信号处理硬件实现中的有关知识。第7章内容涉及到近年来发展起来的多采样率信号处理,并由此引入了当前的研究热点——小波(Wavelet)变换。

本课程的教学参考时数约为50学时。书中一些标有“*”号的章节,其内容或是为了补充学生知识的不足,或是为了拓宽学生的知识面,教师可根据具体情况作出选择。在讲授本课程中应多做练习题,并安排一定内容的上机练习。本书另有实验指导书一套,便于巩固教学效果。

作者在本书写作过程中,得到了东南大学无线电工程系许多老师的关心和支持,系副主任邹家驊老师审阅了原讲义的初稿,他们对本书的写作提出了宝贵意见;特别在本书完稿以后,又得到东南大学尤肖虎教授与南京邮电学院郑宝玉教授的指导,郑宝玉教授审阅了全部书稿,他们提出了一些修改意见;研究生王卫斌、翁涛帮助校对了原有讲义;本书还得到了江苏省自然科学基金的部分资助,作者在此表示深切的谢意。

由于编写时间仓促,加之作者水平有限,书中难免有不妥之处,恳请读者批评指正。

编 者

1997年2月

目 录

绪 论	(1)
1 离散时间信号与系统	(4)
1.1 离散时间信号	(4)
1.2 采样	(5)
1.3 离散时间系统	(8)
1.3.1 线性系统	(9)
1.3.2 时不变系统	(9)
1.3.3 线性时不变系统	(9)
1.3.4 系统的稳定性与因果性	(10)
1.3.5 系统的差分方程描述	(11)
1.4 离散时间信号的傅氏变换(DTFT)与 z 变换	(12)
1.4.1 离散时间信号的傅氏变换(DTFT)	(12)
1.4.2 z 变换	(13)
1.4.3 逆 z 变换	(15)
1.4.4 z 变换的性质	(15)
1.4.5 z 变换与 DTFT 的关系	(16)
1.4.6 Parseval 定理	(16)
1.5 系统函数	(17)
习题	(20)
实验一 熟悉 MATLAB 环境	(23)
附录 MATLAB 简介	(24)
2 离散变换及其快速算法	(29)
2.1 离散傅里叶变换(DFT)	(29)
2.1.1 离散傅里叶级数(DFS)	(29)
2.1.2 离散傅里叶变换(DFT)	(32)
2.2 快速傅里叶变换(FFT)	(40)
2.2.1 按时间抽取的 FFT	(41)
2.2.2 按频率抽取的 FFT	(45)
2.2.3 N 为组合数的 FFT	(48)
2.2.4 Chirp- z 变换	(52)
2.3 关于 FFT 应用中的几个问题	(54)
2.3.1 用 FFT 计算 IDFT	(54)
2.3.2 实数序列的 FFT	(55)

2.3.3	用 FFT 计算相关函数	(56)
2.3.4	线性卷积的 FFT 算法	(57)
2.3.5	利用 FFT 计算连续信号的频谱	(60)
2.3.6	用 FFT 计算二维离散傅里叶变换	(61)
* 2.4	离散余弦变换(DCT)	(62)
2.4.1	离散余弦变换的定义	(62)
2.4.2	快速余弦变换(FCT)	(64)
	习题	(66)
	实验二 快速变换及其应用	(70)
3	无限长单位脉冲响应(IIR)滤波器的设计方法	(73)
3.1	根据模拟滤波器来设计 IIR 滤波器	(73)
3.1.1	脉冲响应不变法	(74)
3.1.2	双线性变换法	(77)
* 3.2	常用模拟低通滤波器特性	(78)
3.2.1	巴特沃兹(Butterworth)滤波器	(79)
3.2.2	切比雪夫(Chebyshev)滤波器	(80)
3.2.3	椭圆滤波器	(82)
3.3	从模拟滤波器低通原型到各种数字滤波器的频率变换	(83)
3.3.1	低通变换	(83)
3.3.2	高通变换	(85)
3.3.3	带通变换	(86)
3.3.4	带阻变换	(88)
3.4	从低通数字滤波器到各种数字滤波器的频率变换	(89)
3.4.1	数字低通——数字低通	(90)
3.4.2	数字低通——数字高通	(90)
3.4.3	数字低通——数字带通	(91)
3.4.4	数字低通——数字带阻	(91)
	习题	(92)
	实验三 IIR 数字滤波器的设计	(94)
4	有限长单位脉冲响应(FIR)滤波器的设计方法	(96)
4.1	线性相位 FIR 滤波器的特点	(96)
4.1.1	线性相位的条件	(96)
4.1.2	幅度特性	(97)
4.1.3	零点特性	(100)
4.2	窗口设计法	(103)
4.3	频率采样设计法	(111)
4.4	FIR 滤波器的最优化设计	(115)
4.4.1	非线性最优法	(115)

