高等结构力学丛书之一

弹性工程力学

何福照

人民交通出版社

高等结构力学丛书之一

Tanxing Gongcheng Lixue

弹 性 工 程 力 学

何 福 照

人 民 交 通 出 版 社

内 容 提 要

本书主要采用张量分析方法介绍弹性工程力学的原理，着重结合土建工程有关问题，如桥梁上部构造的扭转、基础下的应力分析、正交异性板、路基路面的应力和沉陷的分析等进行介绍。本书可供从事土建工程的技术人员及大学土建工程专业师生参考。

弹 性 工 程 力 学

何 福 照

责任编辑 张征宇

人民交通出版社出版发行

（北京和平里东街10号）

各地新华书店经销

人民交通出版社印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：13.75 字数：360千

1990年4月 第1版

1990年4月 第1版 第1次印刷

印数：0001—1650册 定价：11.60元

02-212-156-0

ISBN7-114-00721-3

U·00424

出版说明

我社组织编写的“高等结构力学丛书”，包括（暂定名）：结构力学基础、拱结构的稳定与振动、曲线梁、结构动力学、随机振动、杆系结构稳定、板结构、壳结构、薄壁杆件、弹性工程力学、结构塑性分析、非线性结构分析、高层建筑结构分析、复合材料结构力学和结构优化设计等共15卷，将于1987年开始陆续出版。

参加丛书编写的教授、专家，都有较深的理论造诣和较丰富的教学或工程实践经验。丛书内容丰富，论述系统，可作为某学科的专业基础课或其他学科的选修课教材，可供有关专业的科研和工程技术人员参考使用，也可作为培养大学本科高年级学生智能的自学读物。

高等结构力学丛书

结构力学基础	王朝伟、李廉锟
拱结构的稳定与振动	项海帆、刘光栋
曲线梁	姚玲森
结构动力学	杨茀康
结构随机振动	陈英俊、甘幼琛、于希哲
杆系结构稳定	刘光栋、罗汉泉
板结构	黄与宏
壳结构	薛大为
薄壁杆件	陆楸、汤国栋
弹性工程力学	何福照
结构塑性分析	熊祝华
非线性结构分析	万虹、梅占馨
高层建筑结构分析	李君如、詹肖兰、欧阳炎
复合材料结构力学	蔡四维
结构优化设计	李炳威

序

结构力学是固体力学的一个分支。任何工程结构物的设计和建造，都会遇到结构力学问题。进入20世纪后，随着生产的发展和科学技术的进步，结构物的形式更加多样，受力体系更加复杂，这就要求有相应的理论分析方法和实用而有效的计算手段，编写高等结构力学丛书的着眼点即在于此。丛书在介绍力学的基本理论方面，重点突出了弹性理论和塑性理论。20世纪中期以后，复合材料结构和高层结构以及非线性结构的分析研究，取得了可喜的成果。随着电子计算机的广泛应用，在结构分析中普遍采用矩阵法，并进一步建立了有限元法。有了有限元法的分析方法和电子计算机的计算工具，人们便可以对工程结构物的设计由先设定结构方案，后进行综合考虑多方面的因素，以求得最优结构方案的设计，即所谓的结构优化设计。如上所述的有限元法和结构优化设计使结构力学走向计算机化，通称计算结构力学，从而开拓了新的结构力学领域。

本丛书在《结构力学基础》一卷里对杆系结构的经典理论先作概括性的论述，而后重点讲述分析杆系结构的矩阵方法和在电子计算机上实现该法的程序设计问题；在《高层建筑结构分析》一卷里也是在论述经典理论之后，主要讲述程序设计问题。经典的杆系结构和拱结构各设专卷讲述其稳定与振动；板壳结构中也都包括稳定与振动的论述。关于振动加“随机振动”，另有专卷论述。当代工程中遇到的曲线梁和薄壁杆件问题，亦有专卷论述。当代的复合材料结构和非线性结构的分析，以及结构优化设计，也都各列专卷。至于“有限元法”则另编一书以资配合。

对结构力学专业和各类结构工程专业的研究生来说，上述广泛范围内的结构力学分支有些是必修的专业基础课程，如板、壳

结构（包括稳定与振动），和结构的塑性分析和张量分析在弹性力学中的应用等课程中的一至二门；有些是不同专业的专门课程，如曲线梁、复合、高层、优化、非线性和随机振动等课程中的一门（根据研究方向所需的非力学课程不在此列）；还有些是需要开列出来由学生选修的课程。当然，反映当代力学计算方法的有限元法，包括加权残数法及其计算机程序设计也应是必修的。若采用各个分支的专著作教材，学时是不够的，适当精简以适应研究生学习的需要是我们编写这套丛书的第一个目的。

