中国精算师资格考试用书

寿险精算数学

SHOUXIAN JINGSUAN SHUXUE

卢仿先 曾庆五 编著

南开大学出版社

寿险精算数学

卢仿先　曾庆五　编著

南开大学出版社
中国·天津

图书在版编目(CIP)数据

寿险精算数学 / 卢仿先，曾庆五编著. —天津：南开大学出版社，2001.9

(中国精算师资格考试用书)

ISBN 7-310-01426-X

Ⅰ. 寿... Ⅱ. ①卢... ②曾... Ⅲ. 人寿保险—精算学 Ⅳ. F840.62

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 035155 号

出版发行	南开大学出版社 地址：天津市南开区卫津路 94 号 邮编：300071 电话：(022)23508542
出版人	肖占鹏
承　印	天津市宝坻第二印刷厂印刷
经　销	全国各地新华书店
版　次	2001 年 9 月第 1 版
印　次	2001 年 9 月第 1 次印刷
开　本	880mm×1230mm 1/32
印　张	10
插　页	4
字　数	285 千字
印　数	1—5000
定　价	19.00 元

编审委员会

总　序

概括而言，精算是利用数理模型来估计和分析未来的不确定事件(风险)产生的影响，特别是对于财务的影响。随着保险作为一个特殊的金融行业的诞生并日益发展，以保险为基础而产生的精算科学也不断发展。在西方发达国家，精算不仅早已形成完整的体系，而且在社会保险、金融、投资、证券等领域广泛应用，成为风险管理的重要组成部分。从事精算工作的精算师是一种职业化很强的从业人群，世界上许多国家不仅建立了精算职业团体，还建立了精算师资格考试体系，在保险法规中给予了明确规定。《中华人民共和国保险法》第一百一十九条规定："经营人身保险业务的保险公司，必须聘用经金融监督管理部门认可的精算专业人员建立精算报告制度。"

自 1988 年中国精算教育开始以来，我国的精算教育和精算职业已得到很大的发展，但距离精算的职业化还存在一定的差距。为了促进中国精算职业的发展，中国保险监督管理委员会于 1999 年 10 月 9 日组织了中国首次精算师资格考试，有 43 人通过考试获得了中国精算师资格。为了加速中国精算职业的发展，我国正在建立一套符合中国实际的中国精算师资格考试体系作为认定中国精算师资格的依据。《中国精算师资格考试用书》是我国出版的第一套最具权威性的精算书籍，一是为参加中国精算师资格考试的人员提供用书，同时为有志于精算事业的读者提供完整、科学的精算知识和精算实务指南。我们诚挚地希望通过本套书的出版，能够使更多的人对精算事业注入更大的热情，为中国精算事业的发展作出贡献。

本次出版的《利息理论》、《寿险精算数学》、《风险理论与非寿险精算》、《生命表的构造理论》和《寿险精算实务》是精算师资格考试的考试用书。在此出版之际，特向给予我们资助和帮助的荷兰全球人寿保险国

际公司、瑞士再保险公司、英国保诚集团和李雄德、钟杰鸿、何嘉丽、张春蕊、郑景文、张振堂等专家表示衷心的感谢。

中国精算师资格考试用书
编审委员会
2000 年 4 月

目 录

第一章　生存分布与生命表

§ 1.1　死亡年龄的概率

寿险保单其保险金的给付是以被保险人的生存或死亡为前提条件的，所以，被保险人在投保时的未来寿命是建立寿险精算数学模型的重要因素之一。为此，本节讨论死亡年龄的概率分布，这是建立寿险精算数学模型的基础。

1.1.1　连续型死亡年龄的有关概率

对于一个刚出生的婴儿来说，其死亡年龄 X 是一个连续型随机变量，用 $F(x)$ 表示这个随机变量 X 的分布函数，则

$$F(x) = Pr(X \leqslant x) \qquad (x \geqslant 0) \tag{1.1.1}$$

这里，通常假设 $F(0) = 0$。

假设随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 是可导的，且用 $f(x)$ 表示随机变量 X 的密度函数，则

$$f(x) = F'(x) \qquad (x \geqslant 0)$$

或

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \tag{1.1.2}$$

这时，其均值与方差分别是

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \int_0^{+\infty}(x-\mathrm{E}(X))^2 f(x)\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2\end{aligned}$$

