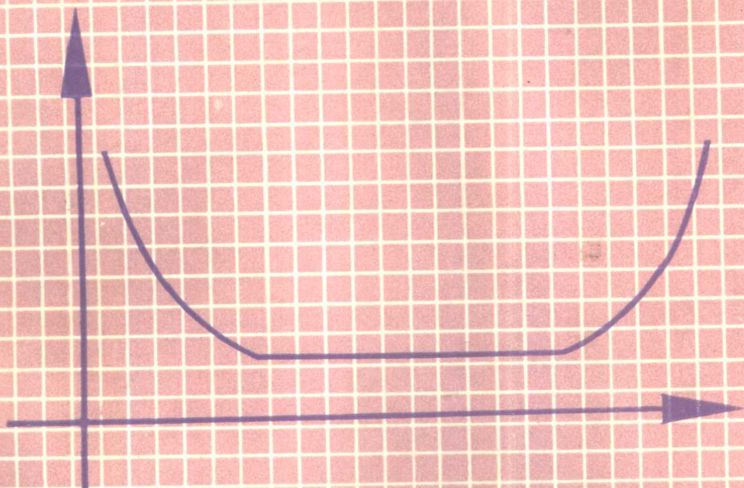
KEKAOXING TONGJI

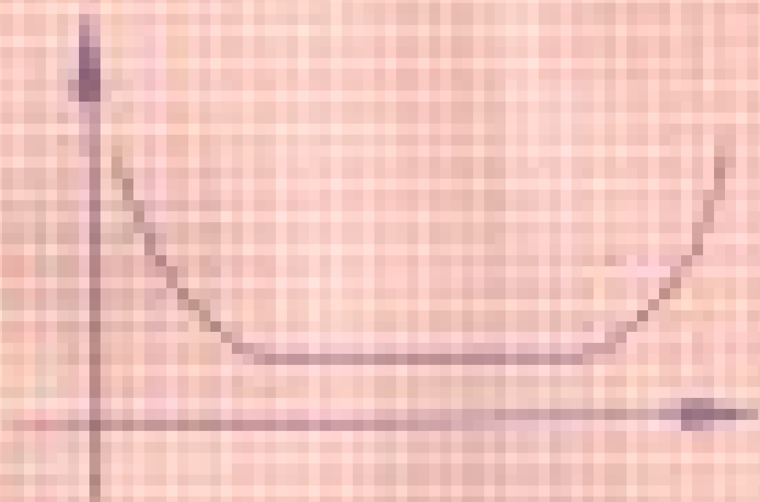
可靠性统计



华东师范大学出版社

KEKAOXING TONGJI

可靠性统计



可 靠 性 统 计

茆诗松 王玲玲 编著

华东师范大学出版社

可 靠 性 统 计

茆诗松　王玲玲 编著

华东师范大学出版社出版
（上海市中山北路 3663 号）
新华书店上海发行所发行　　上海印刷七厂印刷

开本 850×1168　1/32　印张 16.75　450 千字
1984 年 3 月第 1 版　1984 年 3 月第 1 次印刷
印数 1—15,000

统一书号：13135·013　　定价：1.90 元

前　言

可靠性是产品寿命指标的总称，故产品的寿命指标又称为产品的可靠性指标，它反映了一个产品在规定时间内和规定条件下，完成规定功能的能力。现在从一个电子元器件、一台电视机到一台设备、一个系统都在研究可靠性指标。随着科学技术的发展，产品的可靠性愈来愈受到人们的重视。由于产品的寿命是一个随机现象，所以确定一种产品的可靠性指标最后都归结为一个统计推断问题。从本世纪四十年代末人们就开始研究这类从生产实际中提炼出来的统计问题，这类统计问题在经典的数理统计学中很少被研究，但在近几十年来已成功地解决了一批这类统计问题，并在实际中收到了良好的效果，总结出一些具有特色的基本概念和基本方法。可是随着科学技术的发展，一些新的问题又不断地提出。就在这样的环境中，一个新的数理统计分支——可靠性统计已逐步成熟起来。