结构力学按专业来划分可分为：房屋结构力学、桥梁结构力学、隧道结构力学、飞机结构力学、车辆结构力学、船舶结构力学和水工结构力学等等。而这些不同专业的结构力学都有共同的基本理论。为各个专业的结构力学奠定共同的理论基础是我们编写这套丛书的第二个目的。

随着时代的推移，新的结构形式将不断涌现。工程师们为创造新的结构形式，往往需要广泛的结构力学知识，熟悉新结构的受力图式和掌握分析方法。为工程技术人员提供参考资料是我们编写这套丛书的第三个目的。

当今大学本科的结构力学教材所涉及的范围仅仅局限于杆系结构，有些内容需要提炼和概括以便增加课外阅读学时数；同时也有些内容（如稳定与振动）则需要抽出来单独设课。这是当前结构力学内容改革的趋向。丛书对杆系结构中的基本内容作了提炼和概括的尝试，以供学生参考；对于专题的内容则抽出来单独编辑成册，虽内容较深，但可供教师因材施教，培养拔尖学生之用。

既要传授知识，也要培养智能，这是当今高等学校的教学工作中应该大力提倡的。培养学生自学能力是培养智能的一个重要方面。我们安排学生自学，除必须给学生有足够的课外学时数外，最根本的一条就是要调动学生自学的主动性和积极性。为了做到这一点，除教师的引导和启发外，还必须恰当地提供自学的内容。根据本人30年代学习结构力学时的经验，我认为最好是超

越本科教材的范围，提供广泛的结构力学分支学科，让学生去涉猎，使学生学后而知不足，这样学生就会在教师的诱导和鼓舞下，更加自觉地去挤时间钻研较高深理论，并写出有一定水平的论文来。因此，我们编写的这套丛书亦可供培养学生自学能力之用。

如上提出的三个目的和两个作用，是我们的主观愿望，目的是否能达到，作用是否能发挥，有待于今后的长期教学实践来检验。

本丛书中各个结构力学分支将单独成册，初步安排陆续出版15卷，将来再根据结构力学的新进展进行扩编。

由于工作需要，脱稿时间仓促，更重要的是限于水平，缺点和错误在所难免，望海内外同行专家不吝赐教，批评指正。

王朝伟

1986年1月

前　言

本书主要是编者在西安公路学院五年制道路和桥梁两个专业多次教授弹性力学课程的讲义。由于近年来张量分析在工程力学中使用较为广泛，因此增加了第一章向量与张量，对张量分析作了简略介绍。第二章弹性力学的基本理论则改用张量重写。其余各章基本为讲义中的内容，并结合土建工程专业进行论述。因为在教学中多次使用过，故可作为教学参考书，或略作增删而作为教科书也是比较合适的。

教学内容要求理论与实际相结合，在工程力学中尤应如此。因为工程力学本身就是为实际工程提出问题、解决问题的，所以，结合实际也比较容易。本书曾作为西安公路学院的教材，故侧重于桥梁和道路专业也就易于理解了。因此，对公路设计和科研人员也可作为参考书使用。

由于编写时间仓促和作者经验不足，水平有限，书中难免有不妥和错误之处，敬请读者给予批评指正。

编　者　于西安

目　　录

第一章　向量与张量

第一节　求和规则

求和规则（summation convention）是将常用的总和符号略去不写，利用角标表示求和的方法。工程力学、物理学和其他科学中已愈来愈广泛的使用这种规则，其重要性就可想而知了。在工程力学中用张量进行分析，并可以得到较为简单而又明了的表述方法。而在张量分析中，最初映入眼帘的是一大批角标，这些角标的含义不仅表示序列、张量的类别，也表示坐标系和求和规则，含义较多。在运算过程中求和规则特别重要，且均应遵守一定的规则标写，不致发生混乱。

设有 n 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$；$y^1, y^2, \cdots, y^n$；通常可以写为 y_i 及 y^i，$i=1,2,3,\cdots,n$。采用求和规则之后，就不能把 y^i 看作 y 的 i 次方，而应视为角标。写在右下角的称为下角标，写在右上角的称为上角标。角标可以只有一个字母表示，如 a_i，b_j，…等，也可用几个字母连写如 a_{ij}，e^{ijk}，…等。也可混合使用上下角标，如 δ^i_j，A^{ij}_k，$e^{rs\cdots k}_{lmn\cdots p}$ 等等。

在使用角标时，有时加用圆点，说明角标位置有先后次序之别，前面有圆点者，应排列为第二位角标，如 $a^{\cdot i}_{j}$ $a_{\cdot j}^{i}$ 等。

