

全国硕士研究生入学考试

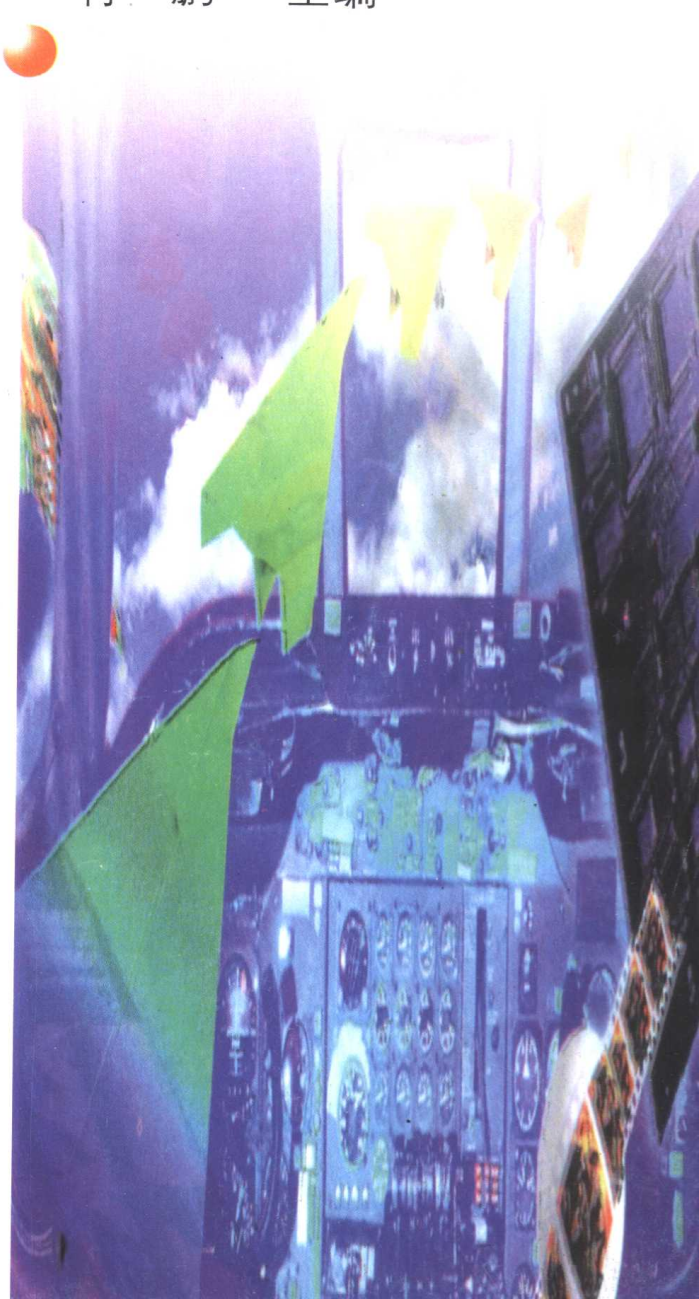


历届试题与答案汇编

(理工数学)

谭 军 付 鹏 主编

国防大学出版社





国防大学 2 070 0251 7

1990~1999 年
历届硕士研究生入学考试
试题及参考答案汇编

(理工数学)

谭军 付鹏 主编

国防大学出版社
— 北京 —

责任编辑：彭呈仓

封面设计：黄铁峰

图书在版编目(CIP)数据

历届硕士研究生入学考试试题汇编/谭军,付鹏主编, - 北京:国防大学出版社,1999.2

ISBN 7-5626-0919-5

I. 历届… II. 谭… III. 付… IV. 研究生-入学考试-试题-学习参考资料 V. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 04245 号

历届硕士研究生入学考试
试题及参考答案汇编
谭军 付鹏 主编

出 版：国防大学出版社(北京海淀区红山口甲3号
邮码:100091)

经 销：新华书店

印 刷：河北省保定市第二印刷厂

开 本：787×1092 毫米 1/16

印 张：40

字 数：800 千字

版 次：1999 年 4 月第 1 版

印 次：1999 年 4 月第 1 次印刷

印 数：001—3000

书 号：ISBN7-5626-0919-5/G·30

定 价：全套(五册)共 60.00 元

前 言

英语、政治、数学为全国硕士研究生入学考试统一命题的必考公共课,也是考生最感棘手、最难复习的部分。纵观历年情况,许多考生专业科目得分一般较满意,却往往因为英语、政治、数学等公共科目成绩不佳而功亏一篑,痛失成功机会。为此,我们郑重建议考生认真加强公共科目复习,千万不可掉以轻心。

