

工程中的纵向振动

朵英贤 编著

国防工业出版社



工程中的纵向振动

朱英贤 著

国防工业出版社

内 容 简 介

本书以连续介质中纵向振动为内容,结合工程中各种类似纵向振动的问题进行了讨论。着重介绍行波法在解题中的应用。

其中第一章至第五章论述了纵向振动的物理过程、数学模型、一般解法及叠加原理;第六章至第十三章介绍纵向振动在各种定解条件下的解析方法、图解方法和数值方法;第十四章至十五章概述了有限单元法的应用;第十六章引述了动力学相似和机电相似的基本概念。本书可供机械工作者、高等院校工科师生阅读及参考。

工程中的纵向振动

朵英贤 著

*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168¹/₃₂ 印张 8⁵/₈ 214 千字

1983年5月第一版 1983年5月第一次印刷 印数: 0,001— 5,600册

统一书号: 15034·2455 定价: 1.10元

前 言

提到纵向振动，不能不联系一般的连续介质。它包括固体、液体和气体，通常把后两者统称流体。连续介质在受到激振力的扰动以后，如果各处质点的振动速度远远小于它的传播扰动速度（声速），那么，介质内部的力学特性一般是遵守虎克(Hooke)定律的。而将介质的整个运动称为波动或振动。波动的一维现象之一就是纵向振动。对于纵向振动的一般论述常见于弹性理论，介质力学及流体动力学中。研究波动问题也即是数学物理问题，而纵向振动算是比较简单的了。虽然如此，长期以来属于纵向振动的许多实际工程中仍然维持着过时的甚至是初等的分析方法。

纵向振动所涉及的工程领域是很多的，我们只能讨论其中的一小部分。虽是这样，所论述的各种实际问题，都有一定的典型意义。一类问题是类似螺旋弹簧和杆系结构的振动。对于许许多多的人，弹簧是司空见惯而不屑一顾的元件。“司空见惯”，说明各种工程机械都离不开它，在很多机械中还承担着很重要的工作。“不屑一顾”，是说不论在设计中还是制造中可以说近于马马虎虎。很多弹簧是在动态下工作的，可是几乎一致的情况是用静态估算它的强度，因此，在许多已经定型的产品中，由于弹簧过早折断不得不定为“易损件”。随着机械动力特性的不断加剧，动态和静态的负荷差别更加扩大。这个问题并不是今日才发现，早在十九世纪末，有人在研究弹性杆件的纵向碰撞时，曾用螺旋弹簧代替杆件作验证，结果和理论十分吻合，说明弹簧在动力作用下可以当作一根弹性杆件，它的动力强度可以用波动理论来处理。但是弹簧设计人员嫌计算过程太麻烦而弹簧似乎易于卷制，仍然不愿放弃老办法，因此，直到现在，用一成不变的安全系数去处理各种不同的动态强度也成了司空见惯的事。另一类问题是管道流体

的动力过程。如柴油发动机供油系统就是一个例子。过去, 发动机转速较低, 供油率不高, 可将流体近似看成恒定低速流动, 用初等理论来得到近似解答, 这就掩盖了许多实质性问题, 使得在高速发动机的设计中出现一些不可思议的事情。对于任何管道中的流体 (如机床液压系统, 往复式压缩机管路系统), 不论是液体还是气体, 其动力过程和供油系统是类似的, 只有用波动理论才能阐明它, 或者找到它的规律。当然, 在书中还尽量叙述了其它常见的类似于纵向振动的例子。

研究连续介质的纵向振动, 在于求解方程 (2.1), 这就是著名的一维波动方程——双曲型方程。可以用各种方法得到它的通解, 但是, 解的具体形式则取决于定解条件 (初值和边值)。面对着许许多多实际问题, 有了定解条件不一定就能得到解的具体形式。有的定解条件可能没有数学表达式, 有的即使有数学表达式, 但要经过一定的变换才能找到解, 有的甚至是一些离散的条件。所以, 长期以来在遇到振动问题时, 采用大为近似的方法就成了合乎逻辑的事, 只有在计算机出现以后和近代计算技术不断发展的情况下, 力学工作者和工程技术工作者才感到轻松许多。

