现代应用数学丛书

偏微分方程

〔日〕南云道夫 著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

偏微分方程

〔日〕南云道夫 著
錢 端 壮 譯
林 坚 冰 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。全书共分七章，第一章介紹解析方程的一般理論，第二章介紹一阶拟綫性方程，第三章为一般的一阶方程，四、五两章叙述二阶方程，六、七两章分别討論橢圓型和双曲型方程。本书可供各高等学校作为数学参考书，也可供工程师、科学研究工作者作参考。

現代应用数学丛书

偏 微 分 方 程

原 书 名　偏 微 分 方 程 式
原 著 者　〔日〕南 云 道 夫
原出版者　岩 波 书 店
譯　　者　錢 端 壮
校　　者 [redacted] 坚 冰

上海科[redacted]出版
(上海[redacted])
[redacted]海市书刊出版业营业許可証出[redacted]93号
新华书店[redacted]海发行所发行　各地新华书店經售
[redacted]上海市印[redacted]刷

开本 850×1168 1/32　印張 6 12/32　字数 150,000
1961年11月新1版　1961年11月第1次印刷
印数 1—17,000

統一书号：13119・425
定　　价：(十四) 1.10元

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一题目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

記号説明

現在就本书，特別就第1～3章中所用的記号加以說明。

偏导数 $\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$，恒用記号 ∂_x，∂^2_{xy} 代替。

如只要区別独立变数 $x_1, \cdots, x_n$ 的番号，則 ∂_{x_ν} 有时簡写成 ∂_ν。

E^n 表示 n 維 Euclid 空間［n 个实数組 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的全变域］。$x^0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 表示 E^n 中的一点［卽 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 的某一特殊値］。

$$m \times n \text{ 矩陣} \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{i1} \cdots a_{ij} \cdots a_{in} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mj} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \text{簡記为} \left(a_{ij} \quad {}^{i \downarrow 1, \cdots, m}_{j \to 1, \cdots, n} \right).$$

δ_{ij} 表示 Kronecker 記号，卽当 $i=j$ 时，$\delta_{ij}=1$；当 $i \neq j$ 时，$\delta_{ij}=0$。

对于一組等式，譬如 $x=a(s)$，$y=b(s)$，$z=c(s)$，恒用写法 $(x, y, z)=\{a, b, c\}(s)$。

Rk（矩陣）代表矩陣的秩数。

$$\frac{D(f_1, \cdots, f_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)} = \left| \partial_\nu f_\mu(x) \quad {}^{\mu \downarrow 1, \cdots, n}_{\nu \to 1, \cdots, n} \right| \quad \text{（函数行列式），}$$

$$\int f(x) d^n x = \int f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

另外，对于偏微分的記号有时也用普通的写法，如 f_x，f_{xy} 等。

在第1～3章中，将討論解析的偏微分方程的一般理論，以及主要对于单独的一阶偏微分方程，講述一些古典的求解理論。

目　　录

出版說明
記号說明
第1章　解析的偏微分方程的一般理論……1
§ 1　偏微分方程中有关的定义……1
§ 2　解析的偏微分方程的初始值問題……3
§ 3　特征面（一般 Cauchy 問題）……9
§ 4　Holmgren 定理……14
第2章　一阶拟綫性偏微分方程……21
§ 5　特征曲綫……21
§ 6　Cauchy 存在定理……24
§ 7　变成齐次綫性方程的变換……27
§ 8　主部相等的联立拟綫性微分方程組……32
第3章　一般的单独一阶的偏微分方程……34
§ 9　面素組……34
§ 10　一阶偏微分方程，正常解；奇异解……37
§ 11　特征带……40
§ 12　Cauchy 存在定理……44
§ 13　完全解……50
§ 14　簡单的一阶偏微分方程……57
§ 15　由完全解导出特征带……61
§ 16　Hamilton-Jacobi 偏微分方程……65
§ 17　初始值問題的解的唯一性……70
第4章　两个独立变数的二阶偏微分方程和方程組……77
§ 18　二阶半綫性方程的标准型……77
§ 19　标准双曲型偏微分方程……81
§ 20　調和函数……87
§ 21　一阶半綫性偏微分方程組……91