在复习过程中,许多考生反映难以收齐一套完整的历届考研试题,以便反复演习、揣摩。为此,我们特将1990~1999年(共10年)硕士研究生入学考试数学(一)、(二)试题及答案汇编成册,为考生提供一套完整的参考资料。纵观历年试题,虽然题型有所变化,但考生不难看出,每年考查的要点却十分相似,而且后几届往往有不少与前几届相似甚至雷同的题目出现,真可谓万变不离其宗。因此,我们要求考生将这些试题反复揣摩,解剖分析其要点,掌握这些重点、难点,了解历年考研命题的范围、题型、题量、难易程度与命题趋势,掌握解题规律与技巧,从而找到一条考研成功的捷径,临考时便可以不变应万变,无论题目怎样变化均可从容应答,游刃有余。

需要说明的是,数学(一)、(二)考试内容及考试要求有较多相同之处,故选考理工数学的考生最好将数学(一)、(二)的试题全部做完,以达到最佳效果。

实践证明,本书不仅是考生首选的复习资料,而且是考研辅导班的必备教材,一册在手,事半功倍。

预祝考研成功!

编 者

目 录

数学(一)、(二)适用专业、试卷结构及考试内容	1
-------------------------	---

历届硕士研究生入学考试数学(一)、(二)试题汇编

1990 年硕士研究生入学考试数学(一)试题	2
1990 年硕士研究生入学考试数学(二)试题	5
1991 年硕士研究生入学考试数学(一)试题	7
1991 年硕士研究生入学考试数学(二)试题	10
1992 年硕士研究生入学考试数学(一)试题	12
1992 年硕士研究生入学考试数学(二)试题	15
1993 年硕士研究生入学考试数学(一)试题	17
1993 年硕士研究生入学考试数学(二)试题	20
1994 年硕士研究生入学考试数学(一)试题	22
1994 年硕士研究生入学考试数学(二)试题	25
1995 年硕士研究生入学考试数学(一)试题	27
1995 年硕士研究生入学考试数学(二)试题	30
1996 年硕士研究生入学考试数学(一)试题	32
1996 年硕士研究生入学考试数学(二)试题	35
1997 年硕士研究生入学考试数学(一)试题	37
1997 年硕士研究生入学考试数学(二)试题	40
1998 年硕士研究生入学考试数学(一)试题	42
1998 年硕士研究生入学考试数学(二)试题	45
1999 年硕士研究生入学考试数学(一)试题	47
1999 年硕士研究生入学考试数学(二)试题	50

参 考 答 案 汇 编

1990 年硕士研究生入学考试数学(一)试题参考答案	52
1990 年硕士研究生入学考试数学(二)试题参考答案	55
1991 年硕士研究生入学考试数学(一)试题参考答案	57
1991 年硕士研究生入学考试数学(二)试题参考答案	61
1992 年硕士研究生入学考试数学(一)试题参考答案	63
1992 年硕士研究生入学考试数学(二)试题参考答案	67
1993 年硕士研究生入学考试数学(一)试题参考答案	69

1993 年硕士研究生入学考试数学(二)试题参考答案	73
1994 年硕士研究生入学考试数学(一)试题参考答案	76
1994 年硕士研究生入学考试数学(二)试题参考答案	80
1995 年硕士研究生入学考试数学(一)试题参考答案	83
1995 年硕士研究生入学考试数学(二)试题参考答案	87
1996 年硕士研究生入学考试数学(一)试题参考答案	89
1996 年硕士研究生入学考试数学(二)试题参考答案	93
1997 年硕士研究生入学考试数学(一)试题参考答案	97
1997 年硕士研究生入学考试数学(二)试题参考答案	101
1998 年硕士研究生入学考试数学(一)试题参考答案及评分标准	105
1998 年硕士研究生入学考试数学(二)试题参考答案及评分标准	110
1999 年硕士研究生入学考试数学(一)试题参考答案及评分标准	114
1999 年硕士研究生入学考试数学(二)试题参考答案及评分标准	119

