于明刚　邢玉芬　编

通俗概率统计

山东大学出版社

TONGSU
GAILUTONGJI

通俗概率统计

于明刚　邢玉芬编

山东大学出版社

一九八七年四月

通俗概率统计

于明刚　　　　邢玉芬编

*

山东大学出版社出版

山东省新华书店发行　山东牟平印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开　6印张　131千字

1987年4月第1版　1987年4月第1次印刷

印数　1—5,000

书号：13338·15　　　　定价　1.35元

目　录

第一章　预备知识

第一节　集合的概念

一、什么叫集合

人们的认识与实践活动离不开集合的概念，可以说我们时时刻刻都在和集合打交道，只不过还没有提到理论上来认识。譬如：一个班集体是全班学生的集合；某拖拉机站的所有拖拉机是这个站拖拉机的集合；太阳系是太阳和所有行星等的集合；第三世界是发展中国家的集合等等。

集合是数学的最基本的概念，一般可理解为：具有某种共同性质的一些对象组成的全体，简称集合。组成某一集合的那些对象叫做该集合的元素。我们常用大写字母A、B、C…等表示集合，用小写字母a，b，c…等表示元素，如果a是集合A的元素，则称"a属于A"，记作$a \in A$；如果a不是集合A的元素，则称"a不属于A"记作$a \overline{\in} A$。譬如：第三世界中的国家不属于太阳系的集合，拖拉机不属于学生的集合等等。

例1．设J为所有整数的集合，它的元素是哪些数？8，-7，$\frac{1}{3}$，$\sqrt{3}$，是否属于J？

答：集合J的元素是：…，-2，-1，0，1，2，…。

$8\in J$，$-7\in J$，$\frac{1}{3}\notin J$，$\sqrt{3}\notin J$。

例2。 设集合A是由大于4而小于12的偶数所组成，那么，4，6，9，10，11，12是否属于A。

答：$6\in A$，$10\in A$，$4\notin A$，$9\notin A$，$11\notin A$，$12\notin A$。

二、集合的表示法

1.列举法：把集合中的元素一一列出来，写在大括号“{ }”内，每一个元素仅写一次，且不分次序，象这样表示集合的方法叫做列举法。例如：由3，2，0，5，$\sqrt{2}$，$\frac{1}{4}$这六个数组成的集合，可写成$\{3,2,0,5,\sqrt{2},\frac{1}{4}\}$或$\{2,0,3,\sqrt{2},5,\frac{1}{4}\}$或$\{\frac{1}{4},0,2,\sqrt{2},5,3\}$等。但不能写成$\{3,2,2,0,5,\sqrt{2},\frac{1}{4}\}$或$\{3,2,0,5,\sqrt{2},2,\frac{1}{4}\}$等。

2.描述法：把集合中元素的共同特性描述出来，写在大括号“{ }”内，用来表示集合，象这样表示集合的方法叫做描述法。

例1.由一个班的全体学生组成的集合，用描述法可表示为

{一个班里的学生}

例2.由小于10的正偶数组成的集合，可表示为

{小于10的正偶数}

或 {x | x为小于10的正偶数}

或　　　$\{x:\ x$为小于10的正偶数$\}$

例3. 由不等式$x-2>1$的所有解组成的集合可表示为

$$\{x \mid x-2>1\}$$

或 $\{x:\ x-2>1\}$.

例4. 平面上有两点P，Q，该平面上动点的集合$\{M \mid MP=MQ\}$表示什么？

解：由平面几何知识可知，这表示到两定点P，Q等距离动点M的轨迹，是PQ连线的垂直平分线。

我们规定用N表示自然数集合，J表示整数集合，Q表示有理数集合，R表示实数集合。

三、集合的分类

1. 有限集：包含有限个元素的集合叫做有限集，例如$\{x \mid x$是小于10的正奇数$\}$；$\{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 100,\ x \in N\}$

（1）单元素集：是只含有一个元素的集合，是有限集合的特例。例如$\{a\}$；$\{x\}$；$\{0\}$. 这里的$\{a\}$和a是不同的，a只是表示一个元素，而$\{a\}$是表示只含有一个元素的集合。

