用近代数学观点研究初等数学

梅向明

人民教育出版社

用近代数学观点研究初等数学

梅 向 明

人 民 教 育 出 版 社

用近代数学观点研究初等数学
梅向明
*
人民教育出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装
*
开本 787 ×1092 1/32 印张 11.5 字数 237,000
1989 年 11 月第 1 版 1989 年 11月第 1 次印刷
印数 1 —1,578
ISBN 7-107-10026-2
G·87 定价 3.85 元

内容提要

本书是用近代数学的观点来研究初等数学中的一些问题，这些问题仅在初等数学的范围内是无法解决的．全书共分五章．第一章的内容是用群、环、域的观点来分析数的概念的发展，并对代数数、超越数和连分数的概念作概要的介绍．第二、三章是方程式论，侧重用 Galois 理论来阐述五次以上的方程为什么没有根式解以及尺规作图不能问题．第四章是用测度的观点来分析长度、面积与体积的概念。最后一章介绍非欧几何，即球面几何与罗氏几何，并且用公理化的观点介绍几何公理体系．

本书是帮助中学数学教师深入理解中学数学教材、提高数学素养的一本颇为有用的参考书，它同时也可供中学数学教学研究人员、师范院校数学系师生阅读和参考．

引　言

这本书是在我多年来给中学数学教师和高等师范院校教师、研究生和本科学生讲课的讲义的基础上整理而成的.

作为一个长期从事中学数学教育的教师，我有这样一个看法：要讲好中学数学课，要作好一个中学数学教师，关键是对中学数学教材的内容要有比较深的理解，也就是说：必须对中学数学内容的条理、线索、背景、来龙去脉搞得清清楚楚，他才有可能根据学生的实际情况，有计划、有目的地逐步培养学生的数学修养和才能.

因此，一个中学数学教师必须较好地掌握高等数学知识，只有学好了高等数学才能使他能够"居高临下"地去理解初等数学的全局，它的系统、重点和难点，数学内容的背景以及如何为中学生奠定将来进一步学好高等数学的基础.

但是令人遗憾的是，我以上观点目前不一定能被多数人所接受. 当前在培养中学数学师资的过程中出现了两种倾向：一种是学了许多高等数学知识以后感到对于中学数学教学用不上，"居高临不了下"；另一种是"安于下、不居高"，就中学数学论中学数学，只是在教学法上下功夫，而不是在理解好数学内容的基础上，去研究如何针对中学生的实际情况，使他们在掌握中学数学的基本内容时能少遇到一些困难.

我这本书可能作为纠正以上两种偏向的一种尝试. 我们选择了一些对于理解初等数学的内容和体系有直接联系的题

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目，加以阐述和发挥，这样就可以弥补学习高等数学时“不临下”的不足. 因为每一门高等数学课程有它本身的目标和体系，在系统讲授这门学科的过程中很可能对于与初等数学有密切联系的内容阐述得不够，这样的话，这本书正好能够给这些不足之处作补充，另一方面，对于一些目前有紧张的教学任务的中学数学教师来说，如果他们没有可能系统地去进修高等数学，那末他们可以在教学之余先集中解理这一部分与初等数学有密切联系的高等数学内容，开阔眼界，这样的话，对于他们理解中学数学教材是有帮助的.

我还想说一点：初等数学是高等数学的基础，高等数学的内容是在初等数学的基础上发展起来的. 很多高等数学的概念(例如群、环、域)和理论(例如 Galois 理论)都可以在初等数学中找到背景和具体的实例. 所以这本书不仅起“居高临下”的作用，同时也给钻研近代数学的同志们从内容和思想方法上提供初等数学中的背景.

对于一部分读者来说，这本书写得太紧凑一些，很多地方都需要读者亲自动手把内容加以充实和严密化，不过，也许这些地方就是很好的习题. 希望读者多对这本书的缺点和不足之处提出批评和建议.