近十多年来，国内的电子、机械、冶金、建筑、邮电、航天等行业提出各种可靠性问题和学习可靠性的要求。为了向国内工程技术人员和有关专业大学生介绍可靠性统计的基本概念、基本内容和基本方法，我们编写了一份讲义，几年来在上海和外地一些单位使用，收到了一定的效果。根据实际工作者的意见，我们又作了多处修改。这本书的形成过程就是这样的。借此机会，我们向对这本书的初稿提出宝贵意见的同志们表示感谢。

全书共分七章。第一章是叙述一些学习可靠性统计不可少的概率基础知识。第二章至第六章是可靠性的基本内容，我们所选的材料是可靠性统计中较为成熟的部分，也是可靠性统计的基础部分。我们的愿望是：一是能看懂，二是能运用，三是能在此基础上开始阅读一些国内外的有关文献资料。第七章是叙述有关系

统可靠性方面的一些问题。这方面内容涉及面很广，现有成果也不少。但这方面的统计方法尚不够丰富，还需要大力开展研究。为了帮助读者掌握可靠性统计的基本内容，每章后面附有一定数量的习题，供读者选用，所附的习题答案也供读者参考。

因限于水平，错误之处在所难免，读者如能给予批评指正，将是对我们最好的支持和鞭策。

编　者

目　　录

第一章 概率基础

§1.1 事件与概率

一、随机现象

在人类的实践活动中会遇到形形色色的自然现象。按其结果来说，总可以把它们分为两类：一类是确定性现象，另一类是随机现象。在一定条件下，必然发生某种结果的现象称为确定性现象；在一定条件下，并不总是出现相同结果的现象称为随机现象。例如：异性电荷相吸是确定性现象，电视机的寿命就是一个随机现象。

确定性现象有其内在规律性，这一点是容易理解的。随机现象也是有其内在规律性的，只不过表现得更隐蔽一些，不易被人们认识罢了。譬如探讨产品的不合格率、打靶命中率、人口死亡率、平均寿命等都是人们认识随机现象规律性的一种表现。但是这种规律性只有在进行大量重复观察和试验之后，才能被揭露出来。所以随机现象的规律性也称为统计规律性。“概率论与数理统计”就是研究随机现象统计规律性的数学学科。可靠性是研究产品、设备和系统寿命特征的一个学科，由于产品的寿命是随机现象，所以可靠性中的基本概念和一些解决问题的方法也是基于“概率论与数理统计”而建立起来的。要掌握可靠性，首先要学一些概率论与数理统计的基础知识。

二、样本空间

为了认识一个随机现象，首先必须考察随机现象的各种可能发生的结果。我们把一个随机现象的一切可能发生的基本结果的全体称为这个随机现象的样本空间，常用 S 表示。例如：

（1）抽检一个产品，假如我们只需把产品分为二类，那末其样

本空间 $S_1=\{$合格品，不合格品$\}$；假如我们要把产品分为四类，那末样本空间 $S_2=\{$一等品，二等品，三等品，废品$\}$。从这个例子可以看出，选用什么样的样本空间去描述一个随机现象要看我们研究的需要而定。假如把合格品记为“0”，不合格品记为“1”，则样本空间 S_1 可以记为 $S_1=\{0,1\}$。这种记号在概率论中常常被采用。

（2）电子仪器在一小时内受到的冲击次数，其样本空间是

$$S=\{0,1,2,\cdots\cdots\}。$$

（3）电视机的寿命，其样本空间为

$$S=\{t:t\geqslant 0\}。$$

这里冒号前的 t 表示样本空间的基本结果，冒号后的“$t\geqslant 0$”表示基本结果应具有的性质。譬如 $t=2$ 满足这个性质，它就是一个基本结果；$t=-2$ 不满足这个性质，它就不是一个基本结果。这种表示方法今后常要用到。

一个样本空间中的基本结果的个数可以是有限个，可以是可数个，也可以是无穷不可数个。样本空间中基本结果的个数不同，其研究方法也有所不同，这是应注意的。

三、随机事件

随机现象的某种可能结果称为随机事件，简称为事件，常用大写字母 A、B、C……等表示。显然，随机现象的一个基本结果就是一个事件，这种事件称为简单事件。随机现象的若干个基本结果也可组成一个事件，这种事件称为复杂事件。例如：

