南开大学数学教学丛书

拓扑学基础

林金坤 编

科学出版社

南开大学数学教学丛书

拓 扑 学 基 础

林金坤 编

科 学 出 版 社

1 9 9 8

内 容 简 介

本书主要内容包括：拓扑空间理论；单纯复形和多面体；基本群；同调群. 每节后都附有一定量的习题. 本书作为南开大学教学用书多年.

读者范围：高校数学系学生、教师.

图书在版编目(CIP)数据

拓扑学基础/林金坤编. -北京：科学出版社，1998

(南开大学数学教学丛书)

ISBN 7-03-006380-5

Ⅰ. 拓… Ⅱ. 林… Ⅲ. 拓扑 Ⅳ. O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 24189 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

新蕾印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1998年6月第一版　开本：850×1168 1/32

1998年6月第一次印刷　印张：5 3/4

印数：1—2 800　字数：150 000

定价：9.60 元

序

海内外华夏炎黄子孙都盼望中国早日成为数学大国，也就是"实现中国数学的平等和独立"[1]. 平等和独立是由中国出类拔萃的数学家及其杰出的研究工作来体现的，要有出类拔萃的数学家就要培养一批优秀的研究生、大学生. 这批人不在多，而在精，要层次高. 也就是要求他们热爱数学、基础扎实、知识面广、能力强.

80 年代中期，国家采纳了陈省身先生的几个建议. 建议之一是为培养高质量的数学专业的大学生，需要建立数学专业的试点班. 经过胡国定先生等的努力，1986 年在南开大学建立了数学专业的试点班. 这些作法取得了成功，并在基础学科的教学中有了推广. 1990 年在全国建立"国家理科基础学科研究和教学人才培养基地". 其后南开大学数学专业成为基地之一. 从 1986 年到现在的 10 余年中南开数学专业是有成绩的，例如他们四次参加全国大学生数学竞赛获三次团体第一，一次团体第三. 在全国和国际大学生数学建模比赛中多次获一等奖. 毕业生中的百分之八十继续攻读研究生，其中许多人取得了很好的成绩.

当然，取得这些成绩是与陈省身先生的指导、帮助分不开，是与国内外同行们的支持与帮助分不开的. 如杨忠道，王叔平，许以超，虞言林，李克正等或参与教学计划、课程设置、课程内容的制订，或到南开任教等等. 有了这些指导、帮助与支持，南开基础数学专业得以广泛吸收国内外先进的数学教学经验，并以此为基础对数学教学进行了许多改革、创新.

这套丛书是南开大学数学专业的部分教材，编著者们长期在南开数学专业任教，不断地把自己的心得体会揉和到基础知识和

---

〔1〕 陈省身:《在"二十一世纪中国数学展望"学术讨论会开幕式上的讲话》

基本理论的讲述中去，日积月累地形成了这套教材.所以可以说这些教材不是“编”出来的，而是在长期教学中“教”出来的，“改”出来的，凝聚了我们的一点心血.这些教材的共同点，也是我们教学所遵循的共同点是：首先要加强基础知识、基础理论和基本方法的教学；同时又要适当地开拓知识面，尤其注意反映学科前沿的成就、观点和方法；教学的目的是丰富学生的知识与提高学生的能力，因此配置的习题中多数是为了巩固知识和训练基本方法，也有一些习题是为训练学生解题技巧与钻研数学的能力.

我们要感谢中国科学出版社主动提出将这套教材出版.这对编著者是件大好事.编著者虽然尽了很大努力，但一则由于编著者的水平所限，二则数学的教育和所有学科的教育一样是在不断发展之中，因此这套教材中缺欠和不足肯定存在.我们诚挚希望各位同行不吝指正，从而使编著者更明确了解教材及教学中的短长，进而扬长避短，改进我们的教学.同时通过这套教材也可向同行们介绍南开的教学经验以供他们参考，或许有益于他们的工作.

