工程硕士 应用数学 系列教材

应用概率统计

应用数学

陈魁 编著

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

工程硕士应用数学系列教材

应用概率统计

陈魁 编著

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

(京)新登字 158 号

内 容 提 要

本书内容包括概率论、统计推断、试验设计三部分。内容紧密联系实际，例题丰富多样，便于自学，各章有一定数量的习题，书后有全部习题的答案或提示，并附有 SAS/STAT 程序库使用简介和常用数表与正交表。

本书是为工程硕士研究生编写的教材，也可供大学生使用，并可作为报考硕士研究生考生的复习参考书，还可供工程技术人员、科研人员和教师参考。

书　名：应用概率统计
作　者：陈　魁
出版者：清华大学出版社(北京清华大学学研大厦，邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者：清华大学印刷厂
发行者：新华书店总店北京发行所
开　本：787×960 1/16　**印张**：25.5　**字数**：553 千字
版　次：2000 年 3 月第 1 版　2000 年 8 月第 2 次印刷
书　号：ISBN 7-302-01018-8/O・225
印　数：4001～8000
定　价：25.00 元

编　委　会

编 者 的 话

电子计算机已经成为工程技术界、管理科学领域须臾离不开的工具。因此，学习用计算机解决工作中的各种实际问题已经成为各行业知识更新的必要环节，更是工程硕士学位的必修课程。为了适应这种形势，在几年教学经验的基础上我们编撰了这套《工程硕士应用数学》系列教程。

全套书由三本组成：《科学和工程计算基础》，《应用概率统计》和《运筹学基础》。

编书的指导思想是：**低起点，大跨度**。前者是指避免某些抽象的数学推理和繁琐的公式演绎。为了顾及有些读者复习基础知识的需要，书中专门设置了有关微积分、线性代数的章节。大跨度是指力图覆盖各领域中常常涉及到的数学问题。当然，全面覆盖是不可能的，仅仅是尽我们所能而已。另一个指导思想是：**着重内容的实用性，兼顾理论体系**。对于知识更新和进修工程硕士的需要来说，学习内容的实用性显得更加重要。因此，在题材选择和叙述重点上我们都把实用性放在首位。

除了介绍算法和相关的理论之外，《科学和工程计算基础》及《应用概率统计》两本书还介绍了目前流行的两个数学软件——Matlab 和 SAS。学员利用这些工具可以很容易地实现各种算法，从而避免了枯燥的程序设计工作。

还要提到的是，这套丛书虽然是针对工程硕士课程撰写的，但对于一般理工科大学生和研究生，也是一本可以使用的教科书。

最后，我们对清华大学研究生院和清华大学出版社的领导表示衷心的感谢，没有他们的指导和帮助这套丛书是不可能成功的。

编　者

1999 年 5 月

前　言

概率统计是应用非常广泛的数学学科，其理论和方法的应用遍及所有科学技术领域、工农业生产、医药卫生以及国民经济的各个部门。

概率统计是概率论与数理统计的简称。概率论研究随机现象的统计规律性；数理统计研究样本数据的搜集、整理、分析和推断的各种统计方法，这其中又包含两方面的内容：试验设计与统计推断。试验设计研究合理而有效地获得数据资料的方法；统计推断则是对已经获得的数据资料进行分析，从而对所关心的问题做出尽可能精确的估计与判断。

本书按概率论、统计推断、试验设计的顺序分 13 章叙述。大致是：第 1 章至第 6 章为概率论；第 7 章至第 9 章为统计推断；第 10 章至第 13 章为试验设计。可根据需要选用各部分内容。书后的附录 A SAS/STAT 程序库使用简介是由陆璇同志提供的。

作者在编写本书时力求做到通俗易懂，深入浅出，便于自学。对理论问题只作必要的叙述，而着力提供有关的实际背景，理论联系实际，阐明应用理论解决实际问题的方法。书中大量的例题中很多都来源于实际，这些例题本身就给读者提供了解决实际问题的方法，有助于提高读者分析问题和解决问题的能力。

限于作者的水平，书中难免有不妥或错误之处，恳请读者、专家批评指教。

陈　魁

1999 年 5 月于清华园

目　录

第1章　随机事件及其概率

世界上有各种各样的现象.从概率的观点考虑可分为两类,一类叫确定性现象,它指的是在一定条件下必然发生或必然不发生的现象.例如:人最终是要死的,上抛的石子一定要落下来.这些都是确定性现象.另一类叫随机现象,它指的是在一定条件下可能发生、也可能不发生的现象.例如:掷一只硬币落在平面上,可能字面朝上,也可能另一面朝上,如果着眼于字面朝上,这个现象可能发生,也可能不发生.远距离射击一个目标,可能击中,也可能击不中,如果着眼于击中目标,这个现象可能发生,也可能不发生.这些都是随机现象.随机现象有两个特点:(1)在一次观察中,现象可能发生,也可能不发生,即结果呈现不确定性;(2)在大量重复观察中,其结果具有统计规律性.例如,多次重复投掷硬币,字面朝上的次数大体上占一半.概率论是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

1.1　随机事件

随机事件是概率论研究的对象.它是随机试验中出现的结果.