（1）掷一颗骰子，“出现 1 点”、“出现 2 点”、……、“出现 6 点”都是简单事件。另外“出现偶数点”也是掷一颗骰子的一种可能结果，它也是一个事件，不过是复杂事件，因为它是由 2、4、6 三个基本结果组成。假如把事件“出现偶数点”记为 A，那末 $A=\{2,4,6\}$。类似地，假如把事件“出现 1 点”记为 B，那末 $B=\{1\}$。其它事件亦可类似表示。

（2）电子仪器在一小时内受到的冲击次数。下面都是一些不同的复杂事件：

$$B_1=\text{“冲击不多于 3 次”}=\{0,1,2,3\}。$$

B_2 = "冲击不少于 10 次" = $\{10,11,12,\cdots\cdots\}$.

(3) 电视机的寿命。下面都是一些不同的复杂事件：

C_1 = "寿命不超过一千小时" = $\{t: 0 \leqslant t \leqslant 1000\}$.

C_2 = "寿命不低于三千小时" = $\{t: t \geqslant 3000\}$.

C_3 = "寿命在二千到五千小时之间" = $\{t: 2000 \leqslant t \leqslant 5000\}$.

从上述例子可以看出，随机现象的任一个事件都可以看作是由其若干个基本结果组成的。

在随机事件中还有两种事件必需加以研究，一种是必然事件，另一种是不可能事件。在一定条件下，每次试验肯定会发生的结果称为必然事件，每次试验肯定不会发生的结果称为不可能事件。从样本空间来看，必然事件是由其全体基本结果组成的，就用S表示必然事件，而不可能事件则不含有任何基本结果，故常用ϕ表示。

四、随机事件发生的频率

随机事件的发生是带有偶然性的，但随机事件发生的可能性的大小是可以比较的。而人们希望知道的也正是一个随机事件发生的可能性的大小。用什么量来反映事件发生的可能性的大小呢？最直观、最简单的想法是用"频率"来度量一个事件发生的可能性的大小。

定义 在相同的条件下进行n次试验，事件A出现的次数m称为频数，比值

$$P^*(A)=\frac{m}{n}$$

称为事件A发生的频率。

从上述定义，容易看出频率的两个基本性质：

性质 1 $0 \leqslant P^*(A) \leqslant 1$.

性质 2 $P^*(S)=1, P^*(\phi)=0$.

五、事件的概率

用频率来度量一个事件发生可能性的大小是基本合理的，但还有缺点，这个缺点主要表现在频率会有波动。不同的人去做同

一个试验，事件A发生的频率$P^*(A)$常常是有差别的，即使同一个人，前n次试验和后n次试验中事件A发生的频数m也不尽相同。但事件A发生的可能性只能用一个数来度量，否则就无法进行推理和计算。怎样来克服这个缺点呢？人们在实践中发现，在大量重复同一试验中，事件发生的频率有一个稳定的趋势。

为了验证这个事实，在概率论的发展史上，有人对掷硬币试验做了大量的重复试验，试验结果见表1.1。从表1.1更能看出，不管什么人去掷硬币，当试验次数逐渐增多时，$P^*(A)$逐渐地稳定于0.5。假如用这个稳定值0.5去度量"出现正面"这一事件发生的可能性，那末它既保留了频率的特性(能反映事件A发生的可能性的大小)，又消除了频率波动的这个缺点(这个稳定值只有一个)。这个稳定值0.5是客观存在的，是下面我们定义事件的概率的客观基础。

表 1.1

试验者	n	m	$P^*(A)$
蒲丰	4040	2048	0.5080
K.皮尔逊	12000	6019	0.5016
K.皮尔逊	24000	12012	0.5005

定义 在相同条件下进行大量重复试验，随着试验次数的无限增大，事件A的频率$P^*(A)$就逐渐地稳定于某个实数p，在p的附近作一些微小的波动。我们称此稳定值p为事件A发生的概率，记为$P(A)=p$。

从概率的定义中，我们可以看出事件的概率与其频率一样，也有如下的两个基本性质：

性质1 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

性质2 $P(S)=1$，$P(\phi)=0$。

综合上述，事件的频率是个试验值，会有波动，只能近似反映事件发生可能性的大小。事件的概率是个理论值，它是由事件的本质属性决定的，它是唯一确定的，它能精确反映事件发生可能性的大小。所以从理论上讲，概率比频率更完美些，便于推理和计