1.1.2 离散型死亡年龄的有关概率

若将新生婴儿的死亡年龄 X 取整数值(即取周岁数)并用字母 K 表示,则 $K=[X]$,那么,离散型随机变量 K 的概率分布律可表述为:

死亡年龄(K)	0	1	2	3	…
概　　率(q)	q_0	q_1	q_2	q_3	…

其中,$\sum_{i=0}^{\infty} q_i = 1, q_i \geqslant 0 \quad (i=0,1,2,\cdots)$。

这时,其分布函数、均值和方差分别是

$$F(k)=\sum_{i\leqslant k} q_i \qquad (i\geqslant 0)$$

$$\mathrm{E}(K)=\sum_{i=0}^{\infty} i q_i$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(K) &= \sum_{i=0}^{\infty}(i-\mathrm{E}(K))^2 q_i \\ &= \mathrm{E}(K^2)-(\mathrm{E}(K))^2\end{aligned}$$

§ 1.2 生存分布

我们从概率的角度来考察某一新生婴儿群体的生存分布情况。

1.2.1 生存函数

假设某一新生婴儿群体的死亡年龄 X 的分布函数为 $F(x)$,则 $s(x)=1-F(x)$ 称为生存函数,即

$$s(x)=Pr(X>x) \qquad (x\geqslant 0) \tag{1.2.1}$$

式(1.2.1)表示新生婴儿能活到 x 岁(即 x 岁以后死亡)的概率。

由于我们通常假设 $F(0)=0$,则 $s(0)=1$,其实际意义是,我们所

讨论的新生婴儿是以 100% 的概率保证在出生时是活着的。

可以看出，函数 $F(x)$ 与 $s(x)$ 都可以描述新生婴儿能活到 x 岁的概率。但是，在概率论与统计学中，人们习惯于采用分布函数 $F(x)$ 来描述；而在精算学和人口统计学中，则习惯于采用生存函数 $s(x)$ 来描述。

从分布函数 $F(x)$ 的性质，我们可得出生存函数 $s(x)$ 的一些直观性的性质：

①$s(0) = 1, \lim\limits_{x \to +\infty} s(x) = 0$；

②$s(x)$ 是单调递减的函数；

③$s(x)$ 是一个右连续的函数。

关于生存函数 $s(x)$ 的一般图形，可用图 1.2.1 表示。

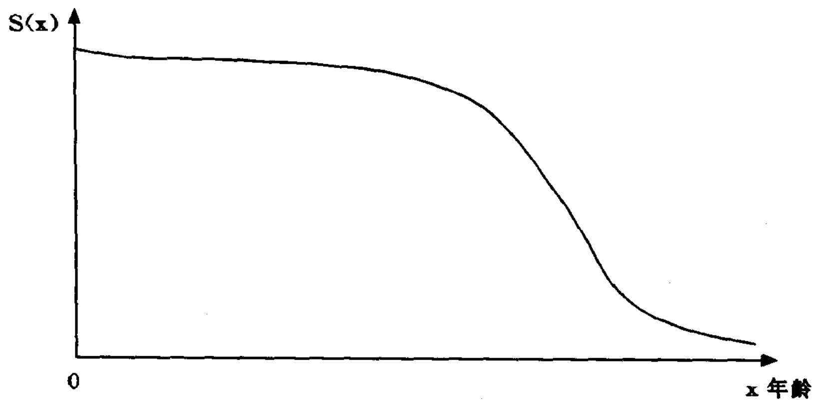

图 1.2.1

人的生命是有限的，通常人的寿命不会超过某一特定年龄。也就是说，存在一个正数 ω，当 $x < \omega$ 时，$s(x) > 0$；当 $x \geqslant \omega$ 时，$s(x) = 0$。这时，称正数 ω 为**极限年龄**。如从图 1.2.1 中的曲线表示可以看出，极限年龄 ω 是 100 岁。