§ 22 双曲型半綫性一阶方程組 ……98
第5章 一般二阶綫性偏微分方程 ……109
§ 23 关于二阶綫性方程独立变数的变换 ……109
§ 24 特征面 ……112
§ 25 横截向量,特征射綫 ……116
§ 26 Green 积分公式 ……118
§ 27 广义解 ……122
§ 28 二阶常系数方程的标准型 ……124
§ 29 作为常系数綫性方程解的平面波 ……127
§ 30 拟綫性方程的特征条件 ……131
第6章 椭圓型偏微分方程 ……136
§ 31 边値問題 ……136
§ 32 Laplace 方程和 Poisson 方程 ……144
§ 33 二阶椭圓型方程的基本解 ……151
§ 34 二阶椭圓型方程的 Green 函数 ……159
§ 35 关于椭圓型方程的补充說明 ……162
第7章 双曲型偏微分方程 ……166
§ 36 正規双曲型方程 ……166
§ 37 Cauchy 問題解的决定区域 ……171
§ 38 波动方程的解法 ……177
§ 39 关于双曲型方程的补充說明 ……186
后記 ……190
参考书 ……191
校后記 ……192

第1章　解析的偏微分方程的一般理論

本章主要是在微分方程具有解析而正則的函数表达形式的假設下进行討論的。这样，为了得到与方程的类型无关而一般正确的理論，我們也只限于討論解析的微分方程具有解析而正則解的情形。但是这里所說的类型，并不象綫性或是非綫性的方程，可以由方程的外表形式来区别（它是由于特征方程的根是虛，或是实的而产生的），一般解的本質的性質（解析性），由于所属方程的类型不同，有着相异的特性（这一点以后自然会明了）。現在本章中所討論的函数假定它們都是解析而正則的。一般，在公式的形式变换中，必須根据变换中所出現的微分計算的阶数，来假設函数連續可微的次数，但是現在有了正則性的保証，函数就有任意次連續微分的可能，所以沒有必要每次再重复提出討論。

§1　偏微分方程中有关的定义

一般关于独立变数、未知函数及它的偏导数由确定的函数关系結合而成的方程叫做偏微分方程。恒等地满足这个方程的函数（未知）叫做方程的解。譬如，象

(a) $yu_x - xu_y = 0$,　　　　(b) $u_{xy} = 0$,

(c) $u^2(1+u_x^2+u_y^2) = 1$

就都是偏微分方程，其中 x, y 是独立变数，u 是未知函数。这些方程分别以

$$u=\phi(x^2+y^2),\qquad u=\phi(x)+\psi(y),$$

$$u=\{1-(x-a)^2-(y-b)^2\}^{1/2}$$

作为它們的解。这里 ϕ, ψ 是任意的函数（可微的），而 a, b 是任

意的常数。有許多作者把偏微分方程的解称为方程的积分，我們在本书中将避免使用这种叫法。

另外，我們也研究一些与多个未知函数有关的联立偏微分方程組，譬如，象

(d) $u_x=v_y$, $v_x=-u_y$ (u, v 未知函数),

(e) $\sum_{j=1}^{k}a_{ij}(x, y)\,\partial_x u_j+\sum_{j=1}^{k}b_{ij}(x, y)\,\partial_y u_j=\sum_{j=1}^{k}u_j^2 \quad (i=1, \cdots, k)$

(a_{ij}, b_{ij} 是已知函数，$u_1\cdots$, u_k 是未知函数)，

(f) $uu_{xx}=v_y^2$, $vv_{yy}=u_x^2$ (u, v 未知函数).

所謂偏微分方程的**阶数**❶，就是方程中出現的未知函数的导函数中最大的阶数。在上面的例子中，(a)，(c)，(d)，(e)都是一阶的偏微分方程，(b)，(f)是二阶的偏微分方程。

如果偏微分方程对于未知函数以及它的各阶导函数都是一次齐式，这个方程就叫做**綫性方程**。(a)，(b)，(d)三个方程都是綫性方程。如果方程是未知函数最高阶导函数的一次齐式，这个方程就叫做**拟綫性方程**，(e)和(f)就是拟綫性方程。方程(c)既不是綫性的，也不是拟綫性的，这种方程叫做**非綫性方程**。一般也把一切不是綫性的方程(包括拟綫性的在内)都叫做非綫性方程。在拟綫性方程中最高阶导函数所組成一次齐次式的那一部分，叫做**方程的主部**。在方程(e)和(f)中，等号的左边部分是方程的主部。若是拟綫性方程的主部內的系数，都是常数或是独立变数的已知函数，这种方程就叫做**半綫性方程**。(e)是半綫性方程，但(f)不是半綫性方程。对于偏微分方程，除了一阶的偏微分方程(单独方程)以外，研究得比較透徹的主要是綫性方程。