4.4.2	插值解法	(117)
4.4.3	雷米兹(Remez)交替算法	(117)
4.5	IIR 与 FIR 数字滤波器的比较	(119)
	习题	(119)
	实验四 FIR 数字滤波器的设计	(122)
5	数字信号处理系统的实现	(124)
5.1	数字滤波器的结构	(124)
5.1.1	数字网络的信号流图表示	(124)
5.1.2	IIR 滤波器的结构	(126)
5.1.3	FIR 滤波器的结构	(130)
5.2	量化与量化误差	(135)
5.2.1	二进制数的表示	(135)
5.2.2	定点制的量化误差	(136)
5.2.3	A/D 变换的量化效应	(138)
5.2.4	量化噪声通过线性系统	(140)
5.3	有限字长运算对数字滤波器的影响	(142)
5.3.1	IIR 滤波器的有限字长效应	(142)
5.3.2	FIR 滤波器的有限字长效应	(145)
5.4	系数量化对数字滤波器的影响	(146)
5.4.1	极点位置灵敏度	(147)
5.4.2	频率响应偏差的分析	(149)
5.5	极限环振荡	(152)
5.5.1	零输入极限环振荡	(152)
5.5.2	大信号极限环振荡	(154)
5.6	数字信号处理硬件	(157)
5.6.1	数字信号处理器的发展概况	(157)
5.6.2	DSP 的特点	(159)
5.6.3	TMS320 系列数字信号处理器	(160)
5.6.4	TMS320C25 的结构原理	(163)
5.6.5	TMS320C25 的指令系统与软件设计	(166)
5.6.6	TMS320C5000 的结构原理	(168)
5.6.7	TMS320C54x 系列 DSP 的开发环境	(171)
	习题	(174)
6	多采样率信号处理与离散小波(Wavelet)变换	(179)
6.1	采样率降低——整数 M 倍抽取	(179)
6.2	采样率提高——整数 L 倍内插	(181)
6.3	过采样技术	(184)
6.4	正交镜像滤波器组(QMF)	(188)

6.4.1 数字滤波器组的一般概念和定义	(188)
6.4.2 正交镜像滤波器组(QMF)	(188)
6.4.3 QMF 滤波器组的 FIR 滤波器设计	(190)
6.5 树状结构滤波器组	(192)
6.5.1 倍频程分隔的分析滤波器组	(192)
6.5.2 倍频程分隔的综合滤波器组	(193)
* 6.6 离散小波(Wavelet)变换	(194)
6.6.1 多分辨率分析	(194)
6.6.2 二进小波	(195)
* 6.7 小波变换与滤波器组	(196)
6.7.1 利用分析滤波器组计算离散小波变换	(196)
6.7.2 利用综合滤波器组计算逆离散小波变换	(197)
习题	(199)
参考文献	(201)

绪 论

尽管数字信号处理的历史可以追溯到一二百年以前,但是,直至 20 世纪 60 年代中期,由于快速傅里叶变换(FFT)算法的提出和数字计算机的大量使用,这门学科才真正得以发展。近几年来,由于超大规模集成电路的出现,数字信号处理在理论和应用方面又有了惊人的发展,在越来越多的应用领域中迅速替代传统的模拟信号处理方法,并且还开辟出许多新的应用领域。今天,我们可以说,数字信号处理随处可见,我们每天均会接触到各种数字信号处理系统,从 CD 唱盘机、PC 机中的声卡到数字化影像、数码照相机,甚至手持电话等等。数字信号处理已不再是一个陌生的名词,每一个迈入电子信息领域的大学生或工程技术人员均急切地希望对数字信号处理有更多的了解。

