

# 初等几何

梁绍鸿 著

人民教育出版社



# 初 等 几 何

梁 绍 鸿 著

人 民 教 育 出 版 社

## 内 容 提 要

本书分上、下两篇。上篇是平面几何，内容包括：基本知识(线段、角、圆的简单性质和命题的基本知识)，三角形，平行线，圆，相似形，面积，轨迹及作图。下篇是立体几何，内容包括：空间平面和直线，多面体，旋转体，正多面体。

本书可供广大知识青年阅读，也可供中学教师参考。

## 初 等 几 何

梁绍鸿 著

\*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

\*

开本 787×1092 1/32 印张 16 字数 328,000

1980年7月第1版 1981年1月第1次印刷

印数 1—100,000

书号 7012·0152 定价 1.15 元

# 目 录

引言 .....	1
----------	---

## 上篇 平面几何

第一章 基本知识 .....	5
----------------	---

第一节 基本图形的简单性质 .....	5
---------------------	---

线段、射线和直线 .....	5
----------------	---

角 .....	11
---------	----

圆 .....	19
---------	----

第二节 命题 .....	24
--------------	----

公理、定理和作图题 .....	24
-----------------	----

定理的结构 .....	26
-------------	----

定理的证明 .....	27
-------------	----

小结 .....	32
----------	----

第二章 三角形 .....	34
---------------	----

第一节 全等三角形 (一) .....	36
---------------------	----

$s. a. s.$ .....	36
------------------	----

三角形的外角定理 .....	37
----------------	----

垂线 .....	41
----------	----

等腰三角形 .....	43
-------------	----

三角形中的不等定理 .....	47
-----------------	----

第二节 全等三角形 (二) .....	55
---------------------	----

$a. s. a.$ .....	55
------------------	----

$a. a. s.$ .....	56
------------------	----

等腰三角形的判定 .....	57
----------------	----

第三节 全等三角形 (三) .....	59
---------------------	----

$s. s. s.$ .....	59
------------------	----

$S. s. a.$ .....	60
------------------	----

全等直角三角形的判定	61
线段的中垂线和角的平分线	62
小结	69
第三章 平行线	74
第一节 基本命题	74
平行线的存在	74
平行线的判定	75
平行公理	77
平行线的性质	79
第二节 有关命题	84
三角形的内角和	84
平行四边形	90
梯形	99
第三节 平行截割定理	107
平行截割定理的两种形式	107
中位线	111
小结	120
第四章 圆	122
第一节 基本性质	122
圆的对称性	122
圆中的不等定理	124
三点定一圆	125
第二节 相切问题	131
圆的切线	131
两圆的公切线	136
两圆相切	143
第三节 圆和有关的角	148
圆周角	148
弦切角	153
圆内角和圆外角	154
第四节 圆和多边形	163

圆内接四边形.....	163
圆外切四边形.....	164
正多边形.....	165
小结.....	178
第五章 相似形.....	180
第一节 成比例的线段.....	180
两条线段的比.....	180
比例式.....	181
关于比例的平行截割定理.....	183
三角形内、外角的平分线内、外分对边的分比.....	188
第二节 相似三角形.....	194
相似三角形的判定.....	194
勾股定理.....	200
圆幂定理.....	207
第三节 位似图形.....	221
位似图形概念和性质.....	221
圆和圆的位似.....	226
第四节 锐角三角函数.....	230
直角三角形的边角关系.....	230
锐角三角函数概念.....	231
特殊角的三角函数值.....	233
简单的三角恒等式.....	233
三角函数表.....	238
解直角三角形.....	242
第五节 圆周率.....	253
圆的周长.....	253
倍边公式.....	254
圆周长.....	255
圆周长和弧长公式.....	257
小结.....	264
第六章 面积.....	266