本书承北京师范学院数学系副教授米道生、田孝贵、刘增贤三位同志校阅原稿并提出了不少很好的修改意见，作者谨向他们表示衷心的感谢.

梅向明

1986 年

目　录

引言 ……………………………………………………1

第一章　数的概念……………………………………1

§1　关系与运算……………………………………1

§2　自然数集………………………………………5

§3　整数环…………………………………………14

§4　有理数域………………………………………23

§5　实数域…………………………………………38

§6　复数域…………………………………………54

§7　代数数与超越数………………………………61

附录1　连分数………………………………………89

附录2　循环小数……………………………………112

第二章　方程式论……………………………………117

§8　域的扩张………………………………………117

§9　可解群…………………………………………124

§10　Galois理论基础……………………………136

§11　有根式解的方程……………………………148

§12　五次方程不能有根式解……………………161

§13　三次和四次方程……………………………176

第三章　尺规作图不能问题…………………………185

§14　尺规作图的准则……………………………185

§15　尺规作图不能问题…………………………188

§16　作圆内接正多边形…………………………192

第四章　长度、面积与体积……198
§17　线段的长度……198
§18　多边形的面积……204
§19　多面体的体积……217
第五章　非欧几何初步……235
§20　非欧几何的产生……235
§21　欧氏空间中的多面角和多面体……260
§22　球面几何初步……274
§23　罗氏几何……287
§24　几何公理体系……335

第一章　数的概念

§1　关系与运算

1.1　关系

我们假定读者已具有集的概念的初步知识.

集合 A 是一个基本概念，即不加定义的概念，它的成员 e 称为 A 的**元素**，记成 $e\in A$. 有时，我们把集合简称为**集**.

定义 1　集合 A 和集合 B 的**卡积**(Cartesian Product) $A\times B$ 是一个新的集合，定义为

$$A\times B=\{\text{有序元素对}(e,f):e\in A,f\in B\}.$$

定义 2　集合 A 和集合 B 之间的**关系** R 是 $A\times B$ 的子集，即 $R\subset A\times B$. 如果 $(a,b)\in R$，则我们记成"aRb"，这表示 A 的元素 a 和 B 的元素 b 之间存在关系 R. 如果 $R\subset A\times A$，则 R 称为集合 A 中的关系.

定义3　设 R 是集合 A 中的关系，对于 $\forall a,b,c\in A$，关系 R 称为**反身的**(reflexive)，如果 aRa；关系 R 称为**对称的**(symmetric)，如果 $aRb\Rightarrow bRa$；关系 R 称为**传递的**(transitive)，如果 $aRb,bRc\Rightarrow aRc$；关系 R 称为**反对称的**(Anti-symmetric)，如果 $aRb,bRa\Rightarrow a=b$；关系 R 满足**三分律**(law of trichotomy)，如果 aRb,bRa 和 $a=b$ 三者之间有一个并且只有一个成立。

定义 4　集合 A 中的反身的、对称的、和传递的关系 R 称

为**等价关系**. A 中两元素 a 和 b 对于关系 R 是等价的记成 $a\overset{R}{\sim}b$.

定义 5 设 R 是集合 A 中的等价关系。对于某元素 $a\in A$，与 a 等价的元素的全体所组成的集合记成

$$C_a=\{x\in A;x\overset{R}{\sim}a\},$$

C_a 称为集合 A 中元素 a 对于关系 R 的**等价类**.

实例. 设 A 是自然数集N. 命等价关系 R 是 mod 4, 则

$$C_2=\{2,6,10,14,\cdots\cdots,2+4^k,\cdots\cdots\}$$

是自然数 2 对于关系 mod 4 的等价类.

命题 1 如果 $b\notin C_a$, 则$C_a\cap C_b=\varnothing$.

证明: 用反证法. 设元素 $d\in C_a\cap C_b$, 则 dRa,dRb. 因为等价关系 R 是对称的, $dRb\Rightarrow bRd$; 又因为 R 是传递的, 则从 bRd 和 dRa 推出 $bRa,b\in C_a$, 矛盾!