我們可以把常微分方程看成是仅具一个独立变数以及一个未

---

❶ 原著者为了避免与行列式的 rank 一字的譯文混淆，把偏微分方程的阶数(order)改譯成位数，現在我們仍用阶数作为 order 的譯文，并把 rank 譯成秩数。——譯者注

知函数的偏微分方程。相反，如果在偏微分方程中仅仅出現未知函数(它是多个独立变数的函数)对于某一个独立变数的偏导函数的时候，那么对这一个独立变数来說，就可以把偏微分方程看成是常微分方程(其他的独立变数可以認为是未知函数中的任意参数)。

§2 解析的偏微分方程的初始值問題

1. 初始值問題 一般关于解析偏微分方程的理論中，最基本的就是 Cauchy 的初始值問題的解的存在定理。所以普通就把初始值問題称为 **Cauchy 問題**。

首先我們用一个簡单的例子，对初始值問題作一个淺近的解釋。

考虑下面的一阶綫性偏微分方程

$$u_x - u_y = 0. \tag{2.1}$$

这个方程的解都具有 $u=\phi(x+y)$ 的形状，其中 ϕ 是任意的函数(这一点可以利用变换 $x+y=\xi$, $x-y=\eta$，把独立变数变成 ξ 与 η 而导出)。对于这个解，如果說 $x=0$ 时，$u=\phi(y)$，則(2.1)的解就由解的初始条件

$$x=0 \text{ 时} \quad u=\phi(y) \quad (\phi \text{ 是任意給定的函数})$$

所唯一决定。

其次，再討論一个二阶綫性偏微分方程

$$u_{xx} - u_{yy} = 0. \tag{2.2}$$

令 $x=(\xi+\eta)/2$, $y=(\xi-\eta)/2$，把独立变数 x, y 变成 ξ, η，容易証明方程变成了

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

于是

$$u=\phi(\xi)+\psi(\eta) \quad (\phi,\ \psi \text{ 是任意函数}).$$

因此(2.2)的解必定是

$$u=\phi(x+y)+\psi(x-y). \tag{2.3}$$

在这里如令 $x=0$, 則

$$u(0,\ y)=\phi(y)+\psi(-y),\ u_x(0,\ y)=\phi'(y)+\psi'(-y).$$

若現在初始条件是

$$x=0\ 时,\ u=f(y),\ u_x=g(y), \tag{2.4}$$

則

$$\phi(y)+\psi(-y)=f(y),\ \phi'(y)+\psi'(-y)=g(y),$$

因此有

$$\phi(y)=\frac{1}{2}\left\{f(y)+\int_0^y g(y)dy\right\},$$

$$\psi(-y)=\frac{1}{2}\left\{f(y)-\int_0^y g(y)dy\right\}.$$

于是根据(2.3)就得到

$$u=\frac{1}{2}\left\{f(x+y)+f(y-x)+\int_{y-x}^{x+y} g(t)dt\right\}. \tag{2.5}$$

相反,若 f, g 是任意函数,可以証明 (2.5) 必是方程 (2.2) 的解。所以(2.2)的解由初始条件(2.4)所唯一决定。(f, g 可看成是任意的已給函数。)

上面的例題指出,一般单独一个偏微分方程的解中包含着任意函数,任意函数的个数就是方程的阶数(任意函数中的独立变数比方程中的独立变数少一个)。有理由来推測,解中的任意函数将由初始条件所唯一地决定。(实际上,一般解中的任意函数或者是初始条件中任意給定的函数,或者是它的变形函数。)

一般的偏微分方程含有多个独立变数。如果对其中某一个独立变数的一个特定值(上面的例中是 $x=0$)来討論初始条件,象这样的变数,为了在考虑初始条件时与其他的独立变数有所区别,我們叫它作时間的变数。相对地叫其他的独立变数为空間的变数。上面的例題中 x 是时間的变数, y 是空間的变数。但是在研究一般偏微分方程的时候,有时并不区别其中那一个变数是时間变数,