角标系统是一种比较简便的数学符号，一些较为复杂的数学组成或数学表达式，若采用角标系统就可用最简洁的形式表示出来，运算或书写都较为方便，例如：

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{14}x_4 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{24}x_4 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{34}x_4 = b_3$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \cdots + a_{44}x_4 = b_4$$

这样一组四元联立方程，可以写为：

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j = b_i$$

在求和规则中，常把总和符号 Σ 略去，只标明角标的取值范围，写为下面的简捷形式，即：

$$a_{ij}x_j = b_i \qquad (i, j = 1, 2, 3, \cdots n)$$

在上式中，角标 j 重复两次，代表总和之意，称为总和角标(summation index)，i 只出现一次，则称为指示角标或自由角标 (identifying index or free index)，因总和角标只代表由1至 n 的求和范围，并无其他含义，故可称为哑角标 (dummy index)。只要 j、k 的求和范围相同，$a_{ij}x_j$ 改写为 $a_{ik}x_k$ 亦无损其原义，与定积分相似，若改用其他字母作变量，亦可得到同一结果。例如：

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(m)dm$$

上面已经规定了两个重复的角标为求和角标，则一项中就不能同时使用三个重复的角标。因为两个重复的角标代表求和，则三个重复的角标即为无意义。必须使用三个重复的角标时，可加用小括号或采用总和符号，或加注解，说明其含义或采用其他方式区别。

采用角标时，应注明角标的取值范围，如：$b_{ij}y^j = a_i$，当 y^j 为坐标系时，则 j 代表空间的维度。在工程力学中常为二维或三维空间，常规习惯称为平面问题或空间问题。在本书中，三维空间采用小写拉丁字母 i、j、k、l、$m\cdots$为坐标系的角标，其取值范围均为 i，j，$\cdots = 1, 2, 3$。在二维空间中则采用小写希腊字母 α，β，$\gamma\cdots\cdots$为坐标系的角标，其取值范围为 α，β，$\gamma\cdots\cdots = 1, 2$。通常不再标写取值范围。在这种情况下，读者应理解其为二维和三维的含义。但标明取值范围时则不受此限制。

两个重复的角标既然代表求和，如果只研究某一特殊情况

时，不必求和则应加说明。例如 a_{kk} 不求和时可写为

$$a_{kk} \qquad k\text{ 不总和}$$

或加用小括号，亦表明不再求和，例如：

$$a_{(k)(k)} \qquad a_{(kk)}$$

通常不能把$(k)(k)$,(kk)视为求和，而应作为特殊情况看待。

有了求和规则，许多较复杂的项目，就可用较简单的形式表达。如果再配合克罗内克尔 δ（kronecker delta）及排列算符 e、∈（permutation symbol）两种符号，就可更为全面地得到简捷而又精炼的表达式。

规定了角标及求和规则，而每一角标又规定了取值范围，这就概括了全局。但在数学表达式中，有正有负或某些项目为零，需要制约，这就要有所选择。而克罗内克尔 δ 及排列算符 e、∈ 就是满足这个要求的，使角标系统更臻完善而便于运用。

现在说明克罗内克尔 δ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{1-1-1}$$

克罗内克尔符号是具有张量性能的数值算符。在这一节中只介绍它的数值性能。它的张量性能则留待以后再作介绍。作为数值算符，角标既可写在右上角，也可写在右下角，也可混写，下述形式均具有相同的内容，即

$$\delta^{ij}, \quad \delta_{ij}, \quad \delta^i_j$$

当克罗内克尔 δ 作为张量使用时，它的右上角和右下角角标位置就不能随意标写。

在直角坐标系中，如 x^i 为坐标，ds 为曲线微段长度，则有：

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

利用求和规则，可以写为：

$$(ds)^2 = \delta_{ij} dr^i dx^j$$

又例如方向余弦的平方之和为 1，即：

$$(\alpha_1)^2 + (\alpha_3)^2 = 1$$

利用求和规则可以写为：

$$\delta^{ij}\alpha_i\alpha_j = 1$$

又例如 x_i 可以写为：

$$x_i = \delta_{ik}x^k$$

又例如：

$$\sqrt{x_i x_i} = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2}$$

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3, \quad \delta_{jj} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3,$$

$$\delta_{\alpha\alpha} = \delta_{11} + \delta_{22} = 2, \qquad \delta_{\beta\beta} = \delta_{11} + \delta_{22} = 2$$