命题 2 集合 A 是一些非交等价类的联合.

证明: 等价关系 R 是反身的, 所以对于 $\forall a\in A$, aRa, 因此 $a\in C_a$. 由此推出, $A\subset\bigcup\limits_{a\in A}C_a$. 但是另一方面, $C_a\subset A$, $\therefore$ $A=\bigcup\limits_{a\in A}C_a$. 如果$C_a\cap C_b\neq\varnothing$, 则 $C_a=C_b$. 因为设 $x\in C_a\cap C_b$, 则 C_a 和 C_b 中任何元素都与 x 等价. 所以集合 A 是非交等价类 C_a 的联合.

实例. 设 A 是自然数集 N, 等价关系 R 是 mod 4, 则

$$N=C_0\cup C_1\cup C_2\cup C_3.$$

定义6 把集合 A 中每一个关于关系 R 的等价类看成一个元素, 则我们得到一个新的集合 $\{C_a,C_b,\cdots\cdots;C_a\cap C_b\neq\varnothing\}$,

这个集合称为A对于等价关系R的**商集**，记成 A/R.

实例.（1）$A=\boldsymbol{N}, R=\mathrm{mod}\ 4$，则

$\boldsymbol{N}/\mathrm{mod}\ 4=\{C_0, C_1, C_2, C_3\}$，

（2）$A=$数平面 $\boldsymbol{R}^2$，等价关系是：

$a\sim b$，如果 a 和 b 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中的平行、同向和等长的向量，则有

$$\text{向量平面}=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}/\sim.$$

定义7 如果集合A中的关系是反身的、反对称的和传递的，则这个关系称为**偏序关系**.

实例.（1）实数集 $\boldsymbol{R}$ 中的不等关系"$\leqslant$"是偏序关系；(2)自然数集 $\boldsymbol{N}$ 中的"除尽"关系是偏序关系.

定义8 如果集合A中的关系是传递的，并且满足三分律，则这个关系称为**有序关系**.

实例.有理数集 $\boldsymbol{Q}$ 中的不等关系"$<$"是有序关系.

1.2 映射

定义 9 如果A和B 是非空集合，则从A到B中的**映射**（或**函数**）f，记成 $f: A\to B$，是A和B之间的一种关系，即$A\times B$的子集，满足下列条件：

（1）对于 $\forall a\in A$，存在某 $b\in B$ 使得$(a,b)\in f$；

（2）如果$(a,b)\in f$ 并且$(a,b')\in f$，则 $b=b'$.

集合A称为映射f的**定义域**，集合B称为映射f的值域

如果 $f(A)=B$，则 f 称为从A到B上的映射或称**满射**.

如果$(a,b)\in f$，$(a',b)\in f\Longrightarrow a=a'$，则$f$称为**一一映射**或称**单射**.

实例.（1）$A=\{-2,2,3\}$，$B=\boldsymbol{N}$，$f=\{(-2,4),(2,4),(3,9)\}$，则映射 $f: A\to B$ 可以表示成 $f(a)=a^2$，$\forall a\in A$. 这个映

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

射 f 既不是一一的，也不是在上的.

(2) 如果 $A=\{2,3\}$，$B=\boldsymbol{N}$，$f'=\{(2,4),(3,9)\}$，则映射 f' 是一一的.

(3) 如果 $A=\{2,3\}$，$B=\boldsymbol{N}$，$f''=\{(2,4),(2,-4),(3,9)\}$，则 f'' 不是一个映射，因为条件(2)不成立。

1.3 运算

定义 10 设 A、B、C 是三个集合，卡积 $A\times B$ 的非空子集到集合 C 中的任何映射：$A\times B$ 的子集 $\to C$ 称为**运算**；映射：$A\times A$ 的子集 $\to A$ 称为**集合 A 中的运算**. 如果后者的定义域是整个卡积 $A\times A$，则称为**集合 A 上的运算**.