我们再次感谢帮助过南开的前辈、同行们，同时也希望能继续得到他们和各位同行的帮助.办好南开的数学专业，办好所有学校的数学专业，把中国数学搞上去，使中国成为数学大国是我们的共同愿望！这个愿望一定能实现！

编著者

于南开大学

1998 年 6 月

目　录

绪　论 ……………………………………………… 1
第一章　拓扑空间 ……………………………………… 3
§1　度量空间 ………………………………………… 3
§2　拓扑空间 ………………………………………… 9
§3　关于子集的基本概念 ………………………… 13
§4　连续映射与同胚 ……………………………… 17
§5　紧致性 ………………………………………… 22
§6　连通性 ………………………………………… 28
§7　乘积空间 ……………………………………… 34
§8　商空间 ………………………………………… 39
§9　映射的同伦　空间的伦型 …………………… 46
第二章　单纯复形和多面体 ………………………… 53
§1　单纯形　单纯复形和多面体 ………………… 53
§2　多面体的连通性 ……………………………… 65
§3　重心重分和单纯逼近 ………………………… 67
第三章　基本群 ……………………………………… 75
§1　基本群的定义和性质 ………………………… 75
§2　计算方法及一些简单运用 …………………… 83
§3　应用：覆盖映射和覆盖空间 ………………… 100
第四章　同调群 ……………………………………… 111
§1　单纯同调群 …………………………………… 111
§2　奇异同调群 …………………………………… 117
§3　正合序列和切除定理 ………………………… 128
§4　单纯和奇异同调的一致性 …………………… 142

§5 一般系数的同调群 ············ 158
§6 应用: Lefschetz 不动点定理 ············ 167
参考书目 ············ 171
后记 ············ 172
索引 ············ 173

绪 论

拓扑学 是由英文 Topology 音译而来，这是起源于希腊文的名词，原意地志学． 1847 年首次由高斯 (Gauss) 的学生 Listing 引进．在此之前，数学家称拓扑学为位置分析 (Analysis situs)，这表明它研究的是根据分析的需要而提出的一些几何问题．拓扑学是近代发展起来高度抽象的一门几何学．根据德国数学家 Klein 提出的、史称爱尔朗根纲领 (Erlangen) 的思想，各种几何学可按照变换群进行分类，即几何学是研究空间 (或图形) 在某种变换下的不变性质．例如，欧氏几何是研究刚体运动下的不变性质，仿射几何是研究仿射变换下的不变性质 (仿射性质)，等等．

拓扑学研究空间在拓扑变换 (或同胚) 下的不变量或不变性质．所谓同胚的空间 X 与 Y 是指 X 与 Y 之间存在双向连续的 (即互逆且连续) 对应，形象的说就是橡皮泥 X 在不允许隔断的情况下可以捏成 Y．拓扑学中同胚的两个空间 X 与 Y 可不加区别，因此俗称 *橡皮几何学*．

从历史发展的观点来看，拓扑学起源于 19 世纪中叶以前一些孤立问题的研究．早在 17 世纪 Euler 发现了闭多面体的顶点个数 d，棱的个数 e，面的个数 v 存在一个关系： $v-e+d=2$．Euler 当时并不知道， 2 是 (二维) 球面的拓扑不变量，即后来的 Euler-Poincaré 示性数． 18—19 世纪，数学家研究了地图着色问题，即平面 (或球面) 上的地图着几种颜色才能使每相邻国家有不同颜色．这个问题到 1890 年才证明了用五个颜色是可以的，并提出了四个颜色也可以的猜想，即著名的四色问题．球面的色数是和球面的 Poincaré 示性数有关联的．此外， Jordan

曲线定理: 平面上简单闭曲线将平面分成两部分, 高斯研究扭结和二重积分的联系等等是当时研究的一些孤立问题, 而后成为拓扑学的有关问题.

拓扑学历史发展的转折点应归功于 Riemann 关于闭曲面间的拓扑分类的结果. 19 世纪中叶, Riemann 发现了多值复变解析函数可转化为闭曲面上的单值函数, 并得出闭曲面的拓扑分类: 闭曲面按同胚分类只有球面和若干个环面的连通和 (或) 球面与若干个射影平面的连通和. 此后拓扑学所应研究的对象及其重要性逐渐清晰, 更多的数学家在致力于这方面的研究.