数学(一)、(二) 适用专业、试卷结构及考试内容

一、数学(一)

(一) 适用专业

1. 工学门类的力学、机械工程、光学工程、仪器科学与技术、冶金工程、动力工程及工程热物理、电气工程、电子科学与技术、信息与通信工程、控制科学与工程、计算机科学与技术、土木工程、水利工程、测绘科学与技术、交通运输工程、船舶与海洋工程、航空宇航科学与技术、兵器科学与技术、核科学与技术、生物医学工程等一级学科中所有的二级学科、专业。

2. 工学门类的材料科学与工程、化学工程与技术、地质资源与地质工程、矿业工程、石油与天然气工程、环境科学与工程等一级学科中对数学要求较高的二级学科、专业。

3. 管理学门类中的管理科学与工程一级学科。

(二) 试卷结构

1. 内容比例

(1) 高等数学约 60% ; (2) 线性代数约 20% ; (3) 概率论与数理统计初步约 20%

2. 题型比例

(1) 填空题与选择题约 30% ; (2) 解答题(包括证明题)约 70%

3. 考试时间 3 小时

(三) 考试内容

1. 高等数学 (1) 函数、极限、连续; (2) 一元函数微分学; (3) 一元函数积分学; (4) 向量代数和空间解析几何; (5) 多元函数微分学; (6) 多元函数积分学; (7) 无穷级数; (8) 常微分方程。

2. 线性代数 (1) 行列式; (2) 矩阵; (3) 向量; (4) 线性方程组; (5) 矩阵的特征值和特征向量; (6) 二次型。

3. 概率论与数理统计初步 (1) 随机事件和概率; (2) 随机变量及其概率分布; (3) 二维随机变量及其概率分布; (4) 随机变量的数字特征; (5) 大数定律和中心极限定理; (6) 数理统计的基本概念; (7) 参数估计; (8) 假设检验。

二、数学(二)

(一) 适用专业

1. 工学门类的纺织科学与工程、轻工技术与工程、农业工程、林业工程、食品科学与工程等一级学科中所有的二级学科、专业。

2. 工学门类的材料科学与工程、化学工程与技术、地质资源与地质工程、矿业工程、石油与天然气工程、环境科学与工程等一级学科中对数学要求较低的二级学科、专业。

(二) 试卷结构

1. 内容比例

(1) 高等数学约 85% ; (2) 线性代数初步约 15%

2. 题型比例

(1) 填空题与选择题约 30% ; (2) 解答题(包括证明题)约 70%

3. 考试时间 3 小时

(三) 考试内容

1. 高等数学 (1) 函数、极限、连续; (2) 一元函数微分学; (3) 一元函数积分学; (4) 常微分方程。

2. 线性代数初步 (1) 行列式; (2) 矩阵; (3) 线性方程组。

历届硕士研究生入学考试数学(一)、(二) 试题汇编

1990 年硕士研究生入学考试数学(一) 试题

一. 填空题, (每小题 3 分, 只要求直接填写结果)

(1) 过点 $M(1, 2, -1)$ 且与直线 $\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 3t - 4 \\ z = t - 1 \end{cases}$ 垂直的平面方程是_____.

(2) 设 a 为非零常数, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x =$ _____.

(3) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$, 则 $f[f(x)] =$ _____.

(4) 积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$ 的值等于_____.

(5) 已知向量组 $a_1 = (1, 2, 3, 4), a_2 = (2, 3, 4, 5), a_3 = (3, 4, 5, 6), a_4 = (4, 5, 6, 7)$, 则该向量组的秩是_____.

二. 单项选择题(每一小题选对得 3 分, 不选或选错一律得 0 分)

(1) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $F(x) = \int_x^{e^{-x}} f(t) dt$, 则 $F'(x)$ 等于 【 】

(A) $-e^{-x}f(e^{-x}) - f(x)$

(B) $-e^{-x}f(e^{-x}) + f(x)$

(C) $e^{-x}f(e^{-x}) - f(x)$

(D) $e^{-x}f(e^{-x}) + f(x)$

(2) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数, 且 $f'(x) = [f(x)]^2$, 则当 n 为大于 2 的正整数时, $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是 【 】

(A) $n! [f(x)]^{n+1}$.

(B) $n [f(x)]^{n+1}$.

