微积分教程

韩云瑞 扈志明主编 施学瑜主审

上

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

微积分教程

（上册）

韩云瑞　扈志明　主编

施学瑜　主审

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内容提要

本书分上、下两册.上册内容包含实数与函数,极限论与连续函数,一元函数微积分,数项级数与函数项级数(包括幂级数和 Fourier 级数);下册内容包含多元函数微积分,向量分析与常微分方程初步.书中每节后都附有适量的习题,每一章后附有综合性较强的、有一定难度的补充题.本书可供理工科大学一年级的微积分课程作为教材或者教学参考书.上、下两册的讲授时间总共大约需要 160 学时.本书还可以作为复习微积分(高等数学),准备参加理工科硕士研究生入学考试的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分教程.上册/韩云瑞,扈志明主编.—北京:清华大学出版社,1999.9
ISBN 7-302-03583-0

Ⅰ.微… Ⅱ.①韩…②扈… Ⅲ.微积分-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 14936 号

出版者:清华大学出版社(北京清华大学学研楼,邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者:北京市密云胶印厂
发行者:新华书店总店北京发行所
开　本:850×1168 1/32 印张:13 字数:336 千字
版　次:1999 年 9 月第 1 版 2000 年 3 月第 2 次印刷
书　号:ISBN 7-302-03583-0/O·214
印　数:5001～10000
定　价:15.80 元

前　言

本书是清华大学理工科各系一年级《微积分》课程的教材，它的前身是同名讲义.该讲义从1991年以来经过三次修改，并在清华大学各系使用多年，已经成为清华大学《微积分》课程的主要教材之一.清华大学应用数学系先后有十余位教师参与过原讲义的编写与修改工作.现在的这部教材是在原有的基础上再次进行较大的修改而写成的.

随着科学技术的发展与教学改革的深入，近年来清华大学《微积分》课程的教学思想与内容要求发生了很大变化，这部微积分教材从一个侧面反映了清华大学《微积分》课程教学的发展趋势和教学水平.

由于近代数学以及许多有应用价值的数学知识不断地被充实到大学数学的教学内容中来，经典微积分的课时不断地被压缩，在这种情况下，更应当重视《微积分》课程在大学数学课程体系中的基础地位，在适当精简教学内容的同时，应当更好地把握微积分的基本要求，在较短的时间内，使学生掌握微积分的基本思想与基本方法.在为其它数学课程与各专业课程奠定良好的基础的同时，使学生的数学素养和能力得到扎实的提高.这是本书编写的主要指导思想.

在《微积分》课程的教材中，使分析的概念和原理与代数的运算相结合，将现代数学的观点和语言融入经典的微积分素材之中，已经是一种趋势，在这方面，本书编者已经做过反复的探索.但是，经典微积分的思想与方法仍然是基础数学与应用数学的非常重要的基础.《微积分》课程教学的主要任务，是使大学生掌握经典微积

分的基本思想与基本方法.大学生们可以通过学习后续数学课程了解现代数学的内容与方法.鉴于这些考虑,在引进现代数学的原理和语言方面,本书只作了适量的努力.

尽管本书与传统的微积分教材没有体系上的重大区别,但是它的内容与叙述方法却有许多变化.例如,多元微积分与常微分方程的材料处理尽可能地使用线性代数语言描述,第二型线、面积分与向量场有机地结合起来,并更加重视物理背景,多元微分的分析概念更好地与几何直观相结合等.

教材中尽可能地将微积分发展中若干重要思想有机地融会于教学内容之中,向读者介绍了微积分的重要原理的产生背景与发展过程,展示一代代数学大师的光辉思想与巨大贡献.使学生在学习微积分知识的同时,在微积分前进的历史足迹中,受到启迪,吸取力量.

施学瑜教授对于本书的编写给予了热情的关心和指导,他认真阅读了教材全部内容,提出了许多有价值的意见和建议.吴洁华副教授也对教材提出了非常中肯的意见,他们的许多建议都已经为编者所采纳.孙念增教授曾经认真审阅过原讲义下册,并提出了具体的指导意见.马连荣博士,吕志博士,刘智新博士,杨和平博士,章梅荣教授,胡金德教授都曾经参加过原讲义的编写工作,许甫华副教授,王燕来副教授,刘庆华副教授都曾为这部教材的形成作出过贡献.除此之外,谭泽光教授,白峰杉教授为本教材的编写提供了多方面的支持和鼓励.借此机会,编者向他们一一致谢.

由于编者水平所限,错误与疏漏在所难免,敬请读者批评指正.