拓扑学最早形成一门学科应归功于 Poincaré. 他在研究代数簇 (复变函数, 微分方程) 的基础上, 通过将空间剖分成若干个单形的组合, 得出空间的 Betti 数, 挠系数的计算方法 (这就是以后的同调群), 还得出 Euler 定理的一般形式及基本群, 流形对偶定理等结果. 他在 1894—1912 年得出的这一系列成果, 标志着组合拓扑学的创立.

1910—1920 年左右, 以 Hausdorff, Alexander 为代表产生点集拓扑这一分支. 1930 年左右近代关于群的思想进入拓扑学, 组合拓扑变成为现在的代数拓扑. 1940 年左右, 以 Whitney 对微分流形的研究为标志, 产生了微分拓扑这一分支. 至于研究低维流形的几何拓扑学这一分支, 其问题的提出可追溯到 Poincaré 的那个时期, 但只是在近几十年来才有较多的进展和结果.

拓扑学发展到今天已经有诸多的分支, 有着丰富的结果和方法. 拓扑学已成为近代纯粹数学的重要支柱, 它的方法和结果日益地的渗透到分析、代数、几何、计算甚至于物理学等各个领域.

第一章 拓扑空间

§1 度量空间

设集合 $R^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i$是任意实数$, 1 \leq i \leq n\}$, 则当 $n=3$ 时就是空间解析几何课程中现实空间的点的集合，其中 R^n 中的元素 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 叫做点， x_i 是点 x 的坐标分量. 两点 x, y 的距离自然是

$$\rho(x,y) = [\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2]^{\frac{1}{2}} \in R^1$$

尽管当 $n > 3$ 时 R^n 已没有直观意义，但 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 仍叫做点， $\rho(x,y)$ 仍叫 x, y 之间的距离.

从 R^n 到 R^1 的对应 $f\colon R^n \to R^1$ 是 n 个实变数的实值函数，我们称 f 为连续函数时就需要 R^n 中的距离的概念. 集合 R^n 赋予上述距离 $\rho\colon R^n \times R^n \to R^1$, 则 (R^n, ρ) 叫做 欧氏空间. 上述 ρ 叫做欧氏空间的 通常度量. 这个通常度量显然满足以下性质： $\rho\colon R^n \times R^n \to R^1$ 是非负函数且

D1) $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$;

D2) 对称性： $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

D3) 三角不等式： $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$;

其中性质 D3) 的证明利用线性代数中关于内积的 Schwarz 不等式.

现在我们抛弃具体的集合 R^n, 抛弃所赋予的具体的距离 ρ, 只保留性质 D1)–D3), 就可以引进更一般的度量空间.

定义 1.1　设 X 为集，其元素叫做点，记为 x,y,z. $\rho: X \times X \to R^1$ 为非负函数满足 D1)–D3)，则 (X,ρ) 叫做 *度量空间*，函数 ρ 叫 (X,ρ) 的 *度量*，$\rho(x,y)$ 叫做 x,y 间的距离. 在明确所赋予的 ρ 时，(X,ρ) 可简记为 X.

例 1.2　n 维欧氏空间 $R^n=(R^n,\rho)$，其度量 ρ 为

$$\rho(x,y)=[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2]^{\frac{1}{2}}$$

例 1.3　Hilbert 空间 $R^\omega=(R^\omega,\rho)$，其中集合 $R^\omega=\{x=(x_1,x_2,\ldots) \mid x_i\in R^1, i=1,2,\ldots,\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2<+\infty\}$ 而度量 $\rho: R^\omega\times R^\omega\to R$ 定义为

$$\rho(x,y)=[\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(这是一个确定实数)}$$

显然 ρ 满足 D1)–D2)，在证明 D3) 时，可以根据 n 维欧氏空间 R^n 中的三角不等式再令 $n\to\infty$.