那一些是空間变数，而无区别地把独立变数的全体看成一个空間，并在空間中考虑一个超曲面（如独立变数的个数是2，即二維空間，則此超曲面化为曲綫，如独立变数的空間是三維空間，則超曲面为曲面）。我們規定所求的未知函数以及它的导函数要在这个超曲面上取已給的值。要决定这样的解的問題叫做"一般的 Cauchy 問題"。我們将在后面一节討論这种一般的 Cauchy 問題。

假設偏微分方程的未知函数的最高阶导函数中，出現着仅与时間变数有关的偏导函数。当这个偏导函数能够解出，而用含有独立变数、未知函数以及其他的偏导函数的形式来表达的时候，这种解出了的方程叫做对时間变数的**基准型**。譬如对于二阶的拟綫性方程

$$(1+u_x^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_y^2)u_{yy}=0,$$

如果 x 是时間变数，則

$$u_{xx}=(1+u_x^2)^{-1}\{2u_xu_yu_{xy}-(1+u_y^2)u_{yy}\}$$

是基准型的方程。

2. Cauchy-Kowalewski 定理 为了方便起見，令 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)=x$. $f(x)$ 叫做在 $x=x^0$ 处变数 x（n 个独立变数）的解析正則函数，如果在 $x=x^0$ 的邻域，譬如当 $|x_\nu-x_\nu^0|<\rho_\nu(\nu=1, \cdots, n)$，$f$ 可以展开成为 $x_1-x_1^0, x_2-x_2^0, \cdots, x_n-x_n^0$ 的 n 重冪級数（并且广义絕对一致收斂），即 $f(x)=\sum a_{\nu_1\cdots\nu_n}(x_1-x_1^0)^{\nu_1}\cdots(x_n-x_n^0)^{\nu_n}$. 这时，若 x 表示 n 个复变数，則当 $|x_\nu-x_\nu^0|<\rho_\nu$ 时，这个冪級数也广义絕对一致收斂。于是对于原始是 n 个实变数的函数 $f(x)$，自然可以唯一的延拓成为 n 个复变数的正則函数（当独立变数是复变数时，我們就把解析正則的函数簡单地叫做正則函数）。所以本节以后所考虑的函数都是复变数的正則函数。

設 x 是时間变数，$y=(y_1, \cdots, y_m)$ 是空間变数，$u=(u_1, u_2, \cdots, u_l)$ 是 (x, y) 的未知函数，我們討論一下一阶的联立基准型偏

微分方程組

$$\partial_x u_i = f_i(x,\ y,\ u,\ \partial_y u) \quad (i=1,\ \cdots,\ l). \tag{2.6}$$

为了方便起見，引入記法 $\partial_{y_\nu} u_i = p_{i\nu}$，并把这 lm 个 $p_{i\nu}$ 簡記作 p。这样，f_i 是 $1+m+l+lm$ 个独立变数 $(x,\ y,\ u,\ p)$ 的解析正則函数。現在 Cauchy-Kowalewski 定理断言：設 $\phi_i(y)$ 是任意的已給正則函数，則方程組 (2.6) 存在着唯一的一組滿足初始条件“$x=x^0$, $u_i=\phi_i(y)$”的解 $u_i=u_i(x,\ y)$。确切的述說如下：

定理 2.1（假設）f_i 在 $(x,\ y,\ u,\ p)=(x^0,\ y^0,\ u^0,\ p^0)$ 处是 $(x,\ y,\ u,\ p)$ 的正則函数，ϕ_i 在 $y=y^0$ 处是 y 的正則函数，并且

$$\phi_i(y^0)=u_i^0,\ \partial_\nu\phi_i(y^0)=p_{i\nu}^0.$$

（結論）則存在着在 $(x,y)=(x^0,y^0)$ 处的正則函数組 $u_i=u_i(x,\ y)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$，它們滿足联立方程組 (2.6) 以及初始条件 $u_i(x^0,\ y)=\phi_i(y)$，这种正則函数組并且是唯一的。

Cauchy-Kowalewski 定理的証明方法，是把解 u_i 对于 $x-x^0$，$y_\nu-y_\nu^0(\nu=1,\ \cdots,\ m)$ 展开成为整冪級数，冪級数的系数，由于 u_i 要滿足(2.6)的緣故，可以由最低項次的系数順次地决定。其次再把这样得到的冪級数与一个优級数来比較而証明它的收斂性。由于本书的篇幅关系我們省略了定理的証明。关于綫性情形的証明可以参看 Petrovski: Lectures on partial differential equations❶, pp. 18～26。一般情形的証明（把方程化成拟綫性方程的方法）見 Courant u. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik II, pp. 35～44。

