微积分学习指导

韩云瑞 等编

历史溯源

内容综述

释疑解惑

例题分析

分组练习

模拟试题

清华大学出版社

http://www.tup.tsinghua.edu.cn

微积分学习指导

编者(按字典序排列):

韩云瑞　刘庆华　王燕来　吴洁华

清华大学出版社

(京)新登字158号

内 容 提 要

本书是清华大学微积分讨论课参考书.以篇为单位编写,每篇内容大致分为如下五个部分:历史回顾,简单回顾了有关概念和原理的产生和发展史;内容与方法,对本篇的主要内容、方法和意义进行总结,以使读者从整体上把握所学的知识;释疑解惑,对教与学中常见的疑问给予解答;典型例题分析,通过适量的典型题目的分析和解答,帮助读者理解基本概念和基本运算,掌握解题方法;练习题,按习题的难易程度,给出了三类习题供读者选用.书后附有三套微积分模拟试题(每套四份)和《微积分教程》(韩云瑞,扈志明主编,清华大学出版社出版)的习题答案.

本书可作为理工科大学生学习微积分课程的辅助教材,也可作为参加硕士研究生入学考试的复习资料.

书　名:微积分学习指导
作　者:韩云瑞　刘庆华　王燕来　吴洁华　编
出版者:清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者:北京昌平环球印刷厂
发行者:新华书店总店北京发行所
开　本:850×1168　1/32　印张:13.125　字数:327千字
版　次:2000年9月第1版　2000年9月第1次印刷
书　号:ISBN 7-302-04045-1/O・249
印　数:0001~5000
定　价:18.00元

致 读 者

本书是清华大学微积分讨论课参考书，同时也是指导读者学习微积分的学习辅助教材．编写本书的目的是对正在学习微积分和复习微积分准备参加各种考试的读者提供学习指导，帮助读者克服在学习过程中遇到的各种困难，更加有效地掌握微积分的思想与方法．

本书不同于现有的微积分习题集和辅导书．首先，本书不是通过大量的习题孤立、分散地介绍微积分中的各种解题技巧，而是通过对微积分的发展历史的回顾，对微积分每一部分的内容和方法的概括综合，使读者对于微积分内容和思想方法有总体上的把握和理解．然后通过典型例题分析、基本练习和一定数量的习题，使读者理解、掌握基本概念与基本运算，学会基本的解题方法，帮助读者奠定扎实的基础．因此本书能够紧密配合教学要求，成为微积分课堂教学的一个有力补充，对于微积分教学起到真正的辅助作用．

本书适用于微积分（高等数学）课程的辅导课、习题课教材．对于参加理工科硕士研究生入学考试也是一本富有特色的复习资料．本书的内容及安排相对独立，不依赖于任何一本微积分（高等数学）教材．这就为各方面的读者提供了方便．另外，本书也为从事微积分教学的教师提供了一份有价值的参考资料．

本书以篇为单元编写，每一篇的内容一般分成以下几个板块：

（1）**历史回顾**．了解微积分的创造发展历史，是学习、理解微积分思想与方法的重要途径．这部分向读者简单回顾了有关概念

和原理的创造和发展历史，使读者走近一个个伟大的微积分先驱，从他们的创造发现过程中得到启示.

(2) **内容与方法**. 编者力求在读者能够理解的程度上，用更宽的视野，对于本篇的主要内容、方法和意义进行总结. 使读者对所学知识获得一个整体上的、更加有条理的认识.

(3) **释疑解惑**. 编者们根据自己的教学经验，列举了读者中若干常见的、具有共性的疑问，给予解答. 目的是为读者释疑解难，澄清误解，更加准确地理解基本概念与基本运算法则. 同时也为教师减轻重复回答问题的繁重劳动.

(4) **典型例题分析**. 通过适量的典型例题帮助读者理解基本概念和基本运算，学会基本的解题方法. 典型例题数量适当，难度适中又有层次，基本上涵盖了学生应当掌握的主要内容，体现了微积分的教学要求.

(5) **练习题**. 按照题目难易程度分为 A，B 和 C 三类题目. 其中 A 类题目是关于概念和基本运算的基本练习，可供读者自己练习或教师课堂提问. B 类题目可以作为课堂练习或课外作业. C 类题目综合性较强，有一定难度，主要目的是为那些数学基础较好，或者有兴趣的读者作为问题练习或研究. 部分题目有探讨余地，可以培养读者更好地掌握微积分中的一些重要思想与方法，培养综合运用知识的能力和创新能力.