例 1.4　设集合 X 为闭区间 $[a,b]$ 上所有连续函数，令

$$\rho_1(x(t),y(t))=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$$

$$\rho_2(x(t),y(t))=[\int_a^b[x(t)-y(t)]^2dt]^{\frac{1}{2}}$$

则 $(X,\rho_1),(X,\rho_2)$ 都是度量空间.（习题）

例 1.5　X 为任一集合，定义 $\rho(x,y)=0$，当 $x=y$；$\rho(x,y)=1$，当 $x\neq y$，则 (X,ρ) 是度量空间，叫做 *离散度量空间*.

现在我们要把数学分析中的邻域概念引进度量空间. 分析中把开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 叫做点 a 的 ε- 邻域，即数轴上与点 a 距离小于 ε 的所有点. 因此我们作如下定义：

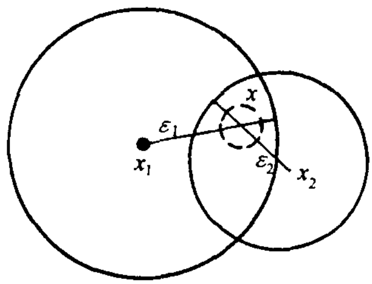
定义 1.6　设 (X,ρ) 为度量空间，$x\in X,\epsilon$ 为正数，则 X 的子集 $B(x,\epsilon)=\{y\in X, \mid \rho(y,x)<\epsilon\}$ 叫做以点 x 为中心，以 ϵ 为半径的 *球形邻域*，简称为 x 的 ϵ- 邻域.

命题 1.7　设 $\mathcal{B}$ 为度量空间 (X,ρ) 所有球形邻域组成的族，则

(1) $X=\cup_{B\in\mathcal{B}}B$.

(2) 若 $x\in B_1\cap B_2$, 其中 $B_1,B_2\in\mathcal{B}$, 则存在 x 的球形邻域 B_x, 使 $x\in B_x\subset B_1\cap B_2$.

(3) 若 $x\in B,B\in\mathcal{B}$, 则存在 X 的球形邻域 B_x 使 $x\in B_x\subset B$.



证：　(1) 因为每点 x 属于它的任何球形邻域，故 $X=\cup_{B\in\mathcal{B}}B$.

(2) 设 $B_i=B(x_i,\epsilon_i),i=1,2$. 令 $\epsilon=\min\{\epsilon_1-\rho(x,x_1),\epsilon_2-\rho(x,x_2)\}$, 则 $x\in B(x,\epsilon)$. 而对任意 $y\in B(x,\epsilon),\rho(y,x_i)\le\rho(y,x)+\rho(x,x_i)<\epsilon+\rho(x,x_i)\le\epsilon_i-\rho(x,x_i)+\rho(x,x_i)=\epsilon_i(i=1,2)$, 故 $y\in B(x_1,\epsilon_1)\cap B(x_2,\epsilon_2)$.

(3) 设 $B=B(x_0,\epsilon_0)$, 取 $\epsilon=\epsilon_0-\rho(x,x_0)$, 则 $x\in B(x,\epsilon)\subset B$.

在实变函数论课程中已经学到，实直线上的开集是由内点组成的集合 (点集合), 因此我们有

定义 1.8　若 A 是度量空间 X 的子集，$a\in A$ 叫 A 的在 X 中的 内点，如果 a 有一球形邻域 $\subset A$. A 的在 X 中的内点全体叫做 A 的在 X 中的 内部，记作 Int$A$. A 叫做 X 的开集 若 $A=$Int$A$.

命题 1.9　A 是开集 $\Longleftrightarrow$ A 是若干球形邻域并集. (复习题)

定理 1.10 设 $\mathcal{T}$ 是度量空间 X 的全体开集组成的族，则 $\mathcal{T}$ 满足

(O1) X 和空集 ϕ 属于 $\mathcal{T}$;

(O2) 若 $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$, 则 $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$;

(O3) 任意多个开集 (即 $\mathcal{T}$ 的成员) 的并集仍 $\in \mathcal{T}$.