現在我們来証明联立高阶（但为基准型的）微分方程組的 Cauchy-Kowalewski 定理。証明的方法就是把这个問題化成联立一阶(2.6)方程組的問題。

首先为了使問題簡单一些，我們考虑单独一个具有两个独立

❶ 有中譯本，彼德罗夫斯基：偏微分方程讲义，高等教育出版社。——譯者注

变数的二阶偏微分方程

$$\partial_x^2 u=f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy}). \qquad (2.7)$$

并設初始条件是"$x=x^0$ 时，$u=\phi(y), u_x=\psi(y)$"。令 $u_x=p, u_y=q$，容易証明，上面的方程就化成为下面关于未知函数(u, p, q)的联立一阶方程組：

$$\left.\begin{array}{ll}\partial_x u=p, & \partial_x q=\partial_y p,\\ \partial_x p=f(x, y, u, p, q, \partial_y p, \partial_y q),\end{array}\right\} \qquad (2.8)$$

初始条件是：$x=x^0$ 时，$u=\phi(y)$，$p=\psi(y)$，$q=\phi'(y)$。这組方程根据定理 2.1 具有正則的解(f, ϕ, ψ 在适当的范圍中是正則的)。設这組解是 $(u, p, q)=\{u, p, q\}(x, y)$，現在来証明 $u=u(x, y)$ 是(2.7)的解。首先由 (2.8) 中的第一式有 $p=u_x$，所以由第二式有 $\partial_x(q-u_y)=\partial_x q-\partial_y p=0$，又因为当 $x=x^0$ 时，$q-\partial_y u=\phi'(y)-\phi'(y)=0$，故此 $q=u_y$。最后第三式就化成为(2.7)。至于初始条件很明显是一样的。

下面再討論一般的单独一个高阶方程(基准型)

$$\partial_x^p u=F(x, y, u, u_x, u_y, \cdots, \partial_x^{p-1}u_y, \cdots) \qquad (2.9)$$

(F 中含有对 u 的最高到 p 阶的导函数，并且对变数 x 的导函数最高到 $p-1$ 阶)。設初始条件是"$x=x^0$ 时，$u=\phi(y)$，$\partial_x^i u=\phi_i(y)$"。为了书写方便，我們引入記法 $\partial_x\equiv\partial_0$，$\partial_{y_\nu}\equiv\partial_\nu$ $(\nu=1, 2, \cdots, m)$，并令

$$\partial_{\nu_1}\cdots\partial_{\nu_i}u=u_{\nu_1\cdots\nu_i},$$

其中 $0\leqslant\nu_1\leqslant\nu_2\leqslant\cdots\leqslant\nu_i\leqslant m\,(i=1,2,\cdots,p-1)$，于是对于这些 $\nu_1, \cdots, \nu_i$，上面的方程 (2.9) 就化成为下面的联立一阶基准型的方程組：

$$\left.\begin{array}{l}\partial_x u=u_0,\quad \partial_x u_{\nu_1\cdots\nu_{i-1}}=u_{0\nu_1\cdots\nu_{i-1}},\\ \partial_x u_{\nu_1\cdots\nu_{i-1}\nu_i}=\partial_{\nu_i}u_{0\nu_1\cdots\nu_{i-1}} \quad (\nu_i\geqslant 1),\\ \partial_x u_{0\times(p-1)}=F(x, y, u, \cdots, u_{\nu_1\cdots\nu_i}, \cdots, \partial_{\nu_p}u_{\nu_1\cdots\nu_{p-1}}) \quad (\nu_p\geqslant 1)\end{array}\right\} \qquad (2.10)$$

(这里的$0\times(i)$意味着 i 个 0)．現在的初始条件是

$$x=x^0 \text{ 时}, u=\phi(y),\quad u_{0\times(i)}=\phi_i(y),$$

$$u_{0\times(\varkappa)\nu_1\cdots\nu_i}=\partial_{\nu_1}\cdots\partial_{\nu_i}\phi_\varkappa(y)\quad(\nu_1\geqslant 1,\ \varkappa+i\leqslant p-1).$$