算，而从实用上看，可以用频率去估计概率，并且试验次数愈多，这种估计也就愈精确. 任何一个事件的概率都可以用"大量重复试验"所得到的频率去解释它。

六、古典概率

从概率的定义可以看出，要确定一个事件的概率，需要进行大量的观测或试验，然后用其频率去估计概率。虽然这要消耗大量的人力、物力和时间，但在实际中还是常常需要这样做的。不过，在一些特殊场合下，可以不通过试验，而用论理的方法来确定其事件的概率。长期的实践表明，这样来确定某一类事件的概率是妥当的。

定义 假如一个随机现象具有如下两个特点：

(1) 它的样本空间 S 中的元素(基本结果)只有有限个，譬如 n 个，记 $S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，

(2) 每个基本结果发生的可能性是相同的，

则称此随机现象为古典概型(因为在概率论发展初期，这类随机现象是主要的研究对象)。假如事件 A 是这随机现象的某种结果，它含有 k 个基本结果，则事件 A 的概率就规定为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{所含基本结果数}}{S\text{所含基本结果数}}.$$

[例1.1] 连掷三次硬币，观察正、反面出现情况。设事件 A 为"恰有一次正面出现"，事件 B 为"至少一次正面出现"，求事件 A 与 B 的概率。

解：若记"出现正面"为 0，"出现反面"为 1，这个随机现象的样本空间含有 8 个基本结果。即

$$S=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),$$
$$(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\},$$

而事件 A 与 B 分别含有如下的一些基本结果，

$$A=\{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\},$$

$$B=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),$$
$$(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}.$$

是于

$$P(A)=\frac{3}{8},\qquad P(B)=\frac{7}{8}.$$

［例 1.2］ 100 只外形一样的同型号三极管中，按电流放大系数分类，60 只属于 B 类，40 只属于 C 类．现从中任抽 3 只，求“三只都是 B 类”（记为 A）的概率是多少？假如抽样按下述二种方式进行：

（1） 每次取出一只，测试后放回，然后再任抽下一只，这种抽样称为返回抽样．

（2） 每次测试后不放回，在剩下的三极管中再任抽下一只，这种抽样称为不返回抽样．

解：（1）返回抽样情形，这时因样本空间 S 中含有基本结果较多，罗列它们不仅不可能，也无必要，只要能准确地把所有的基本结果数计算出来就可以了．因为是返回抽样，每次都有 100 种可能，连抽三次，故所有可能的不同取法共有 100^3 个．再考虑事件 A 所含基本结果数，要抽出的 3 只都是 B 类，就相当于这 3 只管子都在 B 类的 60 只管子中抽出的，因为每次有 60 种可能，连抽 3 次，故所有可能的不同取法共有 60^3 个，所以

$$P(A)=\frac{60^3}{100^3}=0.216.$$

（2） 不返回抽样情形，这相当于从 100 只管子中一次就抽出 3 只．所以这是一个组合问题．故样本空间 S 所含的基本结果数 $n=\binom{100}{3}$．“抽 3 只管子都是 B 类”，相当于只在 B 类 60 只管子中任抽 3 只，作不返回抽样，这也是一个组合问题，故事件 A 所含的基本结果数 $k=\binom{60}{3}$，所以

$$P(A)=\frac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}}\approx 0.212.$$

这个例子告诉我们，同一个问题，由于抽取方式不同，所得事

件的概率也会不同。在实际问题中，不注明抽取方式，就是“不返回抽样”。

§1.2 事件与概率的运算性质

一、事件之间的关系和事件的运算

在研究事件之间关系和事件的运算时，“把事件看作由若干个基本结果所组成的事件”这一观点将发挥重要作用。这一观点可用一张简单的图形来表示。在图 1.1 上，正方形表示样本空间 S，事件 A 就可用正方形中某一个几何图形表示，譬如用圆来示意事件 A。

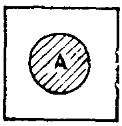


图1.1 事件 A

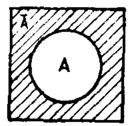


图1.2 对立事件 $\overline{A}$

1. 样本空间 S 中一切不属于事件 A 的基本结果所组成的事件称为事件 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$，如图 1.2 所示。对立事件 $\overline{A}$ 意味着事件 A 不发生。例如