例如，某一群体人的生存服从生存函数

$$s(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{96} & (0 \leqslant x < 96) \\ 0 & (x \geqslant 96) \end{cases}$$

读者不难看出，生存者的极限年龄是 $\omega = 96$ 岁。

根据概率原理，新生婴儿在年龄 x 岁与 $z(x < z)$ 岁之间死亡的概率是

$$\begin{aligned} Pr(x < X \leqslant z) &= F(z) - F(x) \\ &= s(x) - s(z) \end{aligned}$$

类似地，新生婴儿在 x 岁时仍活着的条件下，于年龄 x 岁与 $z(x < z)$ 岁之间死亡的条件概率是

$$\begin{aligned} Pr(x < X \leqslant z \mid X > x) &= \frac{Pr(x < X \leqslant z)}{Pr(X > x)} \\ &= \frac{s(x) - s(z)}{s(x)} \\ &= 1 - \frac{s(z)}{s(x)} \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

一般地，新生婴儿在 x 岁时仍生存的条件下，于年龄 y 岁与 $z(x \leqslant y < z)$ 岁之间死亡的条件概率是

$$\begin{aligned} Pr(y < X \leqslant z \mid X > x) &= \frac{Pr(y < X \leqslant z)}{Pr(X > x)} \\ &= \frac{s(y) - s(z)}{s(x)} \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

为叙述方便起见，我们引入符号 (x) 表示年龄为 x 岁的人，X 是新生婴儿的死亡年龄，则新生婴儿在 x 岁活着的条件下，未来仍生存的时间（或生存期）是 $X - x$，那么 $X - x$ 称为新生婴儿在 x 岁时的未来寿命，简称 (x) 的未来寿命（或未来余命），并用符号 $T(x)$ 表示。即新生婴儿在 x 岁时仍生存的条件下，有 $T(x) = X - x$。

1.2.2 连续型未来寿命的生存分布

用概率来反映生存者的未来寿命 $T(x)$ 是精算学中的一项基本内容。在精算学中还引用了一组国际通用的精算函数符号来描述随机变量 $T(x)$ 的概率分布。这些精算函数符号，在以后的章节中将陆续给予介绍。下面，我们用精算函数符号记

$${}_tq_x = Pr(T(x) \leqslant t) \qquad (t \geqslant 0) \tag{1.2.4}$$

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = Pr(T(x) > t) \qquad (t \geqslant 0) \tag{1.2.5}$$

符号 ${}_tq_x$ 可解释为 (x) 将在 t 年内死亡的概率。从概率论的角度来说，${}_tq_x$ 是关于随机变量 $T(x)$ 的分布函数；从精算学的角度来说，${}_tp_x$ 是关于 $T(x)$ 的生存函数，即表述 (x) 将在 $x + t$ 岁时仍生存的概率。

特别地，当年龄 $x=0$ 时，$T(0)=X$，即 0 岁新生儿的未来寿命就是刚出生婴儿的死亡年龄，且

$$ {}_{x}p_{0}=s(x) \qquad (x\geqslant 0) \tag{1.2.6}$$

当 $t=1$ 时，式(1.2.4)与式(1.2.5)所定义符号中的前缀允许省略，即

$$\begin{aligned} q_x &= {}_1q_x = Pr(T(x)\leqslant 1) \\ &= Pr((x)\text{ 将在 1 年内死亡}) \\ p_x &= {}_1p_x = Pr(T(x)>1) \\ &= Pr((x)\text{ 将至少活到 } x+1 \text{ 岁}) \end{aligned}$$

(x) 生存 t 年后，在 $x+t$ 岁与 $x+t+\mu$ 岁之间死亡这一事件的概率，可用精算函数符号 ${}_{t|\mu}q_x$ 表示，即

$$\begin{aligned} {}_{t|\mu}q_x &= Pr(t<T(x)\leqslant t+\mu) \\ &= {}_{t+\mu}q_x - {}_tq_x \\ &= {}_tp_x - {}_{t+\mu}p_x \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

特别地，当 $\mu=1$ 时，符号 ${}_{t|\mu}q_x$ 可简写成 ${}_{t|}q_x$。

下面，我们考察精算函数符号 ${}_tq_x$、${}_tp_x$、${}_{t|\mu}q_x$ 与生存函数 $s(x)$ 之间的关系。

由于 (x) 的未来寿命 $T(x)=X-x$，隐含着新生婴儿在 x 岁时仍生存这一前提条件，所以事件 $\{T(x)\leqslant t\}$ 与事件 $\{0\leqslant X-x\leqslant t|X>x\}$ 是同一事件，从而随机变量 $T(x)$ 的分布函数为

$$ {}_tq_x = Pr(T(x)\leqslant t) = Pr(x<X\leqslant x+t|X>x)$$

运用式(1.2.2)，并且 $z=x+t$，则

$$ {}_tq_x = 1-\frac{s(x+t)}{s(x)} \tag{1.2.8}$$

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= 1-{}_tq_x \\ &= \frac{s(x+t)}{s(x)} \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

对于 ${}_{t|\mu}q_x$，运用式(1.2.7)、式(1.2.8)和式(1.2.9)，可得

$$\begin{aligned} {}_{t|\mu}q_x &= Pr(t<T(x)\leqslant \mu+t) \\ &= {}_{t+\mu}q_x - {}_tq_x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{s(x+t)-s(x+t+\mu)}{s(x)} \\
&= \frac{s(x+t)}{s(x)} \cdot \frac{s(x+t)-s(x+t+\mu)}{s(x+t)} \\
&= {}_tp_x \cdot {}_\mu q_{x+t} \qquad (1.2.10)
\end{aligned}
$$

式(1.2.10)表明：(x) 在 $x+t$ 岁与 $x+t+\mu$ 岁之间死亡的条件概率，等于 (x) 在 $x+t$ 岁时仍生存的条件概率与 $(x+t)$ 在以后的 μ 年内死亡的条件概率之积。

我们讨论未来寿命 $T(x)$ 的概率分布，在人寿保险业务经营中具有重要的现实意义。这里因为死亡保险的保险金通常是在被保险人死亡时给付的，即被保险人的死亡保险金是在 x 岁投保后的 $T(x)$ 处给付的。但是，在实际的业务运作过程中，其可操作性较差。为使这一现实性意义落到实处，我们需要引入离散型未来寿命的概率分布。

1.2.3 离散型未来寿命的生存分布

设 $K(x)$ 表示 (x) 未来寿命的周年数或 (x) 在未来生存的整年数，即 $K(x)=[T(x)]$（其中，[ ]是取整函数），即 $K(x)$ 是 $T(x)$ 的最大整数部分。例如，若 $T(x)=34.25$，则 $K(x)=34$；若 $T(x)=35.98$，则 $K(x)=35$。

根据 $K(x)$ 的定义，则 $K(x)$ 是取值于 0,1,2,⋯ 非负整数集上的一个随机变量，且对于任意非负整数 k，当 $k \leqslant T(x) < k+1$ 时，当且仅当 $K(x)=k$，则随机变量 $K(x)$ 的概率分布律可表示为

$$Pr(K(x)=k)=Pr(k \leqslant T(x) < k+1) \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

由于连续型随机变量 $T(x)$，有

$$Pr(T(x)=k)=Pr(T(x)=k+1)=0 \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

故随机变量 $K(x)$ 的概率分布律又可表示为

$$
\begin{aligned}
Pr(K(x)=k) &= Pr(k < T(x) \leqslant k+1) \\
&= {}_{k+1}q_x - {}_kq_x = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x \\
&= {}_kp_x \cdot q_{x+k} = {}_{k|}q_x \quad (k=0,1,2,\cdots) \qquad (1.2.11)
\end{aligned}
$$

在不易发生混淆的情况下，在以后的有关章节中，通常将符号 $T(x)$ 简写成 T，符号 $K(x)$ 简写成 K。

§ 1.3 死力

上一节我们所讨论的问题是(x)将在某一段时间内死亡的有关精算函数。本节我们所讨论的问题是，(x)将在某一瞬间内死亡的变化情况，即死力。

1.3.1 死力的定义及性质

所谓死力，是指在到达x岁的人当中，在此一瞬间里死亡的人所占的比率。死力也称瞬间死亡率或死亡密度，通常在x岁时的死力用符号μ_x表示。其基本关系式是

$$\mu_x = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{s(x) - s(x+\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{s(x)}$$

$$= -\frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{F'(x)}{1-F(x)} \qquad (1.3.1)$$

死力也如同生存函数一样，可以用来确定随机变量X的分布。

由式(1.3.1)中可知$\mu_x \geqslant 0$，并将式(1.3.1)中的x改为y后可得

$$-\mu_y \mathrm{d}y = \frac{1}{s(y)} \cdot \frac{\mathrm{d}s(y)}{\mathrm{d}y} = \mathrm{d}[\ln s(y)]$$

对上式从x到$x+t$进行积分，得

$$-\int_x^{x+t} \mu_y \mathrm{d}y = \int_x^{x+t} \mathrm{d}[\ln s(y)]$$

$$= \ln\left(\frac{s(x+t)}{s(x)}\right) = \ln({}_tp_x)$$

即

$${}_tp_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_y \mathrm{d}y\right) \qquad (1.3.2)$$

或

$${}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} \mathrm{d}s\right) \qquad (1.3.3)$$

特别地，当$x=0, t=x$时，式(1.3.3)转化为

$$s(x) = {}_xp_0 = \exp\left(-\int_0^x \mu_s \mathrm{d}s\right) \qquad (1.3.4)$$

从而随机变量 X 的分布函数与密度函数分别是

$$F_X(x)=1-s(x)=1-\exp(-\int_0^x \mu_s \mathrm{d}s) \tag{1.3.5}$$

和
$$f_X(x)=-s'(x)=\mu_x \cdot \exp(-\int_0^x \mu_s \mathrm{d}s)$$
$$={}_xp_0 \cdot \mu_x \tag{1.3.6}$$

$T(x)$ 的分布函数与密度函数分别是

$$F_T(x)=1-{}_tp_x=1-\exp(-\int_0^x \mu_{x+s}\mathrm{d}s) \tag{1.3.7}$$

和
$$f_T(x)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}({}_tp_x)={}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \qquad (t \geqslant 0) \tag{1.3.8}$$

例 1.3.1 设死力 $\mu_x=\dfrac{1}{1+x}, x \geqslant 0$。

试求：

(1) 随机变量 X 的分布函数与密度函数；

(2) 随机变量 $T(x)$ 的分布函数与密度函数；

(3) $Pr(10<X \leqslant 30)$；

(4) ${}_{5|5}q_{20}$。

解： (1) $F_X(x)=1-\exp(-\int_0^x \dfrac{1}{1+s}\mathrm{d}s)$

$$=1-\exp(-\ln(1+x))$$
$$=\frac{x}{1+x} \qquad (x \geqslant 0)$$
$$f_X(x)=F'_X(x)=\frac{1}{(1+x)^2} \qquad (x \geqslant 0)$$

(2) $F_T(t)=1-\exp(-\int_0^t \dfrac{1}{1+x+s}\mathrm{d}s)$

$$=1-\exp(-\ln\frac{1+x+t}{1+x})$$
$$=\frac{t}{1+x+t} \qquad (x \geqslant 0, t \geqslant 0)$$
$$f_T(t)=F'_T(t)=\frac{1+x}{(1+x+t)^2} \qquad (x \geqslant 0, t \geqslant 0)$$

(3) $Pr(10<X \leqslant 30)=F(30)-F(10)$

$$=\frac{30}{1+30}-\frac{10}{1+10} \approx 0.058\ 65$$