给出运算：$A\times B$ 的子集 $\to C$，我们把 $(a,b)\in A\times B$ 的象记成 $a\circ b\in C$，这就是说：把运算记成"$\circ$".

实例. 自然数集 $\boldsymbol{N}$ 的加法运算 $(a,b)\longmapsto a+b$ 和乘法运算 $(a,b)\longmapsto a\cdot b$ 都是 $\boldsymbol{N}$ 上的运算：$\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$.

定义 11 集合 A 上的运算 $\circ$：$A\times A\to A$ 是

(1) **结合的** 如果对于 $\forall a,b,c\in A$ 有

$$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c);$$

(2) **交换的** 如果对于 $\forall a,b\in A$ 有

$$a\circ b=b\circ a.$$

定义 12 设 A 是一个集合，$\circ$ 和 $\circ'$ 是 A 中的两种运算，则

(1) 运算 $\circ'$ 对于运算 $\circ$ 是**左分配的**，如果

$$a\circ'(b\circ c)=(a\circ' b)\circ(a\circ' c),\ \forall a,b,c\in A;$$

(2) 运算 $\circ'$ 对于运算 $\circ$ 是**右分配的**，如果

$$(a\circ b)\circ' c=(a\circ' c)\circ(b\circ' c),\ \forall a,b,c\in A;$$

（3）运算$\circ'$对于运算$\circ$是分配的，如果它们既是左分配的，又是右分配的.

实例. 设自然数集N上的两种运算$\circ$和$\circ'$分别是加法运算“$+$”和乘法运算“$\circ$”，则乘法运算对于加法运算既是左分配的，又是右分配的，也就是说：是分配的，即对于$\forall a,b,c\in A$,

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,\ (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c.$$

§2 自然数集

2.1 自然数集的定义、运算和顺序

定义1 (Peano)给出一个集合N和映射$S:N\to N$，如果S满足下列条件：

（1）S是一一映射，即$S(m)=S(n)\Longrightarrow m=n$，$\forall m,n\in N$；

（2）S的值域不是N，即$S(N)\subset N$，并且$S(N)\neq N$；

（3）（归纳原理）设$u\in N$，但是$u\notin S(N)$，并且M是N的子集使得 i) $n\in M$，ii) $n\in M$时$S(n)\in M$，则$M=N$. 则N称为**自然数集**，N中的元素称为**自然数**，对于某$n\in N$，$S(n)$称为n的**后继数**.

定理1 N中只有一个元素u，$u\notin S(N)$.

证明：设u是N中的一个元素，且$u\notin S(N)$，命$M=\{u\}\cup S(N)$，则(i)$u\in M$，(ii)设$n\in M$，则$n=u$时，$S(n)=S(u)\in S(N)\Longrightarrow S(n)\in M$；$n\in S(N)$时，$n\in S(N)\subset N$，所以$S(n)\subset S(N)\subset M$. 根据归纳原理，$M=N$. 这说明：$N$中只有一个元素$u\notin S(N)$.

下面我们将用大家熟悉的符号"1"来表示自然数集 N 中的唯一非后继数. 这时条件(3)可以改成

(3′) 设 $\boldsymbol{M}$ 是 $\boldsymbol{N}$ 的子集, (i) $1\in\boldsymbol{M}$, (ii) $n\in\boldsymbol{M}\Longrightarrow \mathrm{S}(n)\in\boldsymbol{M}$, 则 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}$.

在自然数集中可以定义"加法"如下:

定义2 N 中的加法是映射 $+:N\times N\to N$, 定义为

(1⁺) 对于 $\forall m\in\boldsymbol{N}, m+1=\mathrm{S}(m)$;

(2⁺) 对于 $\forall m,n\in\boldsymbol{N}, m+\mathrm{S}(n)=\mathrm{S}(m+n)$.