证: (O1) 和 (O3) 是明显的. 现在证明 (O2). 若 $O_1 \cap O_2 = \phi$, 则由 (O1) 得出它是开集. 设 $O_1 \cap O_2 \neq \phi, x \in O_1 \cap O_2$ 为任一点，则由 O_1, O_2 为开集. 存在球形邻域 $B(x,\epsilon_1) \subset O_1, B(x,\epsilon_2) \subset O_2$, 因而 $x \in B(x,\epsilon_1) \cap B(x,\epsilon_2) \subset O_1 \cap O_2$, 由命题 1.7(2), 存在球形邻域 $B(x,\epsilon)$ 使 $x \in B(x,\epsilon) \subset O_1 \cap O_2$, 即 x 为内点.

定义 1.11 度量空间 X 的子集 A 叫 X 的 **闭集**, 如果 A 的余集 $X \backslash A$ 是 X 的开集.

定理 1.12 设 $\mathcal{F}$ 为度量空间 X 的全体闭集组成的族，则 $\mathcal{F}$ 满足

(F1) X 和空集 $\phi \in \mathcal{F}$;

(F2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, 则 $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$;

(F3) 任意多个闭集 (即 $\mathcal{F}$ 的成员) 的交集仍 $\in \mathcal{F}$.

证: 由于 de Morgan 公式 (§1 习题 1), 本定理和定理 1.10 可互相导出.

例 1.13 容易证明, 有限子集特别是独点集一定是闭集. 一维欧氏空间 R^1 中开区间 (a,b) 是无穷多个闭集的并. 试举例说明无穷多个开集的交集不必是开集.

在数学分析中，极限概念是连续性概念的基础，今推广到度量空间.

定义 1.14 设 A 是度量空间 X 的子集， $x \in X$, 若 x 的任一球形邻域 $B(x,\epsilon)$ 与 $A \backslash \{x\}$ 的交非空，称 x 为 A 的 (在 X 中) 的 **聚点**. A 和它的所有聚点的并集叫做 A(在 X 中) 的 **闭包**, 记作 $\overline{A}$. 如果 $\overline{A} = X$, 则 A 叫做 X 的 **稠密子集**.

例 1.15 设 $X = R^1$, 如果 $A = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$, 则点

$x=\frac{1}{n}\in A$, 但不是 A 的聚点, 点 $x=0\notin A$ 但它是 A 的聚点. $0,1$ 都是 $A=[0,1)$ 的聚点, 前者 $\in A$, 后者 $\notin A$.R^1 的有理点集是稠密子集.

命题 1.16 (1) X 的有限子集无聚点.

(2) X 的无穷子集 A 的每二点距离都大于一个固定正数, 则 A 无聚点.

(3) A 是闭集 $\iff A=\overline{A}$.

证: 我们只证明 (3), 把 (1) 和 (2) 留作习题. 设 A 为闭集, 则 $X\backslash A$ 为开集. 若 $x\in\overline{A}\backslash A$, 则 $x\in X\backslash A$, 有 x 的球形邻域 $B_x\subset X\backslash A$, 但是 $B_x\cap A\backslash\{x\}\neq\phi$ (这是因为 x 是 A 的聚点), 因此发生矛盾, 从而只能是 $\overline{A}\backslash A=\phi,\overline{A}=A$. 反之, 若 $A=\overline{A}$, 而对于 $x\in X\backslash A$, 如果 x 的任一球形邻域都不含于 $X\backslash A$ 则 $x\in\overline{A}\backslash A$ 与 $A=\overline{A}$ 矛盾, 故有 x 的球形邻域 $B_x\subset X\backslash A, X\backslash A$ 为开集, 从而 A 是闭集.

定理 1.17 度量空间的子集及其闭包具有下列性质:

(C1) $\overline{\phi}=\phi$;

(C2) $A\subset\overline{A}$;

(C3) $\overline{\overline{A}}\subset\overline{A}$;

(C4) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

证: (C1) 和 (C2) 由闭包的定义直接得出. 今证 (C3). 由定义, $x\in\overline{\overline{A}}\Longrightarrow x$ 的每一邻域 $U(x)$ 含有 $\overline{A}$ 的一点 y; $y\in\overline{A}\Longrightarrow y$ 的每一邻域 $W(y)$ 含有 A 的一点 z. 利用命题 1.7(3), 可取 $W(y)\subset U(x)$, 因此 x 的每一邻域 $U(x)$ 含有 A 的一点 z, 从而根据定义得出 $x\in\overline{A}$.