数字信号处理是用数字或符号的序列来表示信号,通过数字计算机去处理这些序列,提取其中的有用信息。例如,对信号的滤波,增强信号的有效分量,削弱无用分量;或是估计信号的某些特征参数等。总之,凡是用数字方式对信号进行滤波、变换、增强、压缩、估计和识别等都是数字信号处理的研究对象。

数字信号处理采用数字系统完成信号处理的任务,它具有数字系统的一些共同优点,例如抗干扰、可靠性强,便于大规模集成等。除此而外,与传统的模拟信号处理方法相比较,它还具有以下一些明显的优点:

(1)精度高。在模拟系统的电路中,元器件精度要达到 10^{-3} 以上已经不容易了,而数字系统 17 位字长可以达到 10^{-5} 的精度,这是很平常的。例如,基于离散傅里叶变换的数字式频谱分析仪,其幅值精度和频率分辨率均远远高于模拟频谱分析仪。

(2)灵活性强。数字信号处理采用了专用或通用的数字系统,其性能取决于运算程序和乘法器的各系数,这些均存储在数字系统中,只要改变运算程序或系数,即可改变系统的特性参数,比改变模拟系统方便得多。

(3)可以实现模拟系统很难达到的指标或特性。例如,数字信号处理中的有限长单位脉冲响应数字滤波器可以实现严格的线性相位;在数字信号处理中可以将信号存储起来,用延迟的方法实现非因果系统,从而提高了系统的性能指标;数据压缩方法可以大大地减少信息传输中的信道容量。

(4)可以实现多维信号处理。利用庞大的存储单元,可以存储二维的图像信号或多维的阵列信号,实现二维或多维的滤波及谱分析等。

一方面,超大规模集成电路使得数字部件成本降低、尺寸缩小、计算速度加快。另一方面,数字信号处理在理论上和方法上均向更深的层次发展,这使得数字信号处理的应用领域不断扩大。其表现为:①由简单的运算走向复杂的运算,目前几十位乘几十位的全并行乘法器可以在数个纳秒的时间内完成一次浮点乘法运算,这无论在运算速度上和运算精度上均为复杂的数字信号处理算法提供了先决条件;②由低频走向高频,模数转换器的采样频率已高达数百兆赫,可以将视频甚至更高频率的信号数字化后送入计算机处理;③由一维走向多维,像高分辨率彩色电视、雷达、石油勘探等多维信号处理的应用领域已与数字信号处理结

下了不解之缘。1978年 A. V. Oppenheim 在他主编的《数字信号处理的应用》一书中,列举了数字信号处理在通信、音响、语音、图像、雷达、声纳和地球物理等七个方面的应用实例。在短短的 20 年时间里,这些系统几经更新换代,发展极其迅速。例如,在图像处理方面,图像数据压缩是多媒体通信、影碟机(VCD 或 DVD)和高清晰度电视(HDTV)的关键技术。国际上先后制定的标准 H. 261、JPEG、MPEG-1、MPEG-2 和 MPEG-4 中均使用了离散余弦变换(DCT)算法。近年来发展起来的小波(Wavelet)变换也是一种具有高压缩比和快速运算特点的崭新压缩技术,应用前景十分广阔,可望成为新一代压缩技术的标准。此外,数字信号处理不断开辟新的应用领域,例如,在机械制造中,基于快速傅里叶变换(FFT)算法的频谱分析仪用于振动分析和机械故障诊断;医学中使用数字信号处理技术对心电(ECG)和脑电(EEG)等生物电信号作分析和处理;新一代的广播体制——数字音频广播(DAB)广泛地使用了数字信号处理技术。还可以列举出许多这方面的应用实例。可以说,数字信号处理技术已在信息处理领域引起了广泛的关注和高度的重视。