将克罗内克尔 δ 的角标字母增加至 m 个时，就称为广义克罗内克尔 δ（generalized kronecker delta），它以 $m \times m$ 行列式表达，$m = 1,2,\cdots,m$。广义克罗内克尔 δ 在张量分析中也会常常用到它，现在只说明一些简单的基本性能。

$$\delta^{j_1 j_2 \cdots j_m}_{h_1 h_2 \cdots h_m} = \begin{vmatrix} \delta^{j_1}_{h_1} & \delta^{j_1}_{h_2} & \cdots & \delta^{j_1}_{h_m} \\ \delta^{j_2}_{h_1} & \delta^{j_2}_{h_2} & \cdots & \delta^{j_2}_{h_m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \delta^{j_m}_{h_1} & \delta^{j_m}_{h_2} & \cdots & \delta^{j_m}_{h_m} \end{vmatrix} \qquad (1\text{-}1\text{-}2)$$

当 $m = 1$时，$\delta^{j_1}_{h_1} = \delta^i_j$，广义克罗内克尔符号的内容与克罗内克尔符号完全一致。当 $m = 2$时则有：

$$\delta^{jh}_{ik} = \begin{vmatrix} \delta^j_i & \delta^j_k \\ \delta^h_i & \delta^h_k \end{vmatrix} = \delta^j_i\delta^h_k - \delta^j_k\delta^h_i \qquad (1\text{-}1\text{-}3)$$

广义克罗内克尔符号既等于（$m \times m$）行列式之值，将行列式展开可以得到 $m!$ 项。每项为 m 个克罗内克尔 δ 的乘积。式(1-1-2)中上角标 $\delta^{j_1 j_2 \cdots j_m}$ 表示行列式"行"的顺序号，下角标 $\delta_{h_1 h_2 \cdots h_m}$ 表示行列式"列"的顺序号。根据行列式的性能，行或列更换一次位置时，其值改变一次符号，故有：

$$\begin{aligned} \delta^{i_1 \cdots i_h \cdots i_k \cdots i_m}_{j_1 j_2 \cdots j_m} &= -\delta^{i_1 \cdots i_k \cdots i_h \cdots i_m}_{j_1 j_2 \cdots j_m} \\ \delta^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{j_1 \cdots j_h \cdots j_k \cdots j_m} &= -\delta^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{j_1 \cdots j_k \cdots j_h \cdots j_m} \end{aligned} \qquad (1\text{-}1\text{-}4)$$

据此，则相邻两角标调整位置次数为偶数次时，正负符号不变，为奇数次时，改变一次符号。当上角标或下角标出现相同两个角标时，其值为零。当角标个数 m 大于空间维度 n 时，即 $m>n$，至少有两个角标重复，其值为零。例如在三维空间中，$n=3$，则有：

$$\delta^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{j_1 j_2 \cdots j_m} = 0 \quad (m>3) \tag{1-1-5}$$

至于排列算符，亦称之为李维—西维他(Livi-Civita)符号。在张量分析中，它是一种重要的算符，也是一种具有张量性能的数值算符。它的张量性能留待以后再作介绍。这一节只介绍它的一些简单性能。排列算符是广义克罗内克尔符号在 $m=n$ 时的特殊情况。

所谓排列算符 $e_{h_1 h_2 \cdots h_m}$ 或 $e^{j_1 j_2 \ldots j_m}$ 的定义为

$$e_{h_1 h_2 \cdots h_m} e^{j_1 j_2 \cdots j_m} = \delta^{j_1 j_2 \cdots j_m}_{h_1 h_2 \ldots h_m} \tag{1-1-6}$$

$$e_{h_1 h_2 h_3 \cdots h_m} = \delta^{1,2,\cdots,m}_{h_1 h_2 \ldots h_m} \tag{1-1-7}$$

$$e^{j_1 j_2 \cdots j_m} = \delta^{j_1 j_2 \cdots j_m}_{1,\ 2,\ 3, \ldots m} \tag{1-1-8}$$

以 $j_1, j_2 \cdots j_m$ 及 $h_1 h_2 \cdots h_m$ 分别等于 $1, 2, 3, \cdots, m$ 代入上式，注意到 $i \neq j$ 时，$\delta^i_j = 0$，则式(1-1-2)所示行列式之值等于该行列式之迹(trace)，故有：

$$e_{1,2,3,\cdots,n} = \delta^{1,2,\cdots,n}_{1,\ 2,\ \ldots,\ n} = 1 \tag{1-1-9}$$

$$e^{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n} = \delta^{1,2,\cdots,n}_{1,\ 2,\ \ldots,\ n} = 1 \tag{1-1-10}$$

排列算符的角标有两个重复时其值为零。当相邻两个角标调整偶数次达到原来的排列时，其正负符号不变，当相邻两个角标调整奇数次达到原来的排列时则反一符号。据此，则 $n=3$时，$e^{i_1 i_2 i_3}$之值按下列顺序排列时为：

$$e^{123} = e^{231} = e^{312} = 1$$

$$e^{132} = e^{321} = e^{213} = -1$$