本书有两个附录. 附录 1 为三套微积分模拟试题(每套包括四份试卷)，每份试卷都是由清华大学近几年的微积分试题加以修改补充而成的，基本上保持了原试题的模式和难度，较好地反映了清华大学微积分课程的教学要求. 附录 2 是《微积分教程》(韩云瑞、扈志明主编，清华大学出版社出版)的习题答案.《微积分教程》一书没有附习题答案，并不是编者的疏忽. 编者认为，不附答案与提示，可以更好地锻炼读者独立思考和一丝不苟的习惯.《微积分教

程》的各章的补充题有一定难度,需要提示和解答的读者(特别是教师)可以通过因特网向编者索取. 编者的 E-mail 地址是:yhan@math.tsinghua.edu.cn.

本书由韩云瑞策划、组稿并主编;王燕来参与了第 2 篇和第 6 篇的编写;吴洁华参与了第 3 篇和第 5 篇的编写;刘庆华参与了第 4 篇和第 7 篇的编写. 吴洁华和刘庆华还编写了微积分模拟试题,并作解答.

编者将虚心听取读者与同行的各种批评意见,在新的基础上对本书进行认真的改进与丰富,以使它成为学习微积分的读者的有价值的学习参考书.

编　者

2000 年 6 月于清华大学

目　录

第1篇　极限与连续

1.1　历 史 回 顾

建立在实数理论基础上的极限论是近代微积分的理论基础．近代微积分指微积分在 18 至 19 世纪的发展．这一时期微积分的特点是严密化体系的建立．代表人物有捷克数学家波尔察诺(Bolzano，1781—1848)，法国数学家柯西(Cauchy ，1789—1857)和德国数学家魏尔斯特拉斯(Weierstrass，1815—1879)等．

17 到 18 世纪，由于微积分解决问题的特殊能力，使得微积分先驱们把主要精力致力于微积分的应用．他们创造了许多有力的方法，并建立了不少以微积分方法为主的分支科学．但是微积分中的许多概念则缺少统一的、准确的定义．在那个时期，对于函数的研究总是和几何以及运动联系在一起，因此很多结论都是由几何直观以及对于运动的理解而得到的，缺少严格的证明，所以 18 世纪之前的微积分存在相当多的含混不清之处．进入 19 世纪以后，微积分本身的矛盾迭起，数学家们才不得不对微积分的基本概念与理论方法进行认真分析，通过实数的准确定义及 ε-δ 方法为微积分奠定了严实的基础，这正是 18～19 世纪许多著名数学家致力于微积分严格化的历史背景．

波尔察诺将严格的论证引入微积分之中，是数学严格化的先驱之一．柯西在微积分中引进了严格的表述与证明，使微积分摆脱了单纯对几何直观理解和物理解释的依赖，从而形成了微积分的近代体系．从古希腊一直到柯西之前，极限的思想与方法绵延不断地出现在许多数学家的创造活动之中．例如中国古代数学家刘

徽在用割圆术计算圆周率时，从圆的内接正六边形算起，依次将边数加倍，一直算到内接正 192 边形. 刘徽割圆的思想与方法，包含了朴素的极限概念. 又如 17 世纪的英国数学家沃利斯(1616—1703)已经很清楚地叙述极限概念，他说："变量的极限——这是变量能如此逼近的一个常数，它们之间的差能够小于任何给定的量."但是，直至 18 世纪 30 年代，柯西才以正确的方法建立了极限理论. 现今微积分教科书中表述极限概念的 ε-δ 方法，就是由柯西创建，后经魏尔斯特拉斯加工而成的. 柯西和魏尔斯特拉斯用不等式表述极限定义，从而能够从极限的定义出发证明微积分学中的许多命题，同时也能够借助于极限去界定微积分的许多重要概念. 例如，函数的连续性，函数的导数，积分以及级数的求和等概念都是用极限定义的.