第一节 直线形的面积.....	266
矩形面积.....	267
平行四边形面积.....	270
三角形面积.....	271
梯形面积.....	272
面积的比.....	273
等积变形.....	275
第二节 圆面积.....	289
圆面积.....	289
扇形面积和弓形面积.....	290
小结.....	298
第七章 轨迹及作图.....	299
第一节 轨迹.....	299
轨迹概念及其基本属性.....	299
基本轨迹.....	301
轨迹问题举例.....	306
第二节 轨迹的应用.....	315
交轨法.....	315
连接.....	323
第三节 常用的作图方法.....	332
三角形奠基法.....	332
变位法.....	336
放大法.....	340
代数分析法.....	343
第四节 尺规作图不能问题.....	356
等分圆周问题.....	357
几何三大问题.....	360
小结.....	364

## 下篇 立体几何

第一章 空间平面和直线	367
第一节 基本性质	368
第二节 平行问题	371
直线和平面平行	371
平面和平面平行	375
第三节 直线和平面相交	377
异面直线的夹角	377
直线和平面垂直	378
直线和平面斜交	381
第四节 平面和平面相交	384
二面角	384
垂面	386
第二章 多面体	391
第一节 多面体及其简单性质	391
多面体概念	391
棱柱	392
平行六面体	393
棱锥	396
棱台	399
第二节 简单体的体积	405
棱柱的体积	405
棱锥的体积	413
棱台的体积	416
断棱柱和拟柱体的体积	418
第三章 旋转体	429
第一节 直圆柱	429
直圆柱的表面积	429
直圆柱的体积	433



第二节 直圆锥 .....	437
直圆锥的表面积 .....	438
直圆锥的体积 .....	440
第三节 正圆台 .....	444
正圆台的表面积 .....	445
正圆台的体积 .....	447
第四节 球 .....	451
球的体积 .....	452
球缺和球台的体积 .....	456
球的表面积 .....	462
球冠和球带的面积 .....	465
第四章 正多面体 .....	474
第一节 正多面体的类型 .....	474
欧拉定理 .....	474
正多面体仅有五种类型 .....	479
正多面体的三种球 .....	481
正多面体的作法 .....	483
第二节 正多面体中的计量问题 .....	489
正多面体的二面角 .....	489
正多面体的内切球半径 .....	493
正多面体的表面积及体积 .....	495

## 引 言

生产各种产品,如六角螺帽、燕尾槽、滚珠轴承等(图 1),都要求有一定的形状和大小。

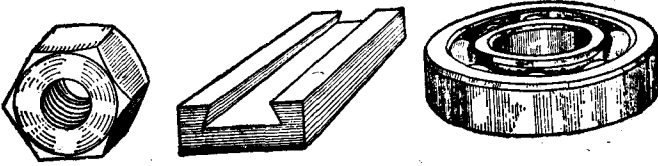


图 1

考察各种物体的形状、大小和位置关系,就产生了各种图形的概念。如图 2,一个是木块,一个是铁块。它们的物理性

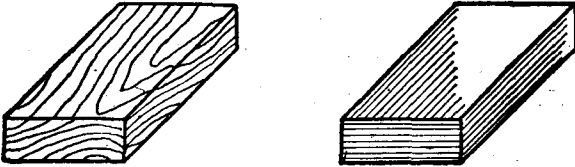


图 2

质截然不同:一个轻,一个重;一个软,一个硬;等等。但是,如果我们不比较上述物理性质和其它性质,而只比较它们的形状和大小,则是一样的。人们在实践中反复多次见到这种形状的物体,就形成了“长方体”的概念。这就是说,抽去物体的物理性质和其它性质,只考察物体的形状和大小,就得到了几何体或几何图形。正如恩格斯指出的:和数的概念一样,形的概念也完全是从外部世界得来的,而不是在头脑中由纯

粹的思维产生出来的。必须先存在具有一定形状的物体，把这些形状加以比较，然后才能构成形的概念。

几何研究的对象就是从现实世界中抽象出来的各种几何图形。

实际的物体都是立体的，如一根轴就是立体的(图3)。为了研究物体的形状，需要从不同侧面去观察它，这样就得到了各种平面图形，如图4和图5。从这些平面图形的形状和大小，就能了解这个物体的形状和大小。