(C4) 的证明: 因为 $A\subset A\cup B$, 由定义 $\overline{A}\subset\overline{A\cup B}$, 同样的, $\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$, 因此 $\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$, 现在用反证法证明 $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$. 设 $x\in\overline{A\cup B}$ 而 $x\notin\overline{A}$ 且 $x\notin\overline{B}$. 由定义 1.14, x 有一邻域 $U(x)$ 不含 A 的点, 且 x 有一邻域 $V(x)$ 不含 B 的点, 根据命题 1.7(2), x 有一邻域 $W(x)\subset U(x)\cap V(x)$ 因而不含 $A\cup B$ 的点, 与 $x\in\overline{A\cup B}$ 矛盾.

定义 1.18 设 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 的点序列, $a \in X$. 如果对于 a 的每一球形邻域 $B(a,\epsilon)$, 存在自然数 N, 使对于所有 $n > N$ 有 $x_n \in B(a,\epsilon)$, 称点列 $\{x_n\}$ 收敛到点 a: $\{x_n\} \longrightarrow a$.

命题 1.19 a 是度量空间 X 中一个子集 A 的聚点 $\Longleftrightarrow$ $A\backslash\{a\}$ 中存在一个由完全不同的点组成的点列收敛到 a.

在本节结束前，我们指出二点间距离这一概念的推广：

(1) 度量空间 X 的二子集 A,B 间的距离

$$\rho(A,B)=\begin{cases} 0 & \text{当}A\text{或}B\text{空集} \\ \inf\{\rho(x,y) \mid x\in A, y\in B\} & \text{当}A,B\text{都非空} \end{cases}$$

(2)X 中一点 x 到子集 A 的距离为上述的特例.

(3)X 的子集 A 的直径

$$\mathrm{diam}(A)=\begin{cases} 0 & \text{当}A=\phi \\ \sup\{\rho(x,y) \mid x,y\in A\} & \text{当}A\neq\phi \end{cases}$$

当 $\mathrm{diam}(A) < \infty$, 称 A 为 有界集. 一般的, 从 $x \notin A$不能推出$\rho(x,A) > 0$; 从 $A\cap B=\phi$ 不能推出 $\rho(A,B) > 0$, 但是有

命题 1.20 若 $A \neq \phi, x \notin \overline{A}$, 则 $\rho(x,A) > 0$.(习题)

习 题

1. 设 X 为集合, $\{A_\alpha\}$ 为 X 的一族子集, 下标 α 所取值的个数可以有限或无限, 试证 de Morgan 公式

$$X\backslash \cup_\alpha A_\alpha = \cap_\alpha (X\backslash A_\alpha), \qquad X\backslash \cap_\alpha A_\alpha = \cup_\alpha (X\backslash A_\alpha)$$

2. 分别定义 $\rho_1,\rho_2: R^n \times R^n \to R$ 为

$$\rho_1(x,y)=\max_{1\le i\le n}\{\mid x_i-y_i\mid\}$$

$$\rho_2(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\mid x_i-y_i\mid$$

证明： ρ_1, ρ_2 都是集合 R^n 上的度量.

3. 设 (X,ρ) 为度量空间，分别定义 $\rho_1, \rho_2 \colon X \times X \to R$ 为

$$
\begin{aligned}
\rho_1(x,y) &= \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}, x,y \in X \\
\rho_2(x,y) &= \begin{cases} \rho(x,y) & \text{当}\rho(x,y) \le 1 \\ 1 & \text{当}\rho(x,y) > 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

证明： ρ_1, ρ_2, 是 X 上的度量.

4. 试证： Hilbert 空间 R^ω 的任二点 x, y 有一 "中点" z, 即点 z 使 $\rho(x,z) = \rho(y,z) = \frac{1}{2}\rho(x,y)$. 但度量空间不必有此性质，试用 R^2 的子空间举例说明.