波尔察诺在 1817 年就给出了连续函数的定义，并且用确界证明了连续函数的介值定理. 后来柯西又以更加严格的方式定义了连续函数. 他说："函数 $f(x)$ 连续就是差值 $f(x+a)-f(x)$ 随着 a 无限减少. "柯西还利用区间套的思想证明了连续函数的介值定理. 现在微积分教科书中用 ε-δ 方法表述函数连续性的严密定义是由魏尔斯特拉斯给出的. 魏尔斯特拉斯还陈述了闭区间上的连续函数必定能达到上确界和下确界的性质，也就是连续函数在有界闭区间上的最大最小值定理.

1.2 内容与方法

1.2.1 极限的概念、性质与运算法则

极限描述处于无限变化过程中的函数的变化趋势. 变化过程指自变量的变化过程. 对于数列，自变量是自然数(数列通项的序号)；对于一元函数，自变量是实数. 自然数的无限变化过程只有一

种，就是 $n\to\infty$；实数的无限变化过程可以有六种：$x\to a$，$x\to a^-$，$x\to a^+$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 和 $x\to\infty$. 由于自变量的变化过程不同，上述七种极限的表述方式略有区别. 但是它们的本质都是相同的，因而具有完全相同的性质和运算法则. 今后，根据函数自变量的不同和具体变化过程的差异，还将会出现新的类型的极限(例如多元函数的极限，函数积分等).

如果在自变量 x 的某个变化过程中，函数 $f(x)$ 的极限是 A，则意味着在这个无限变化过程中，随着自变量无止境地变化，函数值 $f(x)$ 可以任意逼近常数 A. 如何定量地描述这个逼近过程？各种极限在形式上大同小异. 如果将七种极限统一起来，可以写成下面的定义：

定义 1.1 设 $f(x)$ 是处在自变量 x 的某个变化过程中的函数，A 是某个常数. 如果对于任意正数 ε，总存在那么一个时刻，使得在那个时刻之后，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称在这个变化过程中函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记作 $\lim f(x)=A$.

例如对于数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，函数 $f(x)$ 是数列 $\{a_n\}$，自变量是自然数 n，极限定义中所指的变化过程是 $n\to\infty$；"总存在那么一个时刻"是指存在自然数 N；"在那个时刻之后"是指当 $n>N$ 时；"$\lim f(x)=A$"是指 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

又如对于函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，自变量是实数 x；极限定义中所指的变化过程是 $x\to+\infty$；"总存在那么一个时刻"是指存在正数 N；"在那个时刻之后"是指当 $x>N$ 时；"$\lim f(x)=A$"是指 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

再如对于函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，自变量是实数 x；极限定义中所指的变化过程是 $x\to x_0$；"总存在那么一个时刻"是指存在正数 δ；"在那个时刻之后"是指当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时；"$\lim f(x)=A$"是指 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

用几何方法描述极限，可以对于极限有更加直观和清楚地理解．例如可以这样表述数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$：

如果对于点 A 的任意一个邻域 $U_\varepsilon=(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$，都能够找到自然数 N，使得对于所有满足 $n>N$ 的自然数 n，都有 $a_n\in U_\varepsilon$．则称点 A 是点列$\{a_n\}$的极限．

从这个定义直接看出，点列$\{a_n\}$收敛于点 A 的充分必要条件是：对于任意正数 ε，点列$\{a_n\}$中至多存在有限项位于点 A 的邻域 $U_\varepsilon=(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$之外．进而推出：如果点列$\{a_n\}$不收敛于点 A，则存在一个正数 ε_0，使得在该数列中存在无限多项位于邻域 U_{ε_0}之外．如果将位于邻域 U_{ε_0}之外的这无穷多项按照序号从小到大排列出来，就得到原数列的一个子列$\{a_{n_j}|j=1,2,\cdots\}$，满足$|a_{n_j}-A|\geqslant\varepsilon_0(j=1,2,\cdots)$．从而得到一个非常有用的结论：