数字信号处理是用数字计算机来实现各种算法,经典的实现方法可分为软件实现和硬件实现两种方法。

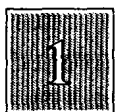
软件实现是用一台通用的数字计算机运行数字信号处理程序。其优点是经济,一机可以多用;缺点是处理速度慢,这是由于通用数字计算机的体系结构并不是为某一种特定算法而设计的。在许多非实时的应用场合,可以采用软件实现方法。例如,处理一盘混有噪声的录像(音)带,我们可以将图像(声音)信号转换成数字信号并存入计算机,用较长的时间一帧帧地处理这些数据。处理完毕后,再实时地将处理结果还原成一盘清晰的录像(音)带。通用计算机即可完成上述任务,而不必花费较大的代价去设计一台专用数字计算机。

硬件实现是针对特定的应用目标,经优化,设计一专用的软硬件系统。其优点是容易做到实时处理,缺点是设备只能专用。在硬件实现中,为了使性能与价格比达到最大,并行、复用和流水的概念是很重要的。并行是指为了完成同一个任务,几个处理器同时工作,使系统能胜任单个处理器所不能完成的任务;当一个处理器完成单个任务(比如一个滤波器)有很大的富余量时,可让其完成多个任务(比如多个滤波器),这就是复用;流水结构也是多处理器完成同一任务,它与并行结构的主要区别在于并行的各个处理器之间数据交换不多,而流水结构类似于生产中的流水线,数据经一道道“工序”处理。采用并行或流水结构,完全取决于数字信号处理的运算结构。

应当说,随着大规模集成电路的发展,一个复杂数字信号处理系统已可以集成在一个芯片上,即所谓的“片上系统”(简称 SOC, System on a Chip),SOC 包含有数字电路、模拟电路、模拟和数字转换电路、微处理器、微控制器以及数字信号处理器等。与传统的集成电路不同的是,嵌入式软件的设计也被集成到了 SOC 的设计流程中,SOC 的设计方法将以组装为基础,采用自上至下的设计方法,在设计过程中大量重复使用自行设计开发或其他第三方拥有知识产权的 IP(Intelligent Property)模块。SOC 子系统要充分考虑如何合理划分软件和硬件所实现的系统功能以及如何实现软、硬件之间的信息传递。总之,SOC 系统将是数字信号处理系统的一个新型的实现方法。

数字信号处理的理论基础是离散线性时不变系统理论和离散傅里叶变换(DFT)。数字滤波和快速傅里叶变换(FFT)是数字信号处理的经典内容,本书将重点介绍上述内容。近年来出现了一些新的数字信号处理发展领域,例如,在离散变换方面有离散余弦变换

(DCT)、Hartley 变换(DHT)、离散小波(Wavelet)变换等;数字滤波方面有多采样率转换、自适应滤波、二维滤波等;在数字频谱分析方面有参数模型法、高阶谱分析等。此外,由于数字信号处理在运算方面具有数据吞吐量大和计算密集的特点,数字信号处理的硬件结构也是一个新的发展领域。上述大部分新的内容已归入“现代数字信号处理”的课程中。考虑到一些新的发展领域与当前的电子信息系统关系密切,例如多采样率信号处理、离散余弦变换、离散小波变换和数字信号处理硬件等内容,也将在本书中给予介绍,以利拓宽读者的知识面。



离散时间信号与系统

离散时间信号与系统的理论在《信号与系统》这门课程中已作了详细介绍,它是数字信号处理的基础,掌握了这些基础知识之后,才可以深入讨论数字信号处理的其他内容。本章复习离散时间信号与系统的理论。

1.1 离散时间信号

离散时间信号是时间上不连续的一个序列。通常定义为一个序列值的集合 $\{x(n)\}$, n 为整型变量, $x(n)$ 表示序列中第 n 个样本值,符号 $\{\cdot\}$ 表示全部样本值的集合。

在数字信号处理中常常遇到序列的相加、相乘以及延时,例如,如果有两个序列 $\{x(n)\}$ 、 $\{y(n)\}$,则 $z(n)=x(n)+y(n)$ 表示这两个序列的相加,它是指两序列值逐项相加形成了一个新序列 $\{z(n)\}$ 。 $f(n)=x(n)y(n)$ 表示序列相乘,是指两序列值逐项相乘所形成的一个新序列 $\{f(n)\}$ 。序列 $\{x(n)\}$ 延迟或平移 n_0 个序数,可以表示为 $y(n)=x(n-n_0)$ 。有时要用到序列的能量,序列的能量被定义为