(C) $[f(x)]^{2n}$.

(D) $n! [f(x)]^{2n}$.

(3) 设 a 为常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(na)}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ 【 】

(A) 绝对收敛.

(B) 条件收敛.

(C) 发散.

(D) 收敛性与 a 的取值有关.

(4) 已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内连续, 且 $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$, 则在点 $x = 0$ 处 $f(x)$ 【 】

(A) 不可导.

(B) 可导, 且 $f'(0) \neq 0$.

(C) 取得极大值.

(D) 取得极小值.

(5) 已知 β_1, β_2 是非齐次线性方程组 $AX = b$ 的两个不同的解, a_1, a_2 是对应齐次线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系, k_1, k_2 为任意常数, 则方程组 $AX = b$ 的通解(一般解) 必是 【 】

(A) $k_1 a_1 + k_2 (a_1 + a_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$.

(B) $k_1 a_1 + k_2 (a_1 - a_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$.

(C) $k_1 a_1 + k_2 (\beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$.

(D) $k_1 a_1 + k_2 (\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$.

三. (本题满分 15 分, 每小题 5 分)

(1) 求 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx$

(2) 设 $Z = f(2x - y, y \sin x)$, 其中 $f(u, v)$ 具有连续的二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$

(3) 求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$ 的通解(一般解).

四.(本题满分6分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$ 的收敛域, 并求其和函数.

五.(本题满分8分)

求曲面积分 $I = \iint_S yz dx dz + 2 dx dy$, 其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 外侧在 $z \geq 0$ 的部分.

六.(本题满分6分)

设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$. 证明在 (a, b) 内至少存在一点 ζ , 使得 $f'(\zeta) > 0$.

七.(本题满分7分)

设四阶矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

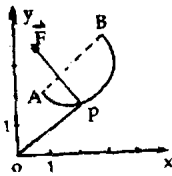
且矩阵 A 满足关系式 $A(E - C^{-1}B)'C' = E$, 其中 E 为四阶单位矩阵, C^{-1} 表示 C 的逆矩阵, C' 表示 C 的转置矩阵, 将上述关系式化简并求矩阵 A .

八.(本题满分8分)

求一个正交变换化二次型 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 成标准形.

九.(本题满分8分)

质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周, 从点 $A(1, 2)$ 运动到点 $B(3, 4)$ 的过程中受变力 $\vec{F}$ 作用(见图), $\vec{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离, 其方向垂直于线段 OP 且与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$. 求



变力 $\vec{F}$ 对质点 P 所作的功.

概率论或复变函数由考生自选一门应试

注意: 下面概率论或复变函数由考生自选一门应试, 每门有2个大题, 题号同为第十和第十一, 两门都做, 只按概率论一门的成绩计分.

概 率 论

十. 填空题(本题满分6分, 每小题2分, 只要求直接填写结果)

(1) 已知随机变量 X 的概率密度函数 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < +\infty$, 则 X 的概率分布函数 $F(x) =$ _____.

(2) 设随机事件 A, B 及其和事件 $A \cup B$ 的概率分别是 $0.4, 0.3$ 和 0.6 . 若 $\bar{B}$ 表示 B 的对立事件, 那么积事件 $A\bar{B}$ 的概率 $P(A\bar{B}) =$ _____.

(3) 已知离散型随机变量 X 服从参数为 2 的泊松(Poisson)分布, 即 $P\{X = k\} = \frac{2^k e^{-2}}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, 则随机变量 $Z = 3X - 2$ 的数学期望 $E(Z) =$ _____.

十一. (本题满分 6 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D: 0 < x < 1, |y| < x$ 内服从均匀分布, 求关于 X 的边缘概率密度函数及随机变量 $Z = 2X + 1$ 的方差 $D(Z)$.

复 变 函 数

十. 填空题(本题满分 6 分, 每小题 2 分, 只要求直接填写结果)

(1) 设 $i^i = e^z$ 则 $\operatorname{Re}(Z) =$ _____.

注: 不写“ k 为整数”者不扣分.

(2) 设 C 是正向圆周 $|Z| = 2$, 则积分 $\oint_C \frac{\sin Z}{(1-Z)^2} dZ =$ _____.

