中等专业学校教材

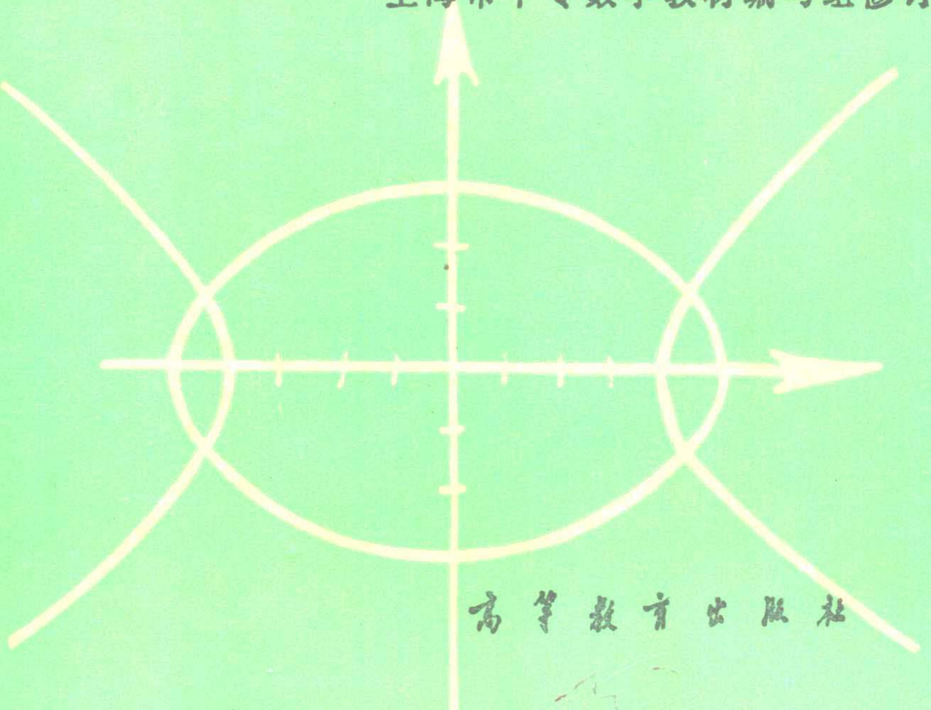
工科专业通用

数学

第二册

工科中专数学教材编写组编

上海市中专数学教材编写组修订



高等教育出版社

中等专业学校教材

工科专业通用

数　学

第二册

工科中专数学教材编写组编

上海市中专数学教材编写组修订

高等教育出版社

本书是在教育部组织的工科中专数学教材编写组编的《数学》(工科专业通用)(第一分册，1979年12月第一版；第二分册，1980年2月第一版)的基础上，根据1983年修订的《中专数学教学大纲》的要求修订而成的．本书共分四册．第二册主要内容为立体几何、平面解析几何和数列．可供招收初中毕业生的中等专业学校工科各专业作为教材使用．

(京) 112 号

中等专业学校教材
工科专业通用
数　学
第 二 册
工科中专数学教材编写组 编
上海市中专数学教材编写组修订

高等教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
商务印书馆上海印刷厂印装

开本 787×1092 1/32 印张 8.75 字数 179,000
1979年12月第1版
1985年5月第2版 1993年2月第18次印刷
印数 1,909,801—2,147,277

ISBN 7-04-001709-1/O·573
定价 2.45 元

目　　录

第九章 空间图形

在平面几何里，我们研究了平面图形的一些概念、性质和它们的应用．但在日常生活和生产实际中还会遇到一些几何图形，这些图形上的点不完全在同一个平面内，这样的图形叫做**空间图形**(或**立体图形**)．例如，桌子、书、粉笔、螺母、车刀等物体，它们的几何形状都是空间图形．平面图形是由同一平面内的点、线组成的，空间图形是由空间的点、线、面组成的．