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

下面介绍几种最常用的典型序列。

(1) 单位脉冲序列

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

在数字系统中,这个序列 $\delta(n)$ 又称离散冲激,或简称为冲激。它的作用类似于模拟系统中的单位冲激函数 $\delta(t)$,但要注意 $\delta(t)$ 完全是一种数学的极限,并非现实的信号。而 $\delta(n)$ 完全是一个现实的序列。

(2) 单位阶跃序列

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

它很类似于连续时间信号中的单位阶跃信号。

(3) 矩形序列

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n < 0, n \geq N \end{cases}$$

它从 $n=0$ 开始,含有 N 个幅度为 1 的数值,其余都为零。

(4) 实指数序列

$$x(n) = a^n u(n)$$

其中 a 为不等于零的任意实数。

(5) 正弦序列

$$x(n) = \sin n\omega_0$$

ω_0 是数字域角频率,单位是弧度。

任一序列都可以表示成各延时单位脉冲序列的加权和,即

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \quad (1.1)$$

常用序列的图形如图 1.1 所示。

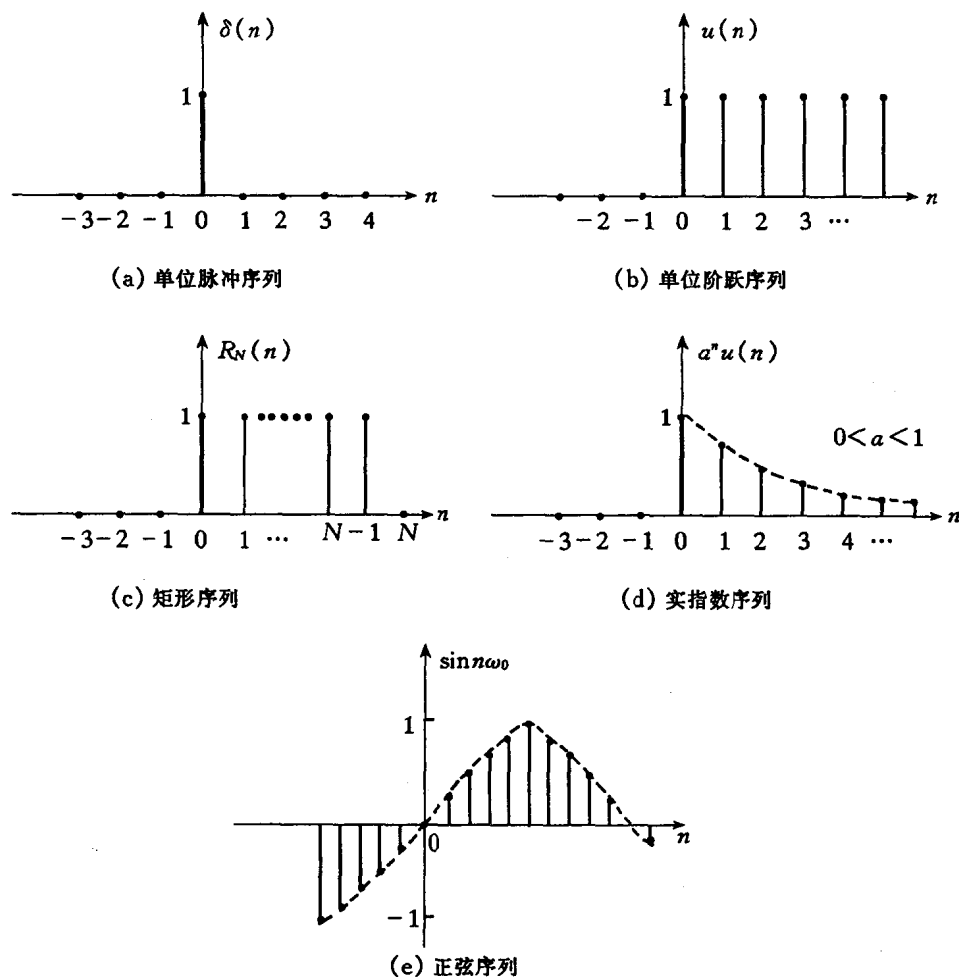


图 1.1 几个常用的典型序列

1.2 采样

通常,要进行数字处理的往往是连续时间信号。而对连续信号进行数字处理的第一个问题是将其离散化(采样),其次是对采样信号进行量化和编码,将其数字化。首先,我们关心的是信号经过采样以后是否会失掉一些信息?其次,由离散时间信号恢复成连续时间信号应该具备哪些条件?