(3) 设函数 $f(z)$ 在 Z 平面上解析, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, 则对任一正整数 k , 函数 $\frac{f(z)}{z^k}$ 在点 $Z = 0$ 的留数 $\operatorname{Res}\left\{\frac{f(z)}{z^k}, 0\right\} =$ _____.

十一. (本题满分 6 分)

设分式线性映射 $W = f(z)$ 把点 $Z_1 = -1, Z_2 = 0, Z_3 = 1$ 依次映射成点 $W_1 = 1, W_2 = i, w_3 = -1$, 求这映射 $W = f(Z)$; 并问这映射将单位圆 $|Z| < 1$ 映射成什么区域?

1990 年硕士研究生入学考试数学(二) 试题

考生注意:本试卷包含 8 个大题,均为必做题,满分 100 分.

一. 填空题(每小题 3 分,只要求直接填写结果)

- (1) 曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 上对应于 $t = \frac{\pi}{6}$ 点处的法线方程是_____.
- (2) 设 $y = e^{\frac{1}{x}} \cdot \sin \frac{1}{x}$, 则 $y' =$ _____.
- (3) $\int_0^1 \sqrt{1-x} dx =$ _____.
- (4) 下列两个积分大小的关系: $\int_{-2}^{-1} e^{-x^3} dx$ _____ $\int_{-2}^{-1} e^{x^3} dx$.
- (5) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则函数 $f[f(x)] =$ _____.

二. 单项选择题(每一小题选对得 3 分,不选或选错一律得 0 分)

- (1) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - ax - b \right) = 0$, 其中 a, b 是常数, 则 【 】
 (A) $a = 1, b = 1$ (B) $a = -1, b = 1$
 (C) $a = 1, b = -1$. (D) $a = -1, b = -1$.
- (2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $d\left[\int f(x) dx\right]$ 等于 【 】
 (A) $f(x)$ (B) $f(x) dx$.
 (C) $f(x) + c$ (D) $f'(x) dx$.
- (3) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数, 且 $f'(x) = [f(x)]^2$, 则当 n 为大于 2 的正整数时, $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是 【 】
 (A) $n! [f(x)]^{n+1}$ (B) $n [f(x)]^{n+1}$
 (C) $[f(x)]^{2n}$ (D) $n! [f(x)]^{2n}$
- (4) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $F(x) = \int_x^{e^{-x}} f(t) dt$, 则 $F'(x)$ 等于 【 】
 (A) $-e^{-x} f(e^{-x}) - f(x)$. (B) $-e^{-x} f(e^{-x}) + f(x)$.
 (C) $e^{-x} f(e^{-x}) - f(x)$. (D) $e^{-x} f(e^{-x}) + f(x)$.
- (5) 设 $F(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ f(0), & x = 0, \end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, $f'(0) \neq 0, f(0) = 0$, 则 $x = 0$ 是 $F(x)$ 的 【 】
 (A) 连续点 (B) 第一类间断点
 (C) 第二类间断点 (D) 连续点或间断点不能由此确定

三. (本题满分 25 分, 每小题 5 分)

- (1) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = S$, 求常数 a .
- (2) 求由方程 $2y - x = (x-y)\ln(x-y)$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的微分 dy .

(3) 求曲线 $y = \frac{1}{1+x^2} (x > 0)$ 的拐点.

(4) 计算 $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx$.

(5) 求微分方程 $x \ln x dy + (y - \ln x) dx = 0$ 满足条件 $Y|_{x=e} = 1$ 的特解.

四. (本题满分 9 分)

在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的第一象限部分上求一点 P , 使该点处的切线、椭圆及两坐标轴所围图形的面积为最小 (其中 $a > 0, b > 0$).

五. (本题满分 9 分)

证明: 当时 $x > 0$ 时, 有不等式 $\arctg x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}$.

六. (本题满分 9 分)

设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$, 其中 $x > 0$, 求 $f(x) + f(\frac{1}{x})$.

七. (本题满分 9 分)

过点 $P(1, 0)$ 作抛物线 $Y = \sqrt{x-2}$ 的切线, 该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形, 求此平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

八. (本题满分 9 分)

求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = e^{ax}$ 之通解, 其中 a 为实数.

1991 年硕士研究生入学考试数学(一) 试题

考生注意:本试卷共 11 个大题,满分 100 分.高等数学、线性代数有 9 个大题,均为必做题,题号同为第一至第九.概率论或复变函数由考生自选一门应试,每门有 2 个大题,题号同为第十和第十一.若两门都做,只按概率论一门的成绩计分.