1.1.1　随机试验

具有以下几个特点的试验叫随机试验.

(1) 试验具有明确的目的;

(2) 在相同条件下可以重复进行;

(3) 试验的结果不止一个,所有结果事先都能明确地指出来;

(4) 每次试验之前,预料不出会出现哪个结果.

随机试验通常用字母 E 表示.

例 1.1.1　下列试验都是随机试验:

E_1:掷一只骰子,观察朝上的那一面的点数;

E_2:在一批产品中,任取一件,观察是正品,还是次品;

E_3:在一批产品中,任取 3 件,记录正品的件数;

E_4:射击一目标,到击中为止,记录射击次数;

E_5:从一批灯泡中,任取一只,测其寿命.

1.1.2　随机事件

在随机试验中,每一个可能出现的结果,叫随机事件.随机事件用大写字母 A,B,C 等

表示.

随机事件分类如下.

基本事件:最简单的不能再分的单个事件叫基本事件,例如,在E_1中,“点数为1”、“点数为2”、……、“点数为6”,都是基本事件.

复合事件:由两个或两个以上的基本事件组成的事件叫复合事件.例如在E_1中“点数小于4”、“点数为偶数”,都是复合事件.

另外还有两种事件.在随机试验中必然出现的结果叫必然事件.例如:在E_1中“点数小于7”就是必然事件.在随机试验中,决不会出现的结果叫不可能事件.例如在E_1中“点数大于6”就是不可能事件.这两种事件并不是随机事件,为了研究问题的方便,把它们归入随机事件,作为随机事件的两个极端情况.

1.1.3 样本空间

样本空间是概率论中的重要概念.在随机试验E中,每一个基本事件称为一个样本点,样本点的全体称为样本空间,记作Ω.它是样本点的集合.每个样本点都是这个集合中的元素.在每个随机试验中,确定样本空间至关重要.

例1.1.2 指出例1.1.1中各随机试验的样本空间.

解 $E_1: \Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$;

$E_2: \Omega_2 = \{\text{正品,次品}\}$;

$E_3: \Omega_3 = \{0,1,2,3\}$;

$E_4: \Omega_4 = \{1,2,3,\cdots\}$;

$E_5: \Omega_5 = \{t \mid t \geqslant 0\}$.

每个随机事件都是样本点的集合,是样本空间的一个子集.例如,在E_1中,若随机事件A是“点数小于4”,则$A = \{1,2,3\}$,它是Ω_1的一个子集.样本空间也是事件,并且是必然事件.

样本空间有以下三种类型:

(1) 有限集合:样本空间中的样本点数是有限的.如$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$.

(2) 无限可列集合:样本空间中样本点数是无限的,但可列出.如Ω_4.

(3) 无限不可列集合:样本空间中样本点数是无限的,又不可列.如Ω_5.

1.1.4 事件之间的关系和运算

1. 事件之间的关系(见图1.1).

(1) 包含关系:设有事件A,B,若由B发生必然导致A发生,则称A包含B,或B包含于A,记作$A \supset B$,任何事件都包含于Ω.

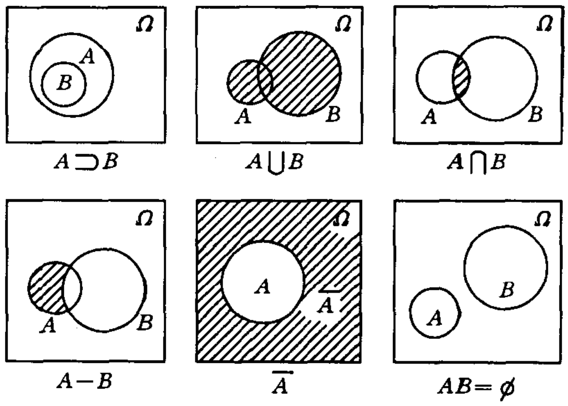

图　1.1

(2) 相等关系:若 $A \supset B$,同时 $B \supset A$,则称 A 与 B 是相等事件,记作 $A = B$.