将连续时间信号变成离散时间信号有各种采样方法,其中最常用的是等间隔采样,即每隔一个固定时间 T 取一个信号值, T 称为采样周期, T 的倒数称为采样频率,记为 $f_s = \frac{1}{T}$,而其对应的角频率为 $\Omega_s = 2\pi/T = 2\pi f_s$ 。采样器一般由电子开关组成,开关每隔 T 秒短暂地闭合一次,将连续时间信号接通,实现一次采样。当闭合时间非常短时,就可以认为它是冲激函数。对于周期性的冲激函数记作 $M(t)$,可以写成:

$$M(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1.2)$$

如果以 $x_a(t)$ 代表输入的连续信号,如图 1.2(a) 所示;而 $\hat{x}_a(t)$ 表示采样输出,它的结构就如图 1.2(c) 所示,它是 $M(t)$ [见图 1.2(b)] 经信号 $x_a(t)$ 调制后产生的,即

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot M(t) \quad (1.3)$$

将(1.2)式代入(1.3)式,得

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - nT) \quad (1.4)$$

考虑到周期函数 $M(t)$ 的傅氏级数表达式为

$\frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\Omega_s t}$, 将(1.4)式两边各取傅氏变换,则有

$$\begin{aligned} \hat{X}_a(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j(\Omega - m\Omega_s)t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jm\Omega_s) \end{aligned} \quad (1.5)$$

式中 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 是采样信号的频谱, $X_a(j\Omega)$ 是 $x_a(t)$ 的傅氏变换。

从(1.5)式可以看出 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 是一个以 Ω_s 为周期的连续函数。如果定义

$$\omega = \Omega T = \Omega / f_s \quad (1.6)$$

并且将 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 的自变量用 ω 表示为 $\hat{X}_a(j\omega)$, 周期用 ω_s 表示, 则

$$\omega_s = \Omega_s T = 2\pi \quad (1.7)$$

即 $\hat{X}_a(j\omega)$ 的周期为 2π 。(1.6)式定义的 ω 通常称作数字角频率,它是模拟域频率对采样频率 f_s 的归一化。

从图 1.3 可以看到,如果信号 $x_a(t)$ 是实带限信号,并且最高频谱不超过 $\Omega_s/2$, 即

$$X_a(j\Omega) = \begin{cases} X_a(j\Omega), & |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2} \\ 0, & |\Omega| \geq \frac{\Omega_s}{2} \end{cases} \quad (1.8)$$

那么采样频谱中,基带频谱以及各次谐波调制频谱彼此是不重叠的。如果有一个带宽为 $\frac{\Omega_s}{2}$ 的理想低通滤波器,就可以将 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 的各次调制频谱滤掉,从而只保留不失真的基带频谱。也就是说,可以不失真地还原出原有的连续信号来。