定理2 自然数集 $\boldsymbol{N}$ 的加法满足结合律和交换律.

证明: 先证明加法结合律. 对于 $\forall m,n\in\boldsymbol{N}$,

$$(m+n)+1=\mathrm{S}(m+n)=m+\mathrm{S}(n)=m+(n+1).$$

再设

$$\boldsymbol{M}=\{p\in\boldsymbol{N}:(m+n)+p=m+(n+p)\},$$

则 $1\in\boldsymbol{M}$, 并且

$$\begin{aligned}(m+n)+S(p)&=S((m+n)+p)=S(m+(n+p))\\&=m+S(n+p)=m+(n+S(p)),\end{aligned}$$

所以 $p\in\boldsymbol{M}$ 时 $S(p)\in\boldsymbol{M}$, 因此根据归纳原理, $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}$. 因此, 对于 $\forall n\in N$,

$$(m+n)+p=m+(n+p).$$

再证明加法交换律. 对于 $\forall m,n\in\boldsymbol{N}$, 命

$$\boldsymbol{M}=\{m\in\boldsymbol{N}:m+1=1+m\},$$

显然有 $1\in\boldsymbol{M}$, 并且 $m\in\boldsymbol{M}$ 时,

$$\begin{aligned}S(m)+1&=(m+1)+1=(1+m)+1\\&=1+(m+1)=1+S(m),\end{aligned}$$

所以 $S(m)\in\boldsymbol{M}$, 根据归纳原理, $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}$. 因此对于 $\forall n\in\boldsymbol{N}$,

$$n+1=1+n.$$

再设

$$M'=\{n\in N: m+n=n+m, \forall m\in N\},$$

则 $1\in M'$，并且 $n\in M'$时

$$m+S(n)=m+(n+1)=(m+n)+1=(n+m)+1$$
$$=n+(m+1)$$
$$=n+(1+m)=(n+1)+m=S(n)+m,$$

所以 $S(n)\in M'$，因此根据归纳原理$M'=N$. 这说明加法交换律对于 $\forall n\in N$ 都成立.

习题：已知：对于 $\forall m,n,p\in N, m+p=n+p$，求证：$m=n$.（提示：命 $M=\{p\in N: m+p=n+p\Rightarrow m=n\}$，求证：$M=N$）.

再定义自然数集中的"乘法"如下：

定义3 N 中的乘法是映射$\cdot: N\times N\to N$，定义为

(1˙) $m\cdot 1=m, \forall m\in N$;

(2˙) $m\cdot S(n)=m\cdot n+m, \forall m,n\in N$.

定理3 自然数集 N 的乘法满足分配律.

证明：先证明左分配律. 对于 $\forall m,n,p\in N$，设

$$M=\{p\in N: m\cdot(n+p)=mn+mp\}$$

则$1\in M$，因为

$$m\cdot(n+1)=m\cdot S(n)=m\cdot n+m=m\cdot n+m\cdot 1.$$

再设 $p\in M$，因为

$$m\cdot(n+S(p))=m\cdot S(n+p)=m\cdot(n+p)+m$$
$$=m\cdot n+m\cdot p+m=m\cdot n+m\cdot S(p),$$

所以 $S(p)\in M$，根据归纳原理，$M=N$. 同理构造 $M'=$

$\{m\in N: (n+p)m=nm+pm\}$ 可以证明右分配律.

定理 4 自然数集 N 的乘法满足结合律和交换律.

证明：先证明乘法结合律. 设

$$M=\{p\in N: (m\cdot n)\cdot p=m\cdot(n\cdot p),\ \forall m,n\in N\},$$

显然 $1\in M$. 设 $p\in M$, 则

$$\begin{aligned}(m\cdot n)\cdot S(p)&=(m\cdot n)\cdot p+m\cdot n=m\cdot(n\cdot p)+m\cdot n\\&=m\cdot((n\cdot p)+n)=m\cdot(n\cdot S(p)),\end{aligned}$$

所以 $S(p)\in M$, 根据归纳原理, $M=N$.