一. 填空题(每小题 3 分,只要求直接填写结果)

(1) 设 $\begin{cases} x = 1 + t^2, \\ y = \cos t, \end{cases}$ 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____.

(2) 由方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 在点 $(1, 0, -1)$ 处的全微分 $dz =$ _____.

(3) 已知两条直线的方程是 $l_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$, $l_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$, 则过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程是 _____.

(4) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 + ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小, 则常数 $a =$ _____.

(5) 设 4 阶方阵 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 A 的逆阵 $A^{-1} =$ _____.

二. 单项选择题(每一小题选对得 3 分,不选或选错一律 0 分)

(1) 曲线 $y = \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$ _____ 【 】

(A) 没有渐近线.

(B) 仅有水平渐近线.

(C) 仅有铅直渐近线.

(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

(2) 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt + \ln 2$, 则 $f(x)$ 等于 _____ 【 】

(A) $e^x \ln 2$.

(B) $e^{2x} \ln 2$.

(C) $e^x + \ln 2$.

(D) $e^{2x} + \ln 2$.

(3) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 等于 _____ 【 】

(A) 3.

(B) 7.

(C) 8.

(D) 9.

(4) 设 D 是 xy 平面上以 $(1, 1)$ 和 $(-1, 1), (-1, -1)$ 为顶点的三角形区域, D_1 是 D 在第一象限的部分, 则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy$ 等于 _____ 【 】

(A) $2 \iint_D \cos x \sin y dx dy$

(B) $2 \iint_D xy dx dy$

(C) $4 \iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy$

(D) 0

(5) 设 n 阶方阵 A, B, C 满足关系 $\iint_D ABC = E$, 其中 E 是 n 阶单位阵, 则必有 _____ 【 】

(A) $ACB = E$

(B) $CBA = E$

(C) $BAC = E$

(D) $BCA = E$

三. (本题满分 15 分,每小题 5 分)

(1) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$

(2) 设 $\vec{n}$ 是曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处的指向外侧的法向量, 求函数 $u = \frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数.

(3) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z) dv$, 其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 Z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $Z = 4$ 所围成的立体.

四. (本题满分 6 分)

在过点 $O(0, 0)$ 和 $A(\pi, 0)$ 的曲线族 $y = a \sin x (a > 0)$ 中, 求一条曲线 L , 使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int_L (1 + y^3) dx + (2x + y) dy$ 的值最小.

五. (本题满分 8 分)

将函数 $f(x) = 2 + |x| (-1 \leq x \leq 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数, 并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和.

六. 本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $(0, 1)$ 内可导, 且 $3 \int_{\frac{1}{3}}^1 f(x) dx = f(0)$, 证明在 $(0, 1)$ 内存在一点 C , 使 $f'(C) = 0$.

七. (本题满分 8 分)

已知 $\alpha_1 = (1, 0, 2, 3)$, $\alpha_2 = (1, 1, 3, 5)$, $\alpha_3 = (1, -1, a+2, 1)$, $\alpha_4 = (1, 2, 4, a+8)$ 及 $\beta = (1, 1, b+3, 5)$.

(1) a, b 为何值时, β 不能表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合?

(2) a, b 为何值时, β 有 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的唯一的线性表示式? 并写出该表示式.

八. (本题满分 6 分)

设 A 是 n 阶正定阵, E 是 n 阶单位阵, 证明 $A + E$ 的行列式大于 1.

九. (本题满分 8 分)

在上半平面求一条向上凹的曲线, 其上任一点 $P(x, y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数 (Q 是法线与 x 轴的交点), 且曲线在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴平行.

概率论或复变函数由考生自选一门应试

注意: 概率论或复变函数每门有 2 个大题, 题号同为第十和第十一. 若考生两门都做, 只按概率论一门的成绩计分.

概 率 论

十. 填空题(每小题 3 分, 只要求直接填写结果)

(1) 若随机变量 X 服从均值为 2, 方差为 σ^2 的正态分布, 且 $P\{2 < X < 4\} = 0.3$, 则 $P\{X < 0\} =$ _____.

(2) 随机地向半圆 $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$ (a 为正常数) 内掷一点, 点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比, 则原点和该点的连线与 X 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为 _____.