(3) 事件的并(和):设有事件 A,B,C,若 A,B 中至少一个发生时 C 就发生,则称 C 是 A,B 的并(和) 事件. 记作 $C = A \cup B$.

n 个事件的并(和) 事件为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$,记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$,无穷可列个事件的并记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

(4) 事件的交(积):若 A,B 同时发生时 C 才发生,则称 C 为 A,B 的交(积),记为 $A \cap B$ 或 AB.

n 个事件的交记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$,无穷可列个事件的交记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

(5) 互不相容(互斥) 事件:若 A,B 不能同时发生,即 $AB = \varnothing$,则称 A,B 为互斥事件. 任何两个不同的基本事件为互斥事件.

(6) 对立事件:若样本空间 Ω 只含有事件 A,B,且 A,B 互斥,即 $A \cup B = \Omega, AB = \varnothing$,则称 A,B 为对立事件,记为 $A = \overline{B}, B = \overline{A}$.

(7) 事件的差:事件 A 与 $\overline{B}$ 的交称为 A 与 B 的差,记为 $A - B = A\overline{B}$.

2. 事件的运算

(1) 交换律:$A \cup B = B \cup A, AB = BA$;

(2) 结合律:$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$,

$(AB)C = A(BC) = ABC$;

(3) 分配律:$(A \cup B)C = AC \cup BC$,

$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$;

(4) 德摩根(De Morgan) 定律:$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

例 1.1.3　掷一只骰子,观察朝上一面出现的点数.

(1) 若记事件 A 表示“出现奇数点”，事件 B 表示“点数小于 5”，事件 C 表示“大于 3 的偶数点”，试用集合表示下列事件：$A\cup B, A\cup B\cup\overline{C}, AB, A-B, ABC$.

(2) 对事件 A,B，验证德摩根定律.

解 本题可采用列举法解之.

(1) 样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}, A=\{1,3,5\}, B=\{1,2,3,4\}, C=\{4,6\}$，所以

$A\cup B=\{1,3,5\}\cup\{1,2,3,4\}=\{1,2,3,4,5\}$;

$A\cup B\cup\overline{C}=\{1,2,3,4,5\}\cup\{1,2,3,5\}=\{1,2,3,4,5\}$;

$AB=\{1,3,5\}\cap\{1,2,3,4\}=\{1,3\}$;

$A-B=A\overline{B}=\{1,3,5\}\cap\{5,6\}=\{5\}$;

$ABC=\{1,3\}\cap\{4,6\}=\varnothing$.

(2) 由(1) 知 $\overline{A\cup B}=\{6\}$，又 $\overline{A}\,\overline{B}=\{2,4,6\}\cap\{5,6\}=\{6\}$，所以很明显，验证出 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$;

又由(1) 知 $\overline{AB}=\{2,4,5,6\}$,

$\overline{A}\cup\overline{B}=\{2,4,6\}\cup\{5,6\}=\{2,4,5,6\}$,

所以很明显验证出 $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 1.1.4 考察居民对 3 种报纸 A,B,C 的订购情况. 设事件 A,B,C 分别表示订购报纸 A,B,C，试表示下列事件：(1) 只订购 A；(2) 只订购 A 及 B；(3) 只订购 A 或 B；(4) 只订购一种报纸；(5) 正好订 2 种报纸；(6) 至少订 1 种报纸；(7) 不订任何报纸.

解 首先要正确理解各个事件的含义，在这个基础上，不难写出各个事件：

(1) 只订购 A：说明不订购 B，也不订购 C，因此它是 $A,\overline{B},\overline{C}$ 的交，即 $A\overline{B}\,\overline{C}$.

(2) 只订购 A 及 B：说明同时订 A 和 B，但不订 C，因此它是 $A,B,\overline{C}$ 的交，即 $AB\overline{C}$.

(3) 只订购 A 或 B：只订购 A 为 $A\overline{B}\,\overline{C}$，只订 B 为 $\overline{A}B\overline{C}$，“或”表示事件的并，因此它是 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}$.

(4) 只订购一种报纸：它表明只订 A(为 $A\overline{B}\,\overline{C}$) 或只订 B(为 $\overline{A}B\overline{C}$) 或只订 C(为 $\overline{A}\,\overline{B}C$)，“或”表示“并”，因此它是 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

(5) 正好订 2 种报纸：这与只订 2 种报纸是一样的，它表明只订 A 及 B 而不订 C(为 $AB\overline{C}$) 或只订 A 及 C 而不订 B(为 $A\overline{B}C$) 或只订 B 及 C 而不订 A(为 $\overline{A}BC$)，因此它是 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$.

(6) 至少订一种报纸：它是 $A\cup B\cup C$.

(7) 不订任何报纸：它是 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$，也可表示为 $\overline{A\cup B\cup C}$，因为它是(6) 的对立事件.

例 1.1.5 设两事件 A,B，若 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，问 A 和 B 是什么关系？