再证明乘法交换律. 设

$$M=\{m\in N: m\cdot n=n\cdot m, \forall n\in N\},$$

用归纳原理可以证明 $1\in M$. 设 $m\in M$, 则

$$S(m)\cdot n=(m+1)\cdot n=m\cdot n+n=n\cdot m+n=n\cdot S(m),$$

所以 $S(m)\in M$, 根据归纳原理, $M=N$.

下面我们在自然数集中引进顺序. 先定义不等关系如下:

定义4 对于每一对自然数 $m,n\in N$, $m\neq n$, 如果存在自然数 $p\in N$ 使得 $m+p=n$, 则我们说: m 小于 n, 记成 $m<n$, 或 n 大于 m, 记成 $n>m$.

定理5 自然数集的不等关系是有序关系.

证明：先证明传递性. 对于 $\forall m,n,k\in N$, 设

$$m<n, n<k,$$

则存在 $p,q\in N$ 使得

$$m+p=n, n+q=k.$$

$$\therefore \quad m+(p+q)=(m+p)+q=n+q=k.$$

因此 $m<k$.

再证明三分律.固定一个 $m\in \boldsymbol{N}$,命

$$M_m=\{n\in \boldsymbol{N}: n=m \text{ 或 } n>m \text{ 或 } n<m\},$$

则 $1\in M_m$. 因为 $\boldsymbol{N}=\{1\}\cup S(\boldsymbol{N})$. 当 $m=1$, 则 $n=1=m$; 当 $m\in S(\boldsymbol{N})$, 则 $m=S(p)=p+1=1+p$, $\therefore n=1<m$.

设 $n\in M_m$, 考虑 $S(n)$. 如果 $n=m$, 则 $S(n)=n+1=1+n>m$; 如果 $n<m$, 则存在 $p\in \boldsymbol{N}$, 使得 $n+p=m$. 如果 $p=1$, 则 $S(n)=n+1=m$; 如果 $p>1$, 则 $p=S(q)$, 对于某 $q\in \boldsymbol{N}$, 所以 $m=n+p=n+S(q)=S(n+q)=S(q+n)=q+S(n)$, 因此 $m>S(n)$. 如果 $n>m$, 则存在 $p\in \boldsymbol{N}$ 使得 $m+p=n$. $S(n)=n+1=m+p+1$, 所以 $S(n)>m$. 以上分析说明, $S(n)\in M_m$, 根据归纳原理, $M_m=\boldsymbol{N}$.

因此, 对于 $\forall n\in M_m$, 可能发生 $n=m, n>m$ 或 $n<m$ 三种情形. 下面指出: 这三种情形只能发生一种.

如果 $n=m$, 则不存在任何 $p\in \boldsymbol{N}$ 使得 $n+p=m$ 或 $m+p=n$, 即不可能有 $n<m$ 或 $n>m$.

如果 $n\neq m$, 则 $n>m$ 或 $n<m$. 但是两不等式不能同时成立, 不然的话, 存在 $p,q\in \boldsymbol{N}$, 使得 $n+p=m, m+q=n$, 从而 $m+q+p=n+p=m$, 矛盾!

定理6 任给两自然数 m 和 n, 设 $m>n$, 则对于 $\forall p\in \boldsymbol{N}$, $m+p>n+p$.

证明: 设

$$M=\{p\in \boldsymbol{N}: m+p>n+p, \forall m,n\in \boldsymbol{N}\},$$

则 $1\in M$. 因为 $m>n$, 所以存在 $q\in \boldsymbol{N}$ 使得 $n+q=m$, 则 $S(n+q)=S(m)$, 即 $n+q+1=m+1$ 或 $(n+1)+q=m+1$, 所以 $m+1>n+1$.

试读结束: 需要全本请在线购买: www.ertongbook.com