十一. (本题满分 6 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

求随机变量 $Z = X + 2Y$ 的分布函数.

复 变 函 数

十. 填空题(每小题 3 分, 只要求直接填写结果)

(1) 函数 $f(z) = \frac{1}{z(i-z)}$ 在区域 $0 < |z - i| < 1$ 内的罗朗级数为 _____.

(2) 函数 $W = i \frac{z+2}{z-2}$ 将区域 $|z| > 2$ 映射成(区域) _____.

十一. (本题满分 6 分)

利用留数计算积分 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx$.

1991 年硕士研究生入学考试数学(二) 试题

一. 填空题(每小题 3 分, 只要求直接填写结果)

(1) 设 $y = \ln(1 + 3^{-x})$, 则 $dy =$ _____.

(2) 曲线 $y = e^{-x^2}$ 的向上凸区间是 _____.

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx =$ _____.

(4) 质点以速度 $t \sin(t^2)$ 米/秒作直线运动, 则从时刻 $t_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 秒到 $t_2 = \sqrt{\pi}$ 秒内质点所经过的路程等于 _____ 米.

(5) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{x + e^{\frac{1}{x}}} =$ _____.

二. 单项选择题(每一小题选对得 3 分, 不选或选错一律得 0 分)

(1) 若曲线 $y = x^2 + ax + b$ 和 $2y = -1 + xy^3$ 在点 $(1, -1)$ 处相切, 其中 a, b 是常数, 则 []

(A) $a = 0, b = -2$

(B) $a = 1, b = -3$

(C) $a = -3, b = 1$

(D) $a = -1, b = -1$

(2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$ 记 $F(x) = \int_0^x f(t) dt, 0 \leq x \leq 2$, 则 []

(A) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

(B) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ -\frac{7}{6} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

(C) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

(D) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $x_0 \neq 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大点, 则 []

(A) x_0 必是 $f(x)$ 的驻点.

(B) $-x_0$ 必是 $-f(-x)$ 的极小点.

(C) $-x_0$ 必是 $-f(x)$ 的极小点.

(D) 对一切 x 都有 $f(x) \leq f(x_0)$.

(4) 曲线 $y = \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$ []

(A) 没有渐近线

(B) 仅有水平渐近线.

(C) 仅有铅直渐近线.

(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

(5) X 轴上有一线密度为常数 μ , 长度为 1 的细杆, 有一质量为 m 的质点到杆右端的距离为 a , 已知引力系数为 K , 则质点和细杆之间引力的大小为 []

(A) $\int_{-1}^0 \frac{K\mu dx}{(a-x)^2}$

(B) $\int_0^1 \frac{K\mu dx}{(a-x)^2}$

(C) $2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{K\mu dx}{(a+x)^2}$

(D) $2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{K\mu dx}{(a+x)^2}$

三. (本题满分 25 分, 每小题 5 分)

(1) 设 $\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t, \end{cases}$ 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

(2) 计算 $\int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$.

(3) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2(e^x - 1)}$.

(4) 求 $\int x \sin^2 x dx$.

(5) 求微分方程 $xy' + y = xe^x$ 满足 $y(1) = 1$ 的特解.

四. (本题满分 9 分)

利用导数证明: 当 $x > 1$ 时, 有不等式.

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln x} > \frac{x}{1+x}.$$

五. (本题满分 9 分)

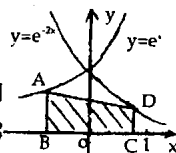
求微分方程 $y'' + y = x + \cos x$ 的通解.

六. (本题满分 9 分)

曲线 $y = (x-1)(x-2)$ 和 x 轴围成一平面图形, 求此平面图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

七. (本题满分 9 分)

如图, A 和 D 分别是曲线 $y = e^x$ 和 $y = e^{-2x}$ 上的点, AB 和 DC 均垂直 x 轴, 且 $|AB| : |DC| = 2:1$, $|AB| < 1$, 求点 B 和 C 的横坐标, 使梯形 $ABCD$ 的面积最大.



八. (本题满分 9 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足 $f(x) = f(x-\pi) + \sin x$, 且 $f(x) = x, x \in [0, \pi)$:

计算 $\int_{\pi}^{3\pi} f(x) dx$.