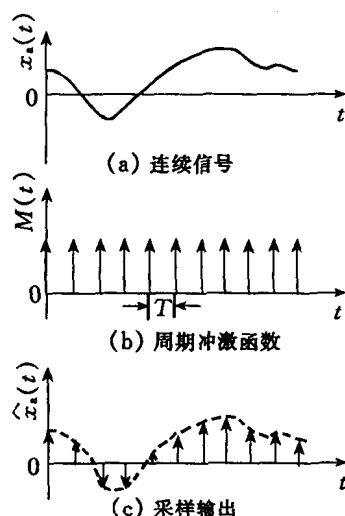


图 1.2 理想采样

但是,如果信号最高频谱超过 $\Omega_s/2$,那么在采样频谱中,各次调制频谱就会互相交叠起来,这就是频谱“混淆”现象,如图 1.4 所示。

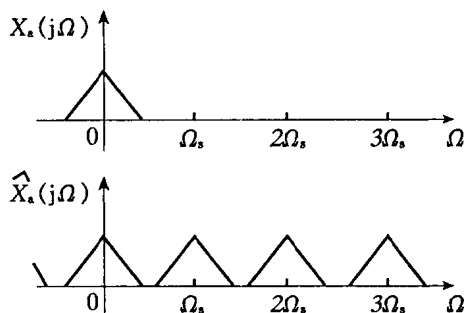


图 1.3 频谱的周期延拓

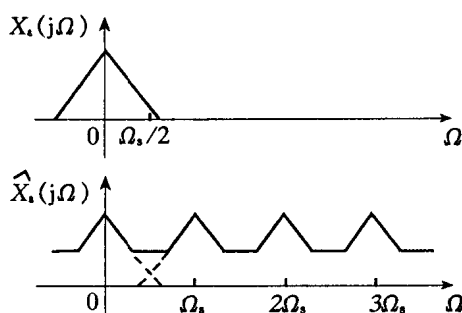


图 1.4 频谱的混淆

因此,采样频率的一半,即 $\Omega_s/2$,也称作折叠频率,信号频谱分量超过这一频率时,就会被反折回来,造成频谱的混淆。能够再恢复出原始信号的最低采样频率称为奈奎斯特采样频率,即奈奎斯特采样频率为信号最高频率的两倍。工程上的采样频率一般为奈奎斯特采样频率的 2~3 倍。

现在要研究怎样从 $\hat{x}_a(t)$ 恢复出连续时间信号 $x_a(t)$ 。

如果采样频率满足奈奎斯特采样频率,即信号最高频谱不超过折叠频率,我们可以将信号 $\hat{x}_a(t)$ 通过一个理想低通滤波器 $G(j\Omega)$,即

$$G(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| < \Omega_s/2 \\ 0, & |\Omega| \geq \Omega_s/2 \end{cases} \quad (1.9)$$

令 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 通过低通滤波器,则滤波器的输出

$$Y(j\Omega) = \hat{X}_a(j\Omega) \cdot G(j\Omega) \quad (1.10)$$

由于在 $|\Omega| < \Omega_s/2$ 时, $\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T}X_a(j\Omega)$, 所以

$$\begin{aligned} Y(j\Omega) &= \frac{1}{T}X_a(j\Omega) \cdot G(j\Omega) \\ &= X_a(j\Omega) \end{aligned} \quad (1.11)$$

这就是说,在时域中低通滤波器的输出为 $x_a(t)$,如图 1.5 所示。

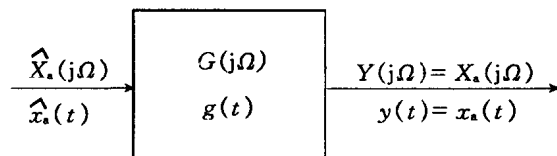


图 1.5 $X_a(j\Omega)$ 通过理想低通滤波器

从(1.10)式、(1.11)式及(1.4)式得

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \hat{x}_a(t) * g(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(\tau) \delta(\tau - nT) \right] g(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(\tau) g(t-\tau) \delta(\tau-nT) d\tau \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) g(t-nT)
\end{aligned} \quad (1.12)$$

又因为

$$\begin{aligned}
g(t) &= \mathcal{F}^{-1}[G(j\Omega)] \\
&= \frac{1}{T} \int_{\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} T e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{\sin(\Omega_s t/2)}{\Omega_s t/2} = \frac{\sin \frac{\pi}{T} t}{\frac{\pi}{T} t}
\end{aligned} \quad (1.13)$$

因此卷积公式(1.12)也可以表示为

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin[\frac{\pi}{T}(t-nT)]}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} \quad (1.14)$$

(1.14)式为采样内插公式,它表明了连续时间函数 $x_a(t)$ 如何由它的采样值 $x_a(nT)$ 来表

达,即 $x_a(t)$ 等于 $x_a(nT)$ 乘上对应的内插函数的总和。内插函数 $\frac{\sin[\frac{\pi}{T}(t-nT)]}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}$ 的波形