正像读者所看到的, 这本册子里主要是用了“特征线法”或称“行波法”, 这个解法在数值解中并不常见。但在某些情况下具有独到的优点, 这才被系统地运用。对于理想或近于理想的介质, 应用“特征线法”引伸出来的图解算法是非常方便的, 读者可以看到, 不论初值和边值是何种形式 (解析的或非解析的), 图解的时候基本上都能找到解, 而且解题速度之快和解的形象是很突出的, 各种因素对解的影响跃然纸上。对于非理想介质, 给出了用“行波法”经过离散的数学模型, 用此法解题, 存贮单元特别少。

鉴于模拟技术的发展, 在最后一章专门讨论了相似性原理, 包括力学相似及机电相似 (或称机电类比)。数学方程的共同性正是自然界统一性的证明, 不能看成是单纯的形式相似。这种相似导

致运动规律的相似，这就给人们提供了间接了解某一种运动的手段。模拟是一个专门技术，我们只能作一点滴的介绍。在机电相似原理中，只介绍了比较常用的阻抗型(或称力——电压型)类比。还必须注意，在运用机电类比时，只限于线性理论。

鉴于许多人对于纵向振动的物理过程不太熟悉，在本书的前面几章，结合工程中常见的实例作了一般的叙述，所提供的参考文献完全能弥补这方面空白。

在各种例题的推演中，力学量的单位采用了工程制。本单位制的基本量是长度、力和时间，而质量是导出量不是基本量。有时容易把工程制和实用制混淆起来(实用制中基本量是长度、质量、和时间，而力是导出量不是基本量)，这里还得说明。

由于作者水平有限，实践有限，不可能将内容十分广泛的纵向振动详尽地进行阐述。错误更是难免，只有请大家指教。

作者在此谨向樊大钧教授和范元勋(高级)工程师致以衷心的感谢。他们审阅原稿以后，提出很多宝贵的指导性意见，在他们的授意下充实了许多内容。

作 者

1982年

目 录

第一章	波动及纵向振动	1
第二章	纵向振动模型	10
第三章	纵向振动方程的解	24
第四章	振动的叠加	42
第五章	波的反射与折射	61
第六章	行波法及图解基础	74
第七章	管道流体受常力作用的过程	94
第八章	弹簧的强制运动	107
第九章	弹簧的惯性运动	126
第十章	发动机供油系统液力过程(例题)	153
第十一章	弹链运动	163
第十二章	纵向振动的数值解法	171
第十三章	纵向振动的迭代计算法	185
第十四章	有限单元法(一)	205
第十五章	有限单元法(二)	219
第十六章	相似性及其应用	237
附录		248
附录1	考虑管壁变形时压力波速度	248
附录2	气体使用不可压缩公式的极限	249
附录3	压缩波与膨胀波	251
附录4	等熵条件下流体能量方程	252
附录5	液体的阻尼系数 R	255
附录6	固体内耗系数 R	257
附录7	液体压缩系数与密度	259
附录8	渗漏问题	260
附录9	计算程序	261
主要参考文献		268

第一章 波动及纵向振动

波动，也就是物质振动的传播，是物质运动最基本的形式之一，它赋予我们所在的世界以生命和活力。波动无处不有，无时不有，大至宇观，小至微观，而形式却变化多端。由于振动在水中传播的特点（水的波动），人们用来进行水下侦察、通讯和爆破工作，建立各种“SONAR(声纳)”系统。至于那美妙的旋律，狂风的呼啸，闹市的喧闹，都是空气的波动（习惯称作声波）。黑暗时离不开灯火，天空中不时见到星星的闪烁，这是光的波动。电子显微镜能更精细地分辨金属构造，鉴别使人头痛的病毒，射电望远镜可以探索更加遥远的星际，这是电磁波的功绩。热波使人们能在大寒天得到温暖，而在大热天又能吃到爽快的食物。机器零件的锻制，坦克装甲的破坏，则全靠应力波的传递。实物粒子（如电子、基本粒子）的波动性，已是共知的事实，量子力学波（或几率波）在量子力学中用来预言电子基本粒子的性状。至于对引力波的观测与验证，已使科学家们花费了半个世纪以上的时间。

可以说，人类生活在一个不停地波动着的世界里，“万籁俱寂”是根本不存在的，如果说，生物界的生命也是依靠波动的种种形式进行维系，也许既不荒唐，也不夸张，譬如，脉搏跳动，吐故纳新，肌肉张弛以及肢体的运动，全是波动的一种形式。除此以外，无论是地球内外，或者太阳系中，回荡着另外一种性质的波——激波。如空中雷鸣、放炮开山、原子爆炸、火山爆发、夜空流星以及太阳风等。所以，各种各样的波动比比皆是，人们一刻也离不开它。随着现代科学技术的不断发展，人类对于波动的认识也将进一步深化，进一步扩展。