5. 证明：例 1.4, 命题 1.9, 命题 1.20.

6. 设 $f \colon R^n \to R$ 为欧氏空间 R^n 上的连续函数，证明：满足 $f > 0 (f \ge 0)$ 的点集是 R^n 的开 (闭) 子集.

7. 试证： (a) $\mathrm{Int}A$ 是 A 所包含的所有开集的并集;

(b) $\overline{A}$ 是所有含 A 的闭集的交集.

8. 试确定下列平面点集的内部和闭包：

(a) $\{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 \le 2\}$;

(b) R^2 除去两条坐标轴.

9. 若 A 是度量空间 X 的稠密子集， O 为 X 中的开集. 证明： $O \subset \overline{A \cap O}$.

§2 拓扑空间

欧氏空间的点可用实数刻画，度量空间的点虽不必受此限制，但球形邻域这种连续性或极限概念的基础仍旧通过实数刻划. 现在抛弃距离的概念，直接用开集来表示 "邻域", 只保留定理 1.10 中开集性质 (O1)–(O3), 我们引进拓扑空间的概念.

定义 2.1 设 X 为集合， $\mathcal{T}$ 是 X 的一个子集族，其成员满足开集公理 (O1)–(O3), 则 $\mathcal{T}$ 称为集 X 上的一个 **拓扑**, $\mathcal{T}$ 的成员称为 X 的 **开集**. 集 X 连同它的拓扑 $\mathcal{T}$ 称为 **拓扑空**

间，记作 $(X,\mathcal{T})$, 在明确所赋予的拓扑 $\mathcal{T}$ 时， $(X,\mathcal{T})$ 可简记为 X.

例 2.2　度量空间 (X,ρ) 的度量 ρ 可以确定出全体开集，由定理 1.10, 全体开集所成的族 $\mathcal{T}$ 满足 (O1)-(O3), 因此度量空间 (X,ρ) 是一个拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$, 而这里的 $\mathcal{T}$ 称为度量 ρ 所导出的拓扑. 反之，若拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 存在 X 上的度量 ρ 使 $\mathcal{T}$ 是由 ρ 诱导的拓扑，称 $(X,\mathcal{T})$ 是 能度量化 拓扑空间.

例 2.3　任非空集合 X, 有两个最极端的拓扑，第一 $\mathcal{T}$ 由 X 和空集这两个子集组成，开集个数最少，叫 平凡拓扑. 第二 $\mathcal{T}'=2^X$(表示 X 的全体子集组成的族) 叫 离散拓扑. 离散拓扑是例 1.5 中离散度量所诱导的拓扑.

例 2.4　设 $X=\{a,b,c\}$ 令

$$\mathcal{T}=\{\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$$

不难验证， $\mathcal{T}$ 是 X 上拓扑. 因此， $(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间.

例 2.5　设 X 为不可数集，令

$$\mathcal{T}=\{X\backslash C\mid C\text{是}X\text{的可数子集}\}\cup\{\phi\}$$

则 $(X,\mathcal{T})$ 也是一个拓扑空间.

度量空间的球形邻域族 $\mathcal{B}$ 是它的开集族 $\mathcal{T}$ 的子族，且它的开集是 $\mathcal{B}$ 的若干个成员的并集 (命题 1.9), 这与向量空间的每一向量可由其基向量线性表示有某种相似之处. 因此，我们把 $\mathcal{B}$ 看作 $\mathcal{T}$ 的基. 参照命题 1.7(1),(2) 作如下定义.

定义 2.6　称集合 X 的子集族 $\mathcal{B}=\{\mathcal{B}_\alpha\}$ 为 X 的 拓扑基, 若

(1) $X=\cup_\alpha B_\alpha$;

(2) 若 $x\in B_\alpha\cap B_\beta$, 则存在 $B_\gamma\in\mathcal{B}$ 使 $x\in B_\gamma\subset B_\alpha\cap B_\beta$.

现在，象度量空间中由球形邻域形成开集 (命题 1.9) 一样，我们从 X 的拓扑基 $\mathcal{B}$ 出发，构造 X 的一个拓扑.