（2）空集：不含任何元素的集合叫做空集，用符号ϕ表示。例如，$\{$小于零的正整数$\}=\phi$；$\{x \mid x^2+1=0\ x \in R\}=\phi$。但应注意，空集$\phi$与$\{0\}$是不同的，$\phi$表示不含任何元素的集合，而$\{0\}$是表示只含有一个元素即零的单元素集合。例如

$$\{x \mid x^2=0\}=\{0\}$$

2. 无限集：集合中所包含的元素的个数是无限个，这样的集合叫做无限集，例如：

$\{x \mid x-2>1\}$；表示平面内直线$x+y=0$上所有

点的集合为 $\{(x, y) \mid x+y=0\}$。

在无限集中，能与自然数建立一一对应关系的集合叫可列集（或可数集），否则叫不可列集。例如：

$$\{x \mid x=\frac{1}{n},\ n\in N\}=\{\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}\cdots\}.$$

练习题 1.1

1.说出下列集合的元素：

（1）{平方等于9的数}；

（2）$\{x \mid x^2=x\}$；

（3）$\{x \mid 2<x<6,\ x\in J\}$；

（4）$\{x \mid x=2n,\ n\in J\}$；

（5）$\{x \mid x=2n+1,\ n\in J\}$。

2.指出下列各集合属哪一类集合：

（1）$\{x \mid 0<x<100$，x为实数$\}$；

（2）$\{x \mid 0<x<100$，x为偶数$\}$；

（3）$\{x \mid x>5$，x为负数$\}$；

（4）$\{x \mid x=n-(n-1),\ n\in N\}$；

（5）$\{x \mid x=2,4,6,8,\cdots\}$。

第二节　集合的运算

一．子集、并集、交集、差集、余集、全集的概念。

1.子集：如果属于集合A的任一元素都属于集合B，则称A是B的子集。

记作$A\subset B$或$B\supset A$。如图1·1

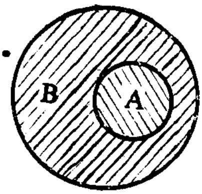


图1·1

这里用符号"⊂"表示包含，开口向那个集合，那个集合就包含另一个集合，只能用于集合与集合之间。

例如：$A=\{1, 2, 3,\}$，$B=\{1, 2, 3, 4, 5,\}$。

则：$A\subset B$或$B\supset A$

如果集合A和集合B都是由同样元素组成的，则称A等于B。记作$A=B$。

例如：$A=\{a, b, c, d, e\}$，$B=\{b, c, e, d, a\}$。

则$A=B$，或$A\subset B$且$B\subset A$。

真子集：如果B是A的子集，A中至少有一个元素不属于B，那么集合B就叫做集合A的真子集。显然，当$A=B$时，可认为是互为子集，但不是真子集。空集ϕ，是任何集合的子集。

例1.设集合$A=\{1, 2, 3\}$，写出它的全部子集。

解：$\{1, 2, 3\}$，ϕ，$\{1, 2\}$，$\{1, 3\}$，$\{2, 3\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$。

2.并集：把属于集合A与集合B的所有元素合并在一起。（若两集合中有重复元素，则只取一次）所组成的集合，叫做集合A与B的并集，记作$A\cup B$。即$A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$。图1·2的阴影部分表示$A\cup B$。

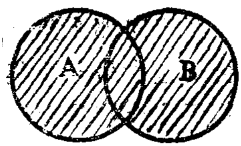


图1·2

例1.设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4,5\}$。求、$A\cup B$。

解：$A\cup B=\{1,2,3\}\cup\{3,4,5\}$
$=\{1,2,3,4,5\}$。

例2.设$A=\{x\mid -2<x<3\}$，$B=\{x\mid 1<x<5\}$，求：$A\cup B$。

解：$A\cup B=\{x\mid -2<x<3\}\cup\{x\mid 1<x<5\}$
$=\{x\mid -2<x<5\}$。

3.交集：把既属于集合A又属于集合B的元素组成的集合，叫做A与B的交集，记作$A\cap B$。即$A\cap B=\{x\mid x\in A$且$x\in B\}$。如图1·3的阴影部分就是$A\cap B$。