就像数的概念在数学中具有那样的普遍性和重要性，波的概念在物理中和工程技术中也具有相当的普遍性和重要性。不了解

波动这种运动形式，就无法真正理解物理，认识世界。

在所有这些不同类型的波中，科学和技术对于机械波（包括液体中的压力波，气体中的声波和固体中的应力波）和电磁波（包括光波和无线电波）的认识和利用最早最多，无独有偶，这两类波有着相当多的共同特性，这就是：

1. 波在运行中遇到不同介质时，在界面要发生反射和折射（或透射），可以全反射，也可以全透射。一般的规律是反射角等于入射角（对界面法线），折射率（随介质而异）等于折射角及入射角的正弦比。

2. 由此，波在运行中可以实施聚焦和发散，可以变向运行。

3. 波具有线性特性，可以互相叠加。因此，一个很复杂的波可以看成是许多简单波的合成。可借助于富氏级数把一个复杂波分解成许多简谐波，而简谐波正是波动中最基本最简单的波形。白光就是各种不同频率的简谐波的合成。一种复杂的结构振动也是许多简谐波的合成。

4. 由此，波在遇到障碍时产生衍射，同频率的波相遇时产生相干作用。

5. 波的运行速度随介质改变。电磁波波速 $a = \sqrt{1/\mu\epsilon}$ ，机械波波速 $c = \sqrt{E/\rho}$ ， μ 、 ϵ 、 E 及 ρ 都是介质常数。所以，在空气中以近于光速运行的无线电波，在玻璃中就要减慢。压力波在液体中的行速要比空气中快得多。

6. 波动也遵守能量守恒。在不考虑介质中热损失的情况下，机械波辐射的能量总是以介质分子的位能和动能交替地进行变换，其总和始终保持常量。电磁波中也有相似的情况。因此，波在运行中发生反射时，反射波与折射波的功率之和必等于入射波的功率。

我们举出这些主要的共同特性，这都是比较熟悉的规律。了解这些共同特性对于本书将要研究的纵向波动——纵向振动是有益的。

纵向波动是机械波的重要组成部分。按照定义，介质分子振动的方向与行波运行的方向平行时，称为纵向波动（以区别于横向波动）。液体和气体只有容变弹性和长变弹性，没有切变弹性，一般只能传递纵向波动（即纵波），只有水的表面波是个例外，它是由重力和表面张力而不是由切变弹性引起的波动。固体中三种弹性都存在，除了能传递纵波，还能传递其它的波（横波、扭曲波、畸变波及瑞利波等）。我们将要讨论的仅仅是纵波，即纵向振动，而且是一维纵波，即一维纵向振动，如杆系结构的纵向碰撞，螺旋弹簧的动力压缩，管道气体及管道液体的非定常流动以及类似于上述情况的各种工程问题。在数学中，柱对称流动和轴对称流动也称作一维纵向波动，因为波动方程在柱坐标及极坐标中都能化为一维问题。我们打算讨论这类问题。

现代工程中，作为一维纵向振动的类型和例子越来越多了，各种型式的液压系统，各式风动系统，空气压缩机管路系统及各种气动测量系统的动力过程都是一维纵向振动，“水锤”的产生和利用也是一维纵向振动的例子。有许多实际问题，虽然不纯粹是一维纵向振动，但是，用纵向振动理论来处理，往往要比旧的方法更加接近实际，如武器中弹链的运动，机车拖动列车的过程。

让我们重复一下纵向波动产生的过程。

介质在受到外界激励以后，以激振源为起点，介质分子依次产生振动，由于介质内部发生变形，则产生内部抗力——响应。如果介质振幅不大，干扰强度也不大（使介质产生的振动速度远小于声速），那么，抗力和变形接近线性关系，即遵守虎克(Hooke)定律。这个抗力称为弹力，弹力有使介质恢复原状的特性。在外加干扰逐渐解除的时候，介质在弹力作用下逐渐恢复原状，这时弹力也就逐渐消失。如果外加干扰是动态的，由于介质中惯性的存在，外载和抗力将对介质交替起作用，使各处介质在其平衡位置作机械振动。这种振动，先从干扰源发生，然后以声速向各处传