图 3

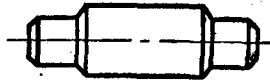


图 4



图 5

初等平面几何主要研究最基本、最常用的平面图形——直线形和圆。

研究什么问题，这要从生产实践的需要来看。制造产品，测量地形，建筑房屋等等，都提出了下面的问题：

首先要根据形状定尺寸。例如，一根阶梯形的轴，定出哪些尺寸，形状大小就确定了呢？就是说，要研究确定图形的条件。

其次要根据尺寸去划线。加工一个工件时，往往要先在材料上划线。

另外，加工和检验时，往往还要根据知道的尺寸去求出不知道的尺寸。就是说，要根据图形的性质，从已知的长度、角度去推求未知的长度和角度。

总之，就是要研究确定图形的条件和图形的性质，研究作

图的方法, 研究从已知推求未知的方法。其中, 研究确定图形的条件和图形的性质, 是最基本的问题。

现实世界的图形是多种多样的, 就是由直线和圆组成的图形也是变化万千, 当然不可能一个个地去研究。那么怎么去研究呢?

人们在生产实践中积累了丰富的图形知识, 也创造了研究图形的方法。如丈量土地, 遇到不规则的地块时, 总是把它分成几个规则的地块来丈量。这样的实践经验说明了一个道理: 复杂的图形可以分解为简单的图形来研究。

平面几何在研究图形时也是这样, “为要决定并且比较一切直线形的面积, 人们就把它分成三角形。”如轴的平面图, 就可以分解成长方形和梯形(图 6), 而长方形和梯形, 又可以分解成三角形(图 7)。可见,

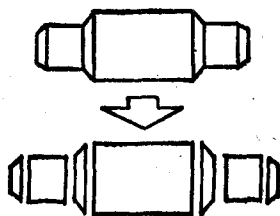


图 6

组成直线形的基本图形是三角形。抓住这个基本图形来研究, 其他直线形问题就好解决了。圆形的研究, 也要借助于三角形。因此, 在平面几何中, 三角形的研究是很重要的。

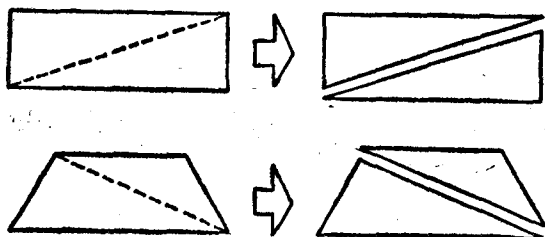


图 7

本书分上、下两篇。上篇研究平面几何，在第一章里，先讲一些有关线段、角、圆的简单性质和命题的基本知识；在后几章里，就以三角形为基本线索进行研究。下篇在平面几何的基础上简要地介绍立体几何的知识。

# 上篇 平面几何

## 第一章 基本知识

### 第一节 基本图形的简单性质

初等几何研究的平面图形是由线段、角和圆弧构成的。我们先来学习关于线段、角和圆的概念。

#### 线段、射线和直线

##### 1. 线段.

工人砌墙时用的标线, 农民插秧时拉紧的秧绳, 等等, 都是线段的形象. 当我们用直尺把两点连结起来, 就得到一条线段. 这两个点叫做线段的端点.

一个点用一个大写字母表示. 一条线段可以用表示它的两个端点的大写字母来表示, 如线段  $AB$ ; 也可以用一个小写字母来表示, 如线段  $a$  (图 1-1).



图 1-1

连结两点的线段的长度, 叫做这两点间的距离.

常用的长度单位是米(m)、厘米(cm)、毫米(mm), 或尺、寸等.

线段的长度,除了用刻度尺直接度量外,还可以用两脚规配合刻度尺来量(图 1-2)

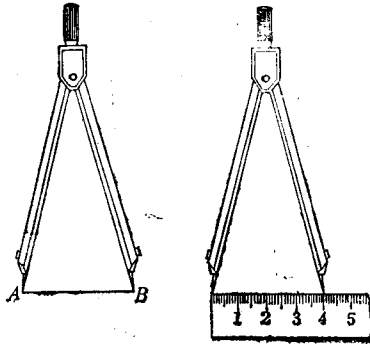


图 1-2

在农村和工厂,经常用到的度量长度的工具有折尺、测绳、卡钳等(图 1-3).

当零件的精度要求较高时,常用游标卡尺(图 1-4)、分厘卡(图 1-5)等来测量.