显然，(2.9)与(2.10)分别在上面所給的初始条件下是等价的。

完全同样地可以把联立高价偏微分方程組(基准型)的初始值問題归結为联立一阶偏微分方程組的初始值問題。

注意 1 上面我們把高阶的偏微分方程轉化成联立一阶偏微分方程組。在常微分方程中，用这种方法必定可以把高阶的方程化成和它等价的联立一阶方程。但是在偏微分方程中如果連同初始条件一起考虑，高阶方程所化成的等价的联立一阶方程組的意义有所不同。因为轉化后联立一阶方程組的未知函数的个数，比原高阶方程的阶数为多。

注意 2 根据定理 2.1，解析而正則的基准型方程在初始值也是解析正則函数的时候存在着正則的解。但是如果初始函数不是解析正則的話(即使无限次連續可微)，那么就不一定存在着方程的解。譬如考虑一下 Cauchy-Riemann 方程 (x, y, u, v 都是实变数)：

$$u_x=v_y,\quad v_x=-u_y,$$

初始条件是 $x=0$ 时，$u=\phi(y)$，$v=0$。u, v 当 $x\geqslant 0$，$|y|<\rho$ 时連續，并当 $x>0$，$|y|<\rho$ 时有全微分。于是 $u+iv=f(z)\quad(z=x+iy)$，当 $x>0$，$|y|<\rho$ 时是复变数 z 的正則函数，并且当 $x\geqslant 0$，$|y|<\rho$ 时連續。由于当 $x=0$ 时 f 的虚数部分$=0$，所以根据映象原理，$f(z)$ 应該对于 $x=0$ 是对称的，而可以越过 $x=0$，直到 $x<0$，$|y|<\rho$ 解析延拓。[当 $x<0$ 时，$f(x+iy)=u(-x,y)-iv(-x,y)$.]故 $f(iy)=u(0,y)=\phi(y)$ 对于 $|y|<\rho$ 应該是解析正則的。于是如果 $\phi(y)$ 不是解析而且正則的話，那么滿足 $x=0$ 时，$u=\phi(y)$，$v=0$ 的解便不存在。

注意 3 若(2.6)是綫性方程

$$\partial_x u_i=\sum_{j=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{m}a_{ij\mu}(x,y)\partial_\mu u_j+\sum_{j=1}^{l}b_{ij}(x,y)u_j+c_i(x,y),$$

其中 x, y 是复变数，并且当 $|x-x^0|<\rho$，$|y_\nu-y_\nu^0|<\rho$ 时，$a_{ij\mu}$，b_{ij}，c_i 以及 $\phi_i(y)$ 都是正則函数，而且

$$|a_{ij\mu}|\leqslant A,\quad |b_{ij}|\leqslant B,$$

則滿足初始条件“$x=x^0$ 时，$u_i=\phi_i(y)$”的解 u_i，当 $|x-x^0|<\sigma$，$|y_\nu-y_\nu^0|<\sigma$

(其中 $\sigma=\sigma(\rho, A, B, m, l)$ 即仅与括弧中的量有关) 时是正則的。(这段証明可以参看前面举出的 Petrovski 的书。) 这个注意将在 Holmgren 定理的証明中用到。

习題 証明联立偏微分方程組(x, y, u, v 是实变数)

$$u_x=v_y,\ \ v_x=-u_y+f(y)$$

存在着滿足初始条件:当 $x=0$, $|y|<\rho$ 时, $u=0$, $v=0$ 的解的充要条件是 $f(y)$ 当 $|y|<\rho$ 时为解析正則函数(参照注意 2)。

§3 特征面(一般 Cauchy 問題)

1. 联立一阶半綫性方程組的情形 前一节中我們就基准型的方程討論了初始值問題。現在为了平等地处理所有的独立变数,把它們的全部記作 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,并考虑对未知函数 $u=\{u_1,\cdots, u_l\}(x)$ 的联立一阶方程組

$$f_i(x, u, \partial_x u)=0 \quad (i=1, \cdots, l)$$

$[\partial_x u=(\partial_\nu u_i\ i=1, \cdots, l;\ \nu=1, \cdots, n)]$. 特别为了容易理解起見,可以假設这个方程組是半綫性的,即討論下面形式的方程組:

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{\nu=1}^{n} a_{ij\nu}(x)\partial_\nu u_j+b_i(x, u)=0 \quad (i=1, \cdots, l). \qquad (3.1)$$

設在空間 E^n 中給定一个曲面 S($n-1$ 維), S 的方程是 $\phi(x)=0$, 并設 u 在 S 上取已給的值 $u=\psi(x)$. 在这种条件下求 (3.1) 的解的問題叫做一般 Cauchy 問題。要討論这个問題,可以适当地变換独立变数,譬如令 $\phi_1(x)=\phi(x)$,并且另外适当地取 $n-1$ 个函数 $\phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)$,使得 $D(\phi_1, \cdots, \phi_n)/D(x_1, \cdots, x_n)\neq 0$. 于是令

$$x'_\nu=\phi_\nu(x) \quad (\nu=1, \cdots, n), \qquad (3.2)$$

而把独立变数 x 变換成为独立变数 x' (在适当的范圍內),并把 $\partial/\partial x'_\nu$ 記作 ∂'_ν. 由于

$$\partial_\mu u=\sum_{\nu=1}^{n}\partial'_\nu u\cdot\partial_\mu\phi_\nu,$$

(3.1)式化成

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{l}\sum_{\nu=1}^{n}\tilde{a}_{ij\nu}(x')\partial'_\nu u_j+\tilde{b}_i(x',u)=0\quad(i=1,\cdots,l),\\ &\text{其中}\qquad \tilde{a}_{ij\nu}=\left(\sum_{\mu=1}^{n}a_{ij\mu}\cdot\partial_\mu\phi_\nu\right)_{x=\phi^{-1}(x')}.\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

由于在这里 S 的方程成为 $x'_1=\phi(x)=0$，所以可以把 x'_1 看成是时間的变数而得到基准型的方程。但是这里的条件是 $\partial'_1 u$ 的系数 $\tilde{a}_{ij1}$ 所組成的行列式 $\neq 0$，即（此处 $\phi_1=\phi$）

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n}a_{ij\mu}\partial_\mu\phi\quad \begin{matrix}i\downarrow 1,\cdots,l\\ j\to 1,\cdots,l\end{matrix}\right|\neq 0,\tag{3.4}$$

这条件是充分而必要的。

因此，我們把关于 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 的 l 次齐次方程

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n}a_{ij\mu}(x^0)\,\xi_\mu\quad \begin{matrix}i\downarrow 1,\cdots,l\\ j\to 1,\cdots,l\end{matrix}\right|=0\tag{3.5}$$

叫做(3.1)在 $x=x^0$ 处的**特征方程**。对于一般的曲面 $S:\phi(x)=0$，若是对它上面的点 x^0，$\xi_\nu=\partial_\nu\phi(x^0)$ $(\nu=1,\cdots,n)$ 满足特征方程(3.5)的話，那么我們就說 S 在 x^0 处是**特征**。(3.4)意味着 S 不是特征。所以如果 S 不是特征的話，則在 S 上满足 $u_i=\psi_i(x)$（ψ_i 是已給的正則函数）的方程組(3.1)的解 $u_i(x)$ 存在而且唯一。用确切的語言来表达，就得到了下面的定理。

定理 3.1　若是当 $x=x^0$ 时，$a_{ij\mu}(x)$，$\phi(x)$，$\psi_i(x)$ 正則，当 $(x,u)=(x^0,u^0)$ 时，$b_i(x,u)$ 正則，并且 $\phi(x^0)=0$，$\psi_i(x^0)=u_i^0$。此外 $\phi(x)=0$ 在 x^0 处不是特征，那么方程組(3.1)就存在着唯一的解 $u_i=u_i(x)$，这个解在 $x=x^0$ 处正則，并且当 $\phi(x)=0$ 时，$u_i=\psi_i(x)$。

如果 S 上所有的点都是特征的話，即

$$\text{当}\ \phi(x)=0\ \text{时},\ \left|\sum_{\mu=1}^{n}a_{ij\mu}\partial_\mu\phi\quad \begin{matrix}i\downarrow 1,\cdots,l\\ j\to 1,\cdots,l\end{matrix}\right|=0\tag{3.6}$$

的时候，那么 $S:\phi(x)=0$ 就叫做(3.1)的**特征面**。

如果 S 是特征面的話，利用(3.2)引入新的独立变数 x'，在