播。这是一种弹性波动，是介质中依靠弹力传播的弹性波。这种弹性波虽属机械波，但不是唯一的机械波，例如在液体表面，重力和表面张力都具有使液面恢复原状——平衡位置的作用，所以当液面受到扰动时，在它的作用下产生液体表面波动，这虽是机械波，却不是纵波。

现在让我们观察一个纵向波动产生的过程（图1.1）。活塞不停地作简谐运动，向前运动的时候，邻近活塞端的介质被迫向前运动，并且推动相邻介质，由于惯性，两层介质便克服原有内力受到压缩，伴随着产生高压。紧接着，第二层介质以其所获的动能推动另一层相邻介质，这两层之间又产生压缩和高压，但时间比前两层的压缩要滞后。如此重复，这种层与层之间相继发生的压缩作用，由活塞的顶端开始，以介质的声速传向远处。层与层之间的压缩程度随活塞的速度变化，各层介质之间形成的弹力——压强和压缩量是成比例

的增减。当活塞向后运动的时候，活塞主动后退，第一层介质由于惯性作用，与活塞顶端形成暂时低压区，第一层介质失去平衡，依靠一层和二层之间原有的压力迅速移向顶端，于是一层和二层介质之间便加大了距离，形成稀疏，产生低压区。

紧接着二层介质因失去平衡，在压力作用下迅速移向第一层，于是二层和三层

之间也形成稀疏，产生低压区。这种层与层之间相继发生的稀疏作用，由活塞顶端开始，以声速移向远处。层与层之间的稀疏程度也随活塞速度变化，各层介质之间的弹力变为张力，它和稀疏

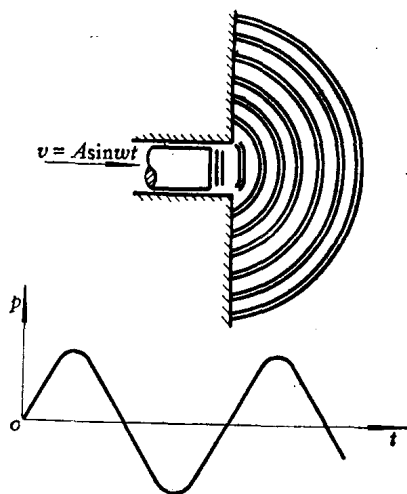


图 1.1

程度成比例。活塞每往复一次，便要周期地产生一次压缩过程和稀疏过程。在连续运动的情况下，一层层交替产生的压缩层和稀疏层，由近及远，以球面形式传播，这是球面波。利用介质疏密状况对光的不同反应，可以拍摄这个过程。

如果把活塞运动引起的波动限制在一个等截面管道中（图1.2），那么，介质中压缩和稀疏过程只能沿着管道传播，波前不再是球面形状，而是平面，则是平面波。在这里，球面（三维）波动已变为一维纵向波动。在三维波动中，通过单位面积的波动能量是和能源（活塞）的距离的平方成反比，而在平面波（一维波动）中，沿管道任何截面中通过的波动能量是不变的。在忽视管壁对于流体的摩擦和吸附的情况下，可以认为管道中的波动是平面波。



图 1.2

在仅仅是一个右传（或左传）波的情况下，介质分子的振动速度和激振速度相同，只是随着距离激振源的位置不同有相位差别，介质内部压力和激振速度成比例关系。如果激振方式是压力，那么，介质内部的压力和激振压力相同，只有相位差别，分子的振动速度和激振压力成比例关系。这是简单波的情形。如果激振是定常的，那么，管道中只是一种定常流动。如果介质受到两个以上激振的作用，或者同时有右传波和左传波，根据波的线性特性，介质的振动诸元就是叠加的结果。这是复合波的情形。下面举出驻波管中行波变为驻波的过程（数学分析见第四章）。

如果管的一端承受简谐作用的激振，一端刚性封闭（图1.3），刚性封闭就是封闭端面不发生变形，不吸收能量。管道中气体承受振动以后，便以声速向封闭端传播，在封闭端，介质便以所获