例1.设$A=\{x\mid -\infty<x<3\}$，$B=\{x\mid 1<x<+\infty\}$。

求$A\cap B$。

解：$A\cap B=\{x\mid -\infty<x<3\}\cap\{x\mid 1<x<+\infty\}$
$=\{x\mid 1<x<3\}$。

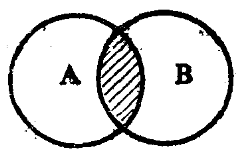


图1·3

例2.设$A=\{(x,y)\mid x+2y=3\}$，
$B=\{(x,y)\mid 4x+y=5\}$。

求 $A\cap B$。

解：$A\cap B=\{(x,y)\mid y+2y=3\}\cap\{(x,y)\mid 4x+y=5\}$

$$=\{(x,y)\mid \begin{cases}x+2y=3\\4x+y=5\end{cases}\}=\{(1,1)\}.$$

对求两个以上集合的交集仍是取它们公共元素所组成的集合。

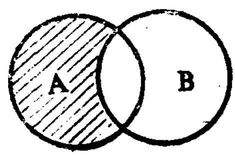
例3．设A＝{1，2，3，4，5}，B＝{2，3，4}，C＝{3，4，5}。求A∩B∩C。

解：A∩B∩C＝{1，2，3，4，5}∩{2，3，4}∩{3，4，5}＝{2，3，4，}∩{3，4，5}＝{3，4}．

4.差集：属于A而不属于B的全体元素所组成的集合，叫做A与B的差集．记作A－B，如图1·4的阴影部分。

例1.设A＝{x｜1＜x＜4}，B＝{x｜0＜x＜2}，求A－B。

解：A－B＝{x｜1＜x＜4}－{x｜0＜x＜2}＝{x｜2⩽x＜4}．



1·4

参考图1·5

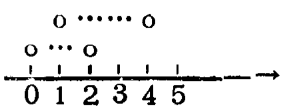


图1·5

5.全集和余集，在研究集合与集合之间的关系时，某些集合常常是给定集合的子集，我们就把给定的集合叫做全集，用符号“Ω”表示，也就是说全集包含了我们所研究的所有集合的全部元素。

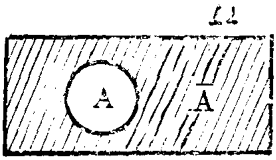


图1·6

设有某一个给定的全集Ω，A是集合Ω的子集，那么在集合Ω中除去子集A，余下的一切元素所组成的集合，叫做A的余集，记作$\overline{A}$。如图1·6中的阴影部分表示的就是全集Ω，除去子集A剩下的部分即余集$\overline{A}$。

例1．设$\Omega=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$，$A=\{x \mid -\infty<x<a\}$．求$\overline{A}$。

解：$\overline{A}=\Omega-A=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}-\{x \mid -\infty<x<a\}=\{x \mid a\leqslant x<+\infty\}$。

例2．设$\Omega=\{0,1,2,3,4\}$，$A=\{0,3,4\}$．求$A\cup\overline{A}$，和$A\cap\overline{A}$。

解：$\overline{A}=\{0,1,2,3,4\}-\{0,3,4\}=\{1,2\}$。

$A\cup\overline{A}=\{0,3,4\}\cup\{1,2\}=\{0,1,2,3,4\}$。

$A\cap\overline{A}=\{0,3,4\}\cap\{1,2\}=\phi$.

二 集合运算的性质

1.并集与交集满足交换律：

(1) $A\cup B=B\cup A$

(2) $A\cap B=B\cap A$

例1．设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$那么$A\cup B=\{1,2,3\}\cup\{2,3,4\}=\{1,2,3,4\}$．

$B\cup A=\{2, 3, 4\}\cup\{1, 2, 3\}$,

$=\{1, 2, 3, 4\}$。

例2．设$A=\{a, b, c, d, e\}$，$B=\{c, d, e, f\}$。

$A\cap B=\{a, b, c, d, e\}\cap\{c, d, e, f\}=\{c, d, e\}$。

$B\cap A=\{c, d, e, f\}\cap\{a, b, c, d, e\}=\{c, d, e\}$。

并集和交集满足交换律，是很明显的。只用实例验证即可。（不详证）。

2.并集与交集满足结合律：

（1）$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

（2）$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$。

例3．设$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$，$B=\{a_3, a_4, a_5, a_6\}$，$C=\{a_5, a_6, a_7\}$。

$A\cup(B\cup C)=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}\cup(\{a_3, a_4, a_5, a_6\}\cup\{a_5, a_6, a_7\})=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}\cup\{a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$。