编　者

1998年11月于清华大学

目　　录

第 1 章 实数与函数

1.1 预 备 知 识

数学是一门用数学符号描述世界的科学. 作为本书的预备知识,我们首先对于微积分中一些最常用的集合符号、逻辑符号以及基本术语作简要的介绍. 正确地理解与运用这些符号和术语既能培养数学思维能力,也能提高运用数学知识描述和分析问题的效率.

1.1.1 集合符号

一个集合(set)S 是某些个体的总和,这些个体或者符合某种规定,或者具有某些可以识别的属性. 集合 S 中的每一个体 a 称为 S 的元素(element),记为 $a \in S$,读作“a 属于 S”;如果 a 不是 S 的元素,则记为 $a \notin S$,读作“a 不属于 S”.

一般情况下,集合有两种表示方法,通过下面的例子来说明.

例 1.1.1 考察由下列元素

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$$

组成的集合 S,我们可以将其表示成

$$S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

这种将集合 S 中的所有元素都列举出来的表示方法称为**列举法**.

集合 S 也可以用下面的方式表示:

$$S = \{n \mid n \text{ 是小于 } 10 \text{ 的非负整数}\}.$$

在这里我们用一个命题:n 是小于 10 的非负整数来描述集合 S 中所有元素 n 的属性. 这种表示集合的方式称为**描述法**.

在数学中经常用描述法来表示一个集合，即用$\{x\mid p(x)\}$表示所有满足命题$p(x)$的实数x组成的集合.例如$\{x\mid x^2+1=2\}$表示所有满足等式$x^2+1=2$的实数x构成的集合；$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$表示所有满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的实数$x$构成的集合.

现在考察下面两个集合：

$$A=\{1,2\},B=\{1,2,3,4\}.$$

可以看出，A中的每一个元素都属于B.一般情形，如果集合A中的所有元素都属于集合B，则称**A包含于B**，并且记作$A\subseteq B$.例如

$$\{2\}\subseteq\{1,2\},\{3,5\}\subseteq\{1,2,3,4,5\},(0,1)\subseteq[0,1]$$

当$A\subseteq B$时，称A是B的一个**子集**.如果$A\subseteq B$与$B\subseteq A$同时成立，则称$A=B$.

空集是不包含任何元素的集合，空集的记号是$\varnothing$.

例如，集合$\{x\mid x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}$就是空集.空集不含任何元素，因此空集是任何集合的子集.今后在提到一个集合时，如果不加特别声明，一般都是非空集.

设A,B是两个集合，由这两个集合中的所有元素组成的集合称为A与B的并集，记作$A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

A和B的所有公共元素构成的集合称为A与B的**交集**，记作$A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

例如，

$$\{1,2,3,4,5\}\cup\{1,3,5,7,9\}=\{1,2,3,4,5,7,9\};$$

$$\{1,2,3,4,5\}\cap\{1,3,5,7,9\}=\{1,3,5\}.$$

今后我们经常要考虑实数集$\mathbf{R}$的子集，要接触各种区间.它们是：

开区间：$(a,b)=\{x|a<x<b\}$，

闭区间：$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，

半开半闭区间：$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$，

无穷区间：$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$，$(a,+\infty)$

$=\{x|x>a\}$，$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$.

通常用大写英文字母 I(interval 的第一个字母) 表示区间.

这里需要说明的是，$+\infty$、$-\infty$ 以及 ∞ 只是一种符号而不是实数，它们不能参与四则运算.

例 1.1.2 利用区间表示集合 $S=\{x|x^2+x-12>0\}$.

解：不等式左边分解因式，将不等式化成等价的形式：

$$(x-3)(x+4)>0.$$

等式左端是两个因子的乘积，为了使这个乘积为正数，必需且只需它们的符号相同，即 $x-3>0$，$x+4>0$，或者 $x-3<0$，$x+4<0$. 即 $x>3$ 与 $x>-4$ 同时成立，或者 $x<3$ 与 $x<-4$ 同时成立. 前一种情形意味着 $x\in(3,+\infty)$，后一种情形意味着 $x\in(-\infty,-4)$. 也就是说不论 $x\in(3,+\infty)$，还是 $x\in(-\infty,-4)$，都满足不等式 $x^2+x-12>0$. 因此有，

$$S=\{x|x^2+x-12>0\}=(-\infty,-4)\cup(3,+\infty).$$

1.1.2 邻域

今后经常提到"邻域"(neighbourhood) 这样一个术语.

设 δ 是任意一个正数，集合 $\{x|x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$ 称为点 x_0 的一个**邻域**，并且记作 $U(x