得的振动速度碰击支承面，同时以相同速度被反弹回来。介质以一定的速度规律连续碰击支承面，必然有相同规律的反向速度由支承面产生。这样，一个等强度的反向运动的波由支承面开始，向管道另一端运行。反射后的波和正向波沿着管道逐次相遇，介质的振动产生叠加，表现在支承面的总合现象是该处介质的合成速度是零。由图 1.4 可以看到，反射波的振动速度恰好是入射波在支承面背后虚线部分的映像。由于两个波的振动速度沿着管道叠加，便得到合成速度的波腹（最大速度位置）和波节（速度为零的位置）（图 1.3）和合成压力的波腹和波节（这两类波腹波节的相对位置相好错开波长的四分之一）。这是一个驻波管，如果在管道中均匀地布以轻质细粉，将会发现，细粉已分段堆集。堆得最高的地方正是速度波节所在的位置，也是压力波腹所在的位置。而在速度波腹（或压力波节）所在的位置，细粉被刮得一点不留，统统挤到波节附近。如果管道中的介质是液体，同样也会产生这样的驻波，只是波长比气体短得多，上面那种现象不容易显现。所

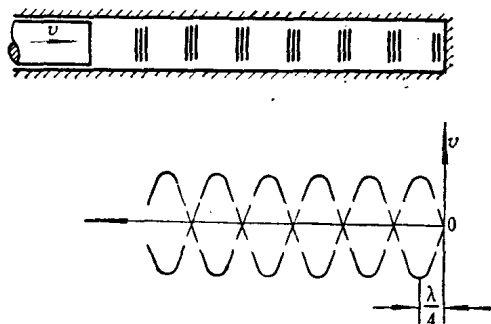


图 1.3

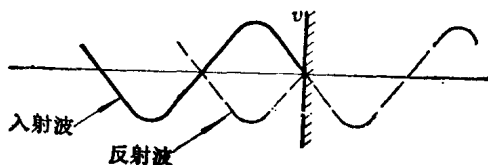


图 1.4

以，在驻波管中得到的是一个驻波，而不是行波。

图 1.5 为一根螺旋弹簧，左端和一推杆连在一起，右端被刚性固定着。如果推杆不停地作简谐运动，沿着弹簧轴线，将会等距离的交替地出现“密圈”和“疏圈”。这也是驻波，圈最密的地方正好是速度波节或负荷波腹，圈最疏的地方正好是速度波腹或负荷波节。如果以弹性杆件代替螺旋弹簧，按理，也应该产生驻波，但是相对于弹性杆件来说，很难找到一种支承材料能满足刚性的要求（见第五章）。

如果管道中封闭端是非刚性支承，则有部分能量被支承所吸收，反射波强度低于入射波，这时也有驻波产

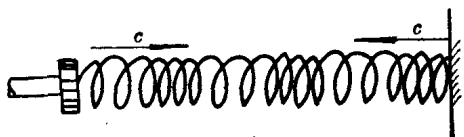


图 1.5

生，但不同于上述驻波（参阅第四章）。弹簧也是如此。这种完全反射和部分反射的特性将在第五章中进行讨论。

纯粹的纵向振动是不存在的。杆件在发生纵向振动的时候，必然伴随着横向振动。螺旋弹簧的纵向运动总是伴随着簧圈的横向振动（胀大和收缩），固体中，这种横向振动，是纵向振动的响应。流体在管道中运动时，由于压力的变化，使管壁也发生横向振动[●]。这些横向振动的第一个效应是使纵向振动的能量下降。对于杆件来讲，只有在振动波长比横向尺寸大得多的情况下，方可不考虑横向振动对纵向振动的效应，应用纵向振动理论能得到足够精确的解。对于杆件，实现纵向振动的另一个困难是不能保证杆件横截面上各点有相同的振动，因为杆的端面在承受外加负荷时，不能保证各点同时发生接触，因而同一截面上各点的运动不一致。而这两点对于螺旋弹簧则较易实现。一般来讲，螺旋弹簧纵向振动波长远比其横向尺寸大，同时压力波传播速度比较低，使

● 按理，流体没有切变弹性，仅能传播纵波。此处所指管壁横向振动，并不是液体有横向振动的属性。

得有充分时间让端面接触良好。所以，用螺旋弹簧代替弹性杆件进行纵向振动实验，能得到更加精确的结果。对于管道中流体来讲，管壁的振动可以忽略，在高压系统中还可以用折算办法（附录1）考虑进去。综上所述，在实际情况下，所谓纵向振动无疑是相对的。