如果把两条线段  $AB$  和  $CD$  迭置在一起,它们的端点  $A$  和  $C$ 、 $B$  和  $D$  都各相重合(图 1-6),这两条线段就叫做相等的线段.这个关系可以表示为:

$$AB=CD \text{ 或 } CD=AB.$$

在迭置线段的时候,若端点  $A$  和  $C$  重合,而  $B$  落在线段  $CD$  里面的一点  $B'$ (图 1-7),那么就说线段  $AB$  小于线段  $CD$  或线段  $CD$  大于线段  $AB$ ,把它们写成:

$$AB<CD \text{ 或 } CD>AB.$$

这时,两条线段的长度是不等的.

制图或划线时,比较两条线段的长短,常用两脚规,如图

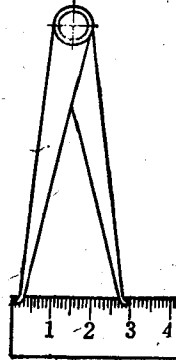
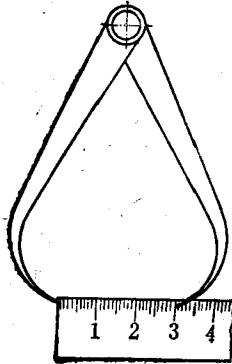
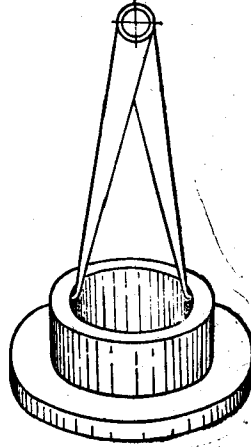
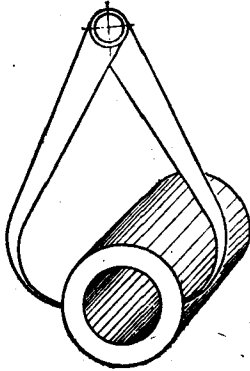
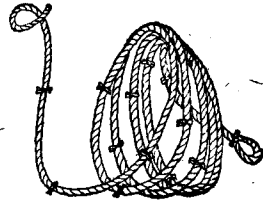
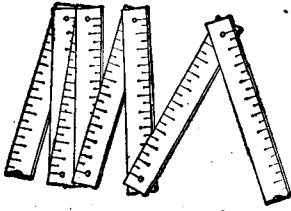


图 1-3



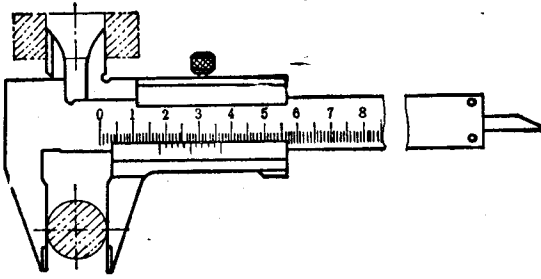


图 1-4

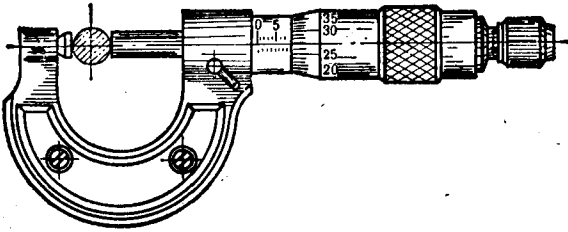


图 1-5

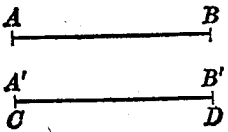


图 1-6

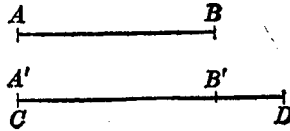


图 1-7

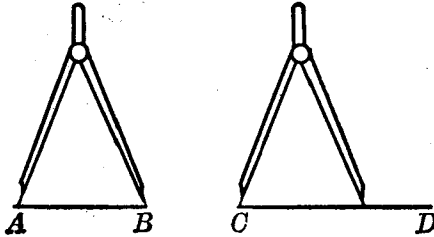


图 1-8