如图 1.6 所示,其特点为:在采样点 nT 上,函数值为 1,其余采样点上,函数值都为零。其内插过程如图 1.7 所示。被恢复的信号 $y(t)$ 在采样点的值就等于 $x_a(nT)$,采样点之间的信号则是由各采样值内插函数的波形延伸叠加而成的。这也正是理想低通滤波器 $G(j\Omega)$ 中的响应过程。

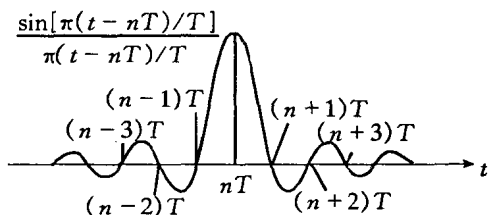


图 1.6 内插函数

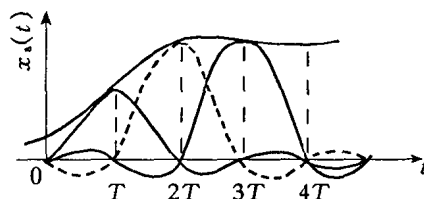


图 1.7 采样内插恢复

由采样产生的序列常称为采样序列 $\{x_a(nT)\}$,对于处理离散时间信号来说,往往可以不必以 nT 作为变量,而直接以 $\{x(n)\}$ 表示离散时间信号序列。

1.3 离散时间系统

离散时间系统在数学上定义为将输入序列 $x(n)$ 映射成输出序列 $y(n)$ 的唯一性变换或运算,亦即将一个序列变换成另一个序列的系统。记为

$$y(n) = T[x(n)] \quad (1.15)$$

通常将上式表示成图 1.8 所示的框图。算子 $T[\cdot]$ 表示变换,对 $T[\cdot]$ 加上种种约束条件,

就可以定义出各类离散时间系统。由于线性时不变系统在数学上容易表征,且它们可以实现多种信号处理功能,因此,将着重讨论这类系统。

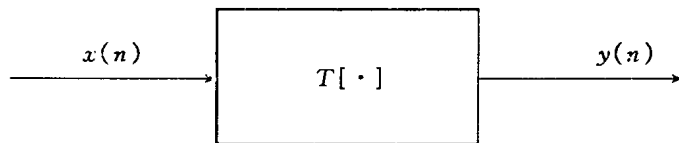


图 1.8 离散时间系统的模型

1.3.1 线性系统

满足叠加原理的系统具有线性特性。即若对两个激励 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 有

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] \quad (1.16)$$

式中 a, b 为任意常数。不满足上述关系的为非线性系统。

例 1 判断 $y(n) = T[x(n)] = 7x^2(n-1)$ 是否为线性系统。

解 $T[ax(n)] = 7a^2x^2(n-1)$
 而 $aT[x(n)] = 7ax^2(n-1)$
 即 $T[ax(n)] \neq aT[x(n)]$
 所以系统是非线性的。

1.3.2 时不变系统

时不变系统就是系统的参数不随时间而变化,即不管输入信号作用的时间先后,输出信号响应的形状均相同,仅是出现的时间不同。用数学表示为

$$\begin{aligned} T[x(n)] &= y(n) \\ \text{则} \quad T[x(n-n_0)] &= y(n-n_0) \end{aligned} \quad (1.17)$$

这说明序列 $x(n)$ 先移位后进行变换与它先进行变换后再移位是等效的。

例 2 判断 $y(n) = T[x(n)] = 12x(n-1) + 11x(n-2)$ 是否为时不变系统。

解 $T[x(n-k)] = 12x[(n-k)-1] + 11x[(n-k)-2]$
 $= y(n-k)$

所以系统是时不变的。

1.3.3 线性时不变系统

线性时不变系统既满足叠加原理又具有时不变特性,它可以用单位脉冲响应来表示。单位脉冲响应是输入端为单位脉冲序列时的系统输出,一般标为 $h(n)$,即

$$h(n) = T[\delta(n)] \quad (1.18)$$

根据(1.1)式可以得到对任一输入序列 $x(n)$ 的响应

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right]$$

由于系统是线性的,所以上式可以写成

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)]$$

又由于系统是时不变的,即有