本章将研究空间图形的一些概念、性质和它们的应用．

§9-1 平　面

一　平面及其表示法

平面是广阔无涯的．也就是说，平面是可以无限伸展的．我们日常见到的平面图形，如黑板面、窗玻璃面、课桌面、纸面等，都可看作平面的一部分，它们大都具有矩形的形状．当我们站在适当的位置看一个矩形时，会感觉它们都象平行四边形．因此，通常把一个平面画成平行四边形，并用一个希腊字母 α、β、γ、…写在平行四边形某一顶角的内部来表示，如图 9-1(1)、(2)、(3)中的平面 α、β 和 γ．有时也用平行四边形顶点的字母来表示一个平面，如图 9-1(4)中的平面可表示为平面 $ABCD$ 或平面 AC．

画一个水平放置的平面时，一般把平行四边形的锐角大约画成 45°，把横边的长度画得大约等于另一边长度的两倍．

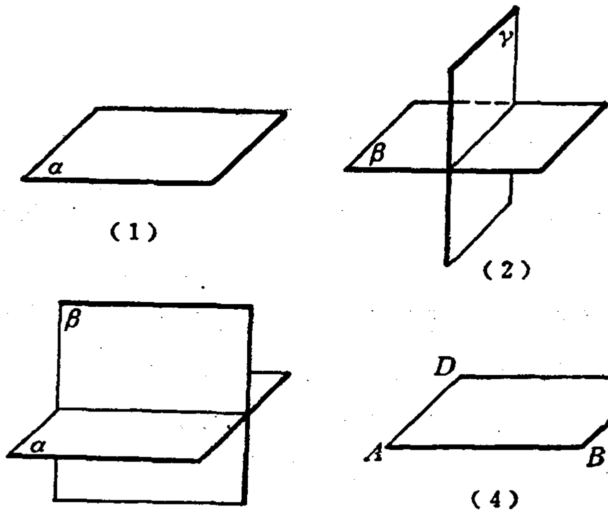


图 9-1

如图 9-1(4) 中的平面 AC 就是大约按 $\angle DAB=45^\circ$, $AB=2AD$ 画成的.

画一个直立的平面时，可以把平面画成矩形或平行四边形. 如画图 9-1(2) 中的平面 γ 或(3) 中的平面 β 时，要使它们的一条竖边与水平平面的横边垂直.

如果一个平面的一部分被另一个平面遮住时，那末被遮住部分的线段应画成虚线或不画(图 9-1(2)、(3)).

二　平面图形直观图的画法

我们知道，在水平平面内画矩形不是画它的真实形状(简称真象)，而是画成平行四边形. 这个平行四边形通常叫做矩形的直观图. 一般地，我们把平面图形(或空间图形)在水平平面内所画成的图形叫做该图形的直观图. 下面举例说明平

面图形的直观图的画法.

例 1 在水平平面 α 内画已知正方形 $ABCD$ 的直观图(图 9-2).

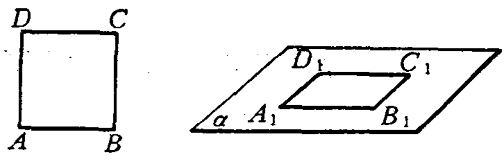


图 9-2

画法 (1) 在平面 α 内画水平线段 A_1B_1, 使 $A_1B_1=AB$.

(2) 作 $\angle B_1A_1D_1=45^\circ$, 并且取 $A_1D_1=\frac{1}{2}AD$.

(3) 作 $D_1C_1 \parallel A_1B_1$, 并且取 $D_1C_1=A_1B_1$.

(4) 连结 B_1C_1, 则 $\square A_1B_1C_1D_1$ 就是正方形 $ABCD$ 的直观图.

例 2 在水平平面 α 内画已知三角形 ABC 的直观图(图 9-3).

画法 (1) 在 $\triangle ABC$ 内作高 CD.

(2) 在平面 α 内画水平线段 A_1B_1, 使 $A_1B_1=AB$.