在理想介质中，如果没有外力加以制止，已经发生的纵向振动便会无休止地进行下去，对于有界的振动，波的反射也会不停地进行。无非是介质分子一忽儿具有动能，一忽儿具有位能，振动不会衰竭。但是，在实际情况下，理想介质也是不存在的。固体在变形的时候，内部有内摩擦存在（也叫作内耗），流体在运动的时候，内部有粘性。无论内摩擦，或是粘性，都要消耗振动能量，使部分能量变为热量散去，振动将逐渐衰竭，趋于消失。只有在材料内摩擦很小，流体粘性很小，不计它而又能得到足够精确解的情况下，才能相对地认为介质是理想的。否则，就是非理想介质。本书对这两种介质都有不同解法，对于理想介质，运用图解计算比较方便，对于非理想介质给出了数值解法。需要说明的是，在实际工程中，随机因素是很多的，在确定一种介质是理想的还是非理想的，一方面要判定忽略随机因素造成的误差，一方面还要看实际需要的计算精度。这要很丰富的经验。根据一般常识，水在管道中作定速流动，每一公尺长的管道中因粘性而损失的压强不超过1.5%，在工程中是可以忽略的，发动机中用的轻柴油及输气管道中的气体都有类似的性质。在物理课的演示中还可以看到，当物体的重量比弹簧质量大得多的情况下，物体在弹簧作用下的振动几乎是不衰减的。对于以上这些介质，忽略内耗和粘性的影响是完全可以的。

在讨论弹性波动时，别忘了一些基本假设：介质振动的速度远远小于波动传播的速度。我们能够证明，气体流速的变化超过65 m/sec时，已失去弹性而具有明显的塑性。如果介质振动的速度继续增加，直到接近和超过介质当时的波速，那就要产生激波。

放炮时，炮口气流以超音速速度运动形成炮口激波。炮弹以超音速速度飞行，在弹的头部形成弹道激波。超音速飞机因激波而产生“音障”。这主要是能量在介质中释放或积集的速度太快（强度太大，或者运动物体速度太快）而形成的一个很薄的波峰。在波峰前沿出现很大的压力、温度和振动速度的跃变，会产生很高的冲击力和温度。介质的物理特性（粘性、导热率等）在波峰前后也截然不同，出现间断。只是在传播过程中，能量逐渐被扩散和被吸收，激波强度迅速下降（固体中衰减最快），逐渐转变为一般的波动。另一方面，为了保持介质的弹性，波幅也不能很大，如空气中压力的波幅超过 0.3kg/cm^2 时，介质开始失去弹性，当然，气体的弹塑性质比较明显。在液体中尤其在固体中波幅的变化量可以容许很大。但是不管怎样，要保持或近于保持介质在传递振动时的弹性性质，激振或激励强度要受到限制，以产生微幅波。因此，本书讨论的纵向振动都是微幅的，而在工程中微幅波是大量存在着。

第二章 纵向振动模型

本章讨论动态情况下, 连续介质中振动方程的建立。

(一) 固体中的纵向振动方程

对于弹性体, 骤然加力以后, 其作用不能立即传到物体的各个部分。开始时只有着力点附近部位受到扰动, 距力较远的部分并未受到扰动, 各部分所产生的形变系以弹性波的形式在物体中传播。这一节, 首先讨论纵向振动在等截面弹性杆件中的传播。

图 2.1 c 为一弹性杆件, 取杆的长度方向为 x 轴, 并假定杆的截面上各点受力均匀, 截面时刻保持为平面。设截面面积为 A , 在取一单元, 长度为 dx , 单元两侧受力分别为

$$P, P + \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

该单元体积内的质量为 $A\rho dx$ 。受力后, 单元发生变形位移 ξ 。于是, 根据牛顿 (Newton) 第二定律,

$$A\rho dx \cdot \partial^2 \xi / \partial t^2 = P - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

ρ 为材料密度。由于

$$P = -AE\varepsilon = -AE \cdot \partial \xi / \partial x$$

ε 为相对变形, E 为杨氏弹性模量。所以

$$\partial P / \partial x = -AE \cdot \partial^2 \xi / \partial x^2$$

(注意: 在介质中压力或负荷的增量和变形的增量是反向的)。代入方程, 得

$$\rho \cdot \partial^2 \xi / \partial t^2 = E \partial^2 \xi / \partial x^2$$

或

$$\partial^2 \xi / \partial t^2 = c^2 \cdot \partial^2 \xi / \partial x^2 \quad (2.1)$$

这便是著名的纵向振动方程, 其中

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.2)$$