$(A\cup B)\cup C=(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$。（读者自证）

例4．设$A=\{e_1, e_2, e_3\}$；$B=\{e_2, e_3, e_4\}$，$C=\{e_2, e_4\}$。

$A\cap(B\cap C)=\{e_1, e_2, e_3\}\cap(\{e_2, e_3, e_4\}\cap\{e_2, e_4\})=\{e_1, e_2, e_3\}\cap\{e_2, e_4\}=\{e_2\}$。

$(A\cap B)\cap C=\{e_2\}$（读者自证）

从例3和例4可以看出并集与交集是满足结合律的。

3. 并集与交集满足分配律：

$$（1）A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

$$（2）A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

下面给出证明，证明的思路是先从等号左边的集合中，任取一个元素e，逐步推出e也属于等号右边集合，于是等号右边的集合包含左边的集合；然后反过来，从等号右边的集合中，任取一个元素e，经逐步推导，得出e也属于左边的集合，于是左边的集合也包含右边的集合，故两集合相等。但在证明时，如用的是等价关系，只从一端证到另一端即可。我们下面的证明，虽然用等价关系，仍从两方面证，为的是使学生遇到包含关系时，也会证题。

证明（1）设e是$A\cap(B\cup C)$中任一元素，则有

$$e\in A\cap(B\cup C);$$

e属于A和$B\cup C$的交，即既属于A又属于$B\cup C$，

$e\in A$且$e\in B\cup C$，$e\in B$或$e\in C$，

这说明$e\in A$且$e\in B$或$e\in A$且$e\in C$，

即$e\in A\cap B$或$e\in A\cap C$，

$\therefore\ e\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$成立。

反之：设$e\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$e\in A\cap B$或$e\in A\cap C$，

$e\in A$且$e\in B$或$e\in A$且$e\in C$，

$\therefore e\in A$且$e\in B$或$e\in C$，

$e\in A\cap(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$成立。

故有$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

证明过程中，每推导一步都是用等价关系，凡是“并”的关系可等价于“或”，凡是“交”的关系可等价于“且”“并”与“或”，“且”与“交”灵活运用，相互推导，就可得出证明。

对（2）的证明从略。

例5．证明 $(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$。

证：从集合 $(A_1 \cup A_2) \cap A_3$ 中任取一元素x，则 $x \in (A_1 \cup A_2) \cap A_3$。

$x \in A_1 \cup A_2$ 且 $x \in A_3$，

$x \in A_1$ 或 $x \in A_2$，且 $x \in A_3$，

$x \in A_1$ 且 $x \in A_3$ 或 $x \in A_2$ 且 $x \in A_3$，

$x \in (A_1 \cap A_3)$ 或 $x \in (A_2 \cap A_3)$，

$x \in (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$，

$\therefore (A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$．

因在证明中用的是等价关系，所以只从左边证到右边，不用从右边再证到左边。

4．余集的运算律：

我们首先规定，下面用到的集合A，B，…就是全集Ω的子集。

（1）$\overline{\overline{A}} = A$

这是表示集合A的余集 $\overline{A}$ 的余集 $\overline{\overline{A}}$ 等于集合A，具体证明留给读者。

（2）如果 $A \subset B$，那么 $\overline{A} \supset \overline{B}$。

证明：$\overline{A} = \Omega - A$，$\overline{B} = \Omega - B$，

$\Omega - A \supset \Omega - B$．

$\therefore \overline{A}\supset\overline{B}$。

（3）$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

证明：设e是集合$\overline{A\cup B}$中任一元素，则

$e\in\overline{A\cup B}$,

$e\notin A\cup B$

$e\notin A$ 且 $e\notin B$，（注意，这里为何用"且"不用"或"）。

$e\in\overline{A}$且$e\in\overline{B}$,

$e\in\overline{A}\cap\overline{B}$,

$\therefore \overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$。

反之，设e是集合$\overline{A}\cap\overline{B}$中任一元素，则

$e\in\overline{A}\cap\overline{B}$,

$e\in\overline{A}$且$e\in\overline{B}$,

$e\notin A$且$e\notin B$,

$e\notin A\cup B$,

$e\in\overline{A\cup B}$,

$\therefore \overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$。

故 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

（4）$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

证明的思想方法和对（3）的证明完全相同，具体证明，留给读者。

练习题 1.2

1.用形如A＝{元素x | x具有性质P}的记号，表示下列集合。

（1）小于100的正整数集合。