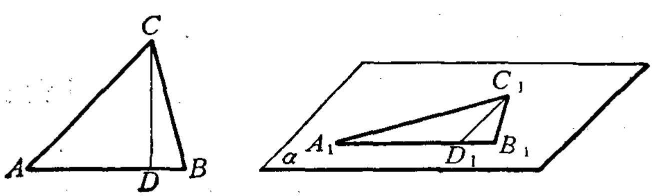


图 9-3

(3) 在 A_1B_1 上取 $A_1D_1=AD$. 作 $\angle C_1D_1B_1=45°$, 并且取 $D_1C_1=\frac{1}{2}DC$.

(4) 分别连结 A_1C_1 和 B_1C_1, 则 $\triangle A_1B_1C_1$ 就是三角形 ABC 的直观图.

例3 在水平平面 α 内画已知正六边形 $ABCDEF$ 的直观图(图 9-4).

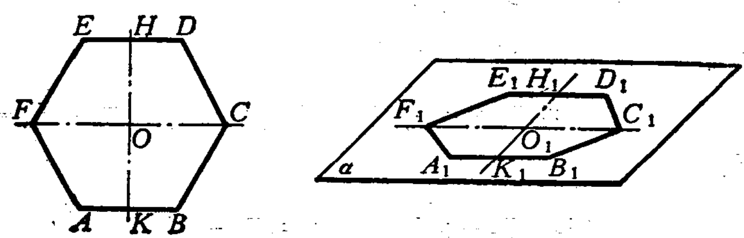


图 9-4

画法 (1) 连结正六边形的对角线 FC, 并取其中点 O. 过 O 作 $HK\perp FC$. 显然, $FC\parallel AB$, $OH=OK$.

(2) 在平面 α 内画水平线段 F_1C_1, 使 $F_1C_1=FC$.

(3) 在 F_1C_1 上取中点 O_1, 过 O_1 作直线 H_1K_1, 使 $\angle H_1O_1C_1=45°$, 并且取 $O_1H_1=O_1K_1=\frac{1}{2}OH$.

(4) 过 H_1、K_1 分别作 $E_1D_1\parallel F_1C_1$, $A_1B_1\parallel F_1C_1$, 并且取 $E_1H_1=H_1D_1=A_1K_1=K_1B_1=\frac{1}{2}AB$.

(5) 连结 B_1C_1, C_1D_1, E_1F_1, F_1A_1, 则六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 就是正六边形 $ABCDEF$ 的直观图.

归纳上面的例子可以知道, 在水平平面内画平面图形的直观图一般可遵循下面的规则:

(1) 选择已知图形的水平方向线段（或作辅助的水平线段）；

(2) 凡水平方向的线段仍画成水平方向，其长度不变（即实长）；

(3) 凡与水平方向线段垂直的线段画成与水平方向成45°角（或135°角）的线段，其长度为实长的一半。

三 平面的基本性质

下面的三条公理说明了平面的一些基本性质，它们是研究空间直线、平面的位置关系的理论基础。

公理1 如果一条直线上的两点在一个平面内，那末这条直线上所有的点都在这个平面内。

如图 9-5 所示，设直线 l 上两点 A 和 B 在平面 α 内，则 l 上所有的点都在平面 α 内。这时，我们说直线 l 在平面 α 内或平面 α 经过直线 l。

公理2 如果两个平面有一个公共点，那末它们相交于经过这点的一条直线。

如图 9-6 所示，设 A 是平面 α 和平面 β 的一个公共点，

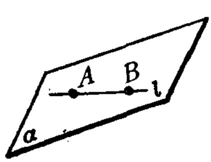


图 9-5

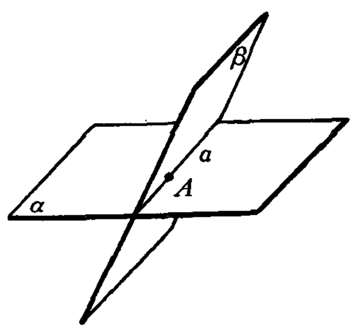


图 9-6

则平面α和平面β就相交于过A点的一条直线a. 这时，我们说平面α和平面β相交于直线a.

天花板和墙壁的交线，折纸的折痕等都说明了两个平面相交是成一条直线的.

公理3 经过不在同一直线上的任意三点，可以引一个平面，并且只可以引一个平面.

如图9-7所示，设A、B、C是不在同一直线上的任意三点，则经过这三点可以画一个平面，并且只可以画一个平面. 公理3可以简单地说成"不在同一直线上的三点确定一个平面". 这里的"确定一个平面"是指"可以引并且只可以引一个平面"的意思.

例如：测量仪和照相机的支承架采用三个脚，就是应用这个道理.

根据公理1和公理3，还可以推得确定一个平面的三个推论.

推论1 一条直线和这条直线外的一点可以确定一个平面.

如图9-8所示，设C是直线l外的一点，在l上取A、B两点，这样，A、B和C组成不在同一直线上的三点. 根据公理3，这三点可以确定一个平面α. 因为直线l上有两点A、B在平面α内，根据公理1，可知直线l在平面α内，所以直线

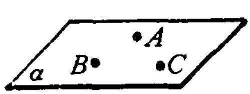


图 9-7

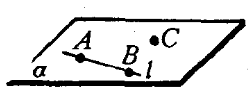


图 9-8

l 和 l 外的一点 C 可以引一个平面.

我们还要进一步证明，这样的平面只能引一个.

如果在直线 l 上另外取与 A、B 不完全重合的两点 A_1、B_1，那末 A_1、B_1 和 C 三点可以引另一个平面 β，显然，直线 l 在这个平面 β 内，也就是 l 是平面 α 和平面 β 的交线. 由于点 C 既在 α 内也在 β 内，因此 C 点必在 α 和 β 的交线上. 这就与点 C 是直线 l 外的一点相矛盾，所以平面 β 和平面 α 是重合的. 由此可知一条直线和这条直线外的一点可以确定一个平面.

推论 2 两条相交的直线可以确定一个平面.

如图 9-9 所示，设直线 l 与 m 相交于点 A，除 A 点外，在直线 l 上取 B 点，直线 m 上取 C 点，这样，A、B 和 C 就是不在同一直线上的三点. 根据公理 3，这三点确定一个平面 α. 因为直线 l 和 m 上都分别有两点在平面 α 内，根据公理 1，可知直线 l 和 m 都在平面 α 内，所以两条相交的直线可以引一个平面. 用与推论 1 相类似的方法可以证明，这样的平面只能引一个，也就是两条相交的直线可以确定一个平面.

推论 3 两条平行直线可以确定一个平面.

如图 9-10 所示，设 l 和 m 是两条平行直线. 根据平行线的定义可知，两条平行线必在一个平面内，即经过平行线 l 和 m 可以引一个平面 α. 用与推论 1 相类似的方法，还可以

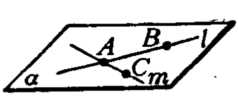


图 9-9

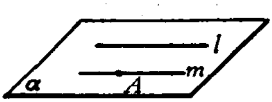


图 9-10

证明，这样的平面只能引一个. 也就是两条平行直线可以确定一个平面.

空间的点、直线和平面相互之间的关系，可以用集合的符号来表示. 我们规定：

(1) 点 A 在直线 l 上，记作 $A\in l$；

(2) 点 A 在平面 α 内，记作 $A\in\alpha$；

(3) 直线 l 在平面 α 内，记作 $l\subset\alpha$ 或 $\alpha\supset l$；

(4) 直线 l 与平面 α 交于点 N，记作 $l\cap\alpha=N$；直线 l 与平面 α 没有交点，记作 $l\cap\alpha=\phi$；

(5) 平面 α 与平面 β 相交于直线 l，记作 $\alpha\cap\beta=l$；平面 α 与平面 β 没有公共点，记作 $\alpha\cap\beta=\phi$.

例 4 证明两两相交且不过同一点的三条直线共面（即在同一平面内）.

已知 AB、BC、CA 为三条直线，$AB\cap BC=B$，$AC\cap BC=C$，$AB\cap AC=A$（图 9-11）.

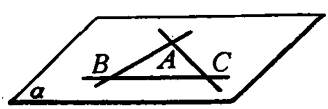


图 9-11

求证 AB、BC、AC 共面.

证 $\because$ $AB\cap AC=A$，

$\therefore$ AB 和 AC 可以确定一个平面 α.

$\because$ $B\in AB$，$C\in AC$，

$\therefore$ $B\in\alpha$，$C\in\alpha$，从而 $BC\subset\alpha$.

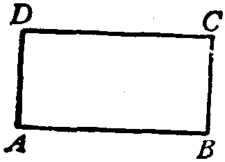
即 AB、BC、AC 三条直线共面.

习 题 9-1

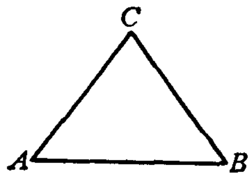
1. 在水平平面内作下列各已知平面图形的直观图，并说明作图步

骤:

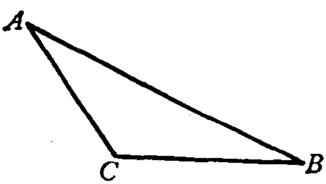
(1) 矩形;



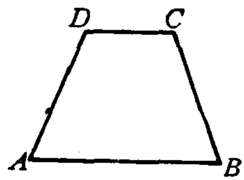
(2) 等腰三角形;



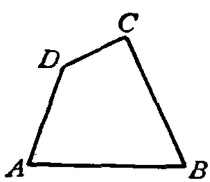
(3) 钝角三角形;



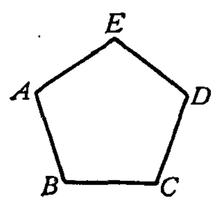
(4) 等腰梯形;



(5) 任意四边形;



(6) 正五边形;



2. 回答下面的问题:

(1) 一条线段在一个平面内,这条线段的延长线是否也一定在这个平面内?

(2) "三点确定一个平面"的说法对吗?

(3) 三角形、梯形是否为平面图形?

(4) 一条直线是否可以确定一个平面?

(5) 三条直线相交于一点,最多能确定几个平面?

(6) 空间有四个点,它们中间的任何三点都不在一条直线上,这样的四个点能确定多少个平面?

(7) 空间三条直线两两平行，且不在同一个平面内，这样的三条直线能确定几个平面？

3．证明：如果一条直线和两条平行线相交，那末这三条直线共面．

4．过已知直线外一点，向这条直线上的三个定点分别连结三条线段，试证这三条线段共面．

5．四条线段依次首尾相接，所得的封闭图形一定是平面图形吗？为什么？

§9-2 直线和直线的位置关系

一 两条直线的位置关系

如图 9-12 所示的长方体，它的每一个侧面都是矩形．线段 A_1B_1、AA_1 和 AB 在同一平面内，它们的位置关系是：

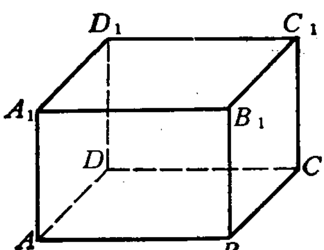


图 9-12

$A_1B_1 \parallel AB$，$A_1B_1 \cap AA_1 = A_1$．

线段 A_1B_1 和 AD 不在同一平面内，它们既不相交也不平行．对于这样既不相交又不平行的直线，给出下面的定义：

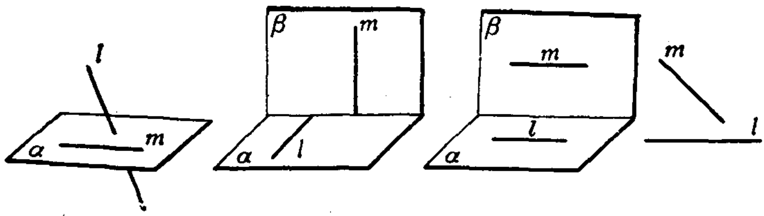
定义 不在同一平面内的两条直线叫做**异面直线**（或交错直线）．

由此可见，空间两条不重合的直线，它们的位置关系有三种：

$\left.\begin{array}{l}\text{(1) \textbf{平行直线}——没有公共点} \\ \text{(2) \textbf{相交直线}——只有一个公共点}\end{array}\right\}$在同一平面内；

(3) **异面直线**——没有公共点，不在同一平面内．

画异面直线时，要把两条直线画在不同的平面内，使它们看上去既不相交也不平行．如图 9-13 所示，直线 l 和 m 是异面直线，其中(1)、(2)二图的画法比较直观，而(3)、(4)二图的画法不能显示出异面直线的特点，因此这两种画法应该避免．



（1）　（2）　（3）　（4）

图　9-13

二　空间直线的平行关系

我们知道，在平面内平行于同一条直线的两条直线一定平行．下面的定理 1 将说明在空间也有类似的结论．

定理 1　不在同一平面内的三条直线，如果其中两条直线都平行于第三条直线，那末这两条直线也互相平行．

这个定理的证明从略．事实上它的正确性是很明显的．例如，图 9-14 是一个三棱尺，它的三条棱 AA_1、BB_1、CC_1 是空间的三条线段．可以看出，如果 BB_1、CC_1 分别和 AA_1 平行，那末 BB_1 和 CC_1 也互相平行．

又如，$ABB'A'$（图 9-15(1)）是一张矩形的纸片，线段 $C'C$ 和边 $A'A$、$B'B$ 平行．将纸片 $ABB'A'$ 沿 $C'C$ 折成如图 9-15(2) 的形状，这时 $A'A$、$B'B$、$C'C$ 就成为空间的三条线段．可以看出，因为 $A'A \parallel C'C$，$B'B \parallel C'C$，所以 $A'A \parallel B'B$．

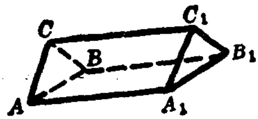


图 9-14

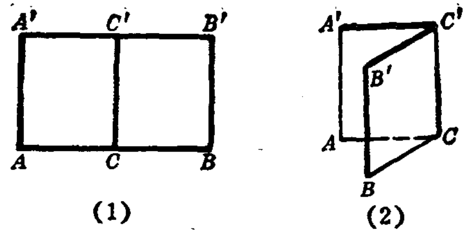


图 9-15

例 1 已知 $ABCD$ 是四个顶点不在同一个平面内的空间四边形，E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点(图 9-16)，连结 EF、FG、GH、HE，求证 $EFGH$ 是一个平行四边形.

证 $\because$ EH 是 $\triangle ABD$ 的中位线，

$\therefore$ $$EH \underline{\parallel} \frac{1}{2}BD.$$

同理 $$FG \underline{\parallel} \frac{1}{2}BD.$$

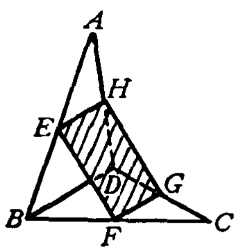


图 9-16

根据定理 1，可知 $EH \underline{\parallel} FG$，即 $EFGH$ 是一个平行四边形.

我们知道，在平面内，对应边平行并且方向相同的两个角相等. 下面的定理 2 将说明在空间也有类似的结论.

定理 2 不在同一平面内的两个角，如果其中一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那末这两个角相等.

已知 $\angle ABC \subset \alpha$，$\angle DEF \subset \beta$，$BA \parallel ED$，$BC \parallel EF$，