定理 1.1 点列$\{a_n\}$不收敛于 A（此时或者$\{a_n\}$发散，或者$\{a_n\}$收敛，但是极限不等于 A）的充分必要条件是：对于某个正数 ε_0，存在$\{a_n\}$的一个子列$\{a_{n_j}|j=1,2,\cdots\}$，使得

$$|a_{n_j}-A|\geqslant\varepsilon_0\qquad(j=1,2,\cdots)$$

极限有一些非常重要的性质，这些性质经常应用于理论分析和证明之中．其中最常用的是极限的保序性（或者称保号性）：

定理 1.2 设处在某个变化过程中的变量 y 有极限$\lim y=A$．

(1) 如果从某个时刻开始恒有 $y\geqslant0$（$y\leqslant0$），则 $A\geqslant0$（$A\leqslant0$）；

(2) 如果 $A>0$（$A<0$），则从某个时刻开始恒有 $y>0$（$y<0$）．

例如对于数列的情形：设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，那么

(1) 如果对于充分大的自然数 n，恒有 $a_n\geqslant0$（$\leqslant0$），则 $A\geqslant0$（$A\leqslant0$）；

(2) 如果 $A>0$（$A<0$），则对于充分大的自然数 n，恒有 $a_n>0$

$(a_n<0)$.

又如对于函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,有下述结论:

(1) 如果存在某个正数 δ,使得对$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$中的 x 恒有 $f(x)\geqslant 0(f(x)\leqslant 0)$,则 $A\geqslant 0(A\leqslant 0)$;

(2) 如果 $A>0$ $(A<0)$,存在某个正数 δ,使得对$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$中的 x 恒有 $f(x)>0(f(x)<0)$.

今后常用到下列结论,它们是极限保序性的直接推论:

(1) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$B<A(B>A)$则存在正数 δ,使得对$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 中的 x 恒有 $f(x)>B(f(x)<B)$.

(2) 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,$B<A(B>A)$,则对充分大的自然数 n 恒有 $a_n>B(a_n<B)$.

极限运算法则包括极限的四则运算,复合函数极限定理以及幂指函数的极限法则.极限的各种运算法则为求极限提供了便利,极限运算法则也可以用于极限的证明.读者应当注意,在求极限的各种题目中,除非题目明确要求用极限的定义,否则要尽量使用极限的各种运算法则.

1.2.2 单调收敛定理与柯西收敛原则

单调收敛定理描述这样的性质:处在变化过程的量如果保持单调并且有界,则必收敛(即存在极限).它的极限恰好等于该变量值域的(上或下)确界.

关于数列的单调收敛定理是这样说的:

定理 1.3 (1) 如果数列$\{a_n\}$单调增加且有上界,则该数列收敛,并且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sup\{a_n|n\in\mathbf{N}\}$.

(2) 如果数列$\{a_n\}$单调减少且有下界,则该数列收敛,并且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\inf\{a_n|n\in\mathbf{N}\}$.

关于函数的单调收敛定理是这样说的:

定理 1.4

(1) 设处在某个变化过程中的函数 $f(x)$ 单调增加且有上界,则 $\lim f(x)=\sup\{f(x)\}$.

(2) 设处在某个变化过程中的函数 $f(x)$ 单调减少且有下界,则 $\lim f(x)=\inf\{f(x)\}$.

单调收敛定理是判定极限是否存在的一个重要准则,同时也是求极限的一个有用的方法.一般情形,运用单调收敛定理研究变量极限时,需要首先利用单调收敛定理判定极限的存在性,然后再运用极限运算法则求这个极限.考察下例:

例 设 $a_n=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}}_{n\text{重}}(a>0)$,求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解 首先用归纳法证明 $\{a_n\}$ 单调增加.由于

$$a_2-a_1=\sqrt{a+\sqrt{a}}-\sqrt{a}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+\sqrt{a}}+\sqrt{a}}>0$$

所以 $a_1<a_2$.今设 $a_k<a_{k+1}$,则有

$$a_{k+2}-a_{k+1}=\sqrt{a+\sqrt{a_{k+1}}}-\sqrt{a+\sqrt{a_k}}$$

$$=\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{\sqrt{a+\sqrt{a_{k+1}}}+\sqrt{a+\sqrt{a_k}}}>0$$

因此 $\{a_n\}$ 单调增加.

其次可以用归纳法证明 $\{a_n\}$ 有上界:首先有

$$a_1=\sqrt{a+\sqrt{a}}<\sqrt{a+2\sqrt{a}+1}=\sqrt{a}+1$$

如果 $a_k<\sqrt{a}+1$,则有

$$a_{k+1}=\sqrt{a+\sqrt{a_k}}<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a}+1$$