(1) 在抽检产品中，事件“产品合格”的对立事件是“产品不合格”；事件“至少出现一个不合格品”的对立事件是“没有一个不合格品”。

(2) $\overline{A}$ 的对立事件就是原来的事件 A，即 $\overline{\overline{A}}=A$。所以对立事件是相互的，必然事件 S 与不可能事件 ϕ 互为对立事件。

2. 若事件 A 的每一个基本结果都包含在事件 B 中，则称事件 B 包含事件 A。记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$。如图 1.3 所示。事件 B 包含事件 A 意味着事件 A 发生必导致事件 B 发生。对任一个事件 A，必有 $S\supset A\supset\phi$。

如果 $A\supset B$ 和 $B\supset A$ 同时成立，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A=B$。例如在掷骰子试验中，事件“出现偶数点”与事件“不出现奇

数点"就是二个相等的事件，相等的二个事件将看作是一样的。

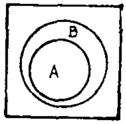


图 1.3　$B \supset A$

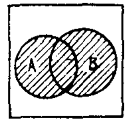


图 1.4　$A \cup B$

3．由属于事件A或属于事件B的一切基本结果组成的事件称为事件A与B的和事件，记为$A \cup B$，如图 1.4 所示。和事件$A \cup B$意味着事件A与B中至少发生一个。对任意事件A，必有$A \cup \overline{A} = S$。

二个事件的和事件可以推广到有限个事件的和事件与可数个事件的和事件，分别记为$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$与$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$。

4．由事件A与事件B中公共的基本结果组成的事件称为事件A与B的交事件，记为$A \cap B$或AB，如图 1.5 所示。交事件AB意味着事件A与B同时发生。对任意事件A，必有$A \cap \overline{A} = \phi$。

类似地，还可以定义一列事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$的交事件，记为$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$，或前$n$个事件的交事件，记为$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$。

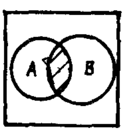


图 1.5　$A \cap B$

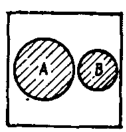


图 1.6　互不相容

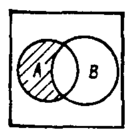


图 1.7　$A - B$

5．若事件A与事件B没有公共的基本结果，则称事件A与B互不相容，否则称相容事件。如图 1.6 所示。事件A与B互不相容意味着事件A与B不可能同时发生；即$AB = \phi$。

6．所有属于事件A，但不属于事件B的基本结果组成的事件称为事件A对B的差，记为$A - B$，如图 1.7 所示。事件A对B的差意味着事件A发生而事件B不发生。特别，对立事件$\overline{A}$是必然

事件S对事件A的差，即$\bar{A}=S-A$，另外，有$A-A=\phi$。

二、概率的运算性质

下面罗列的概率的运算性质都可用古典概型加以验证，实际上，它们在任何有概率可言的场合都是正确的。

性质 3 设A与B是任意二个事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

性质 4 设A与B是两个不相容事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

性质 5 设$\bar{A}$为事件A的对立事件，则

$$P(\bar{A})=1-P(A).$$

性质 6 设事件A包含事件B，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

$$P(A)\geqslant P(B).$$

§1.3 条件概率与独立性

一、条件概率

前面在讨论事件与概率时总是在一定条件下进行的，因此在计算事件A的概率$P(A)$时，只要考虑给定的条件即可。但在许多场合会遇到这样的情况，除了给定的条件外，还知道在另一个事件B发生的情况下，再求事件A的概率。这时，由于条件增加了，概率的计算也有所变化，我们先来看一个例子。

[例 1.3] 考虑有二个小孩的家庭，按年龄大小写出他（她）们的性别，则其样本空间S含有四个基本结果：

$$S=\{(男,男),(男,女),(女,男),(女,女)\}.$$

假如生男育女的可能性是相同的，那么这是一个古典概型问题。记事件A为“这样的家庭中有二个男孩”，则

$$P(A)=\frac{1}{4}.$$

如果我们事先知道这家中至少有一个男孩（记为B），则所有可能的基本结果只有S中的前三个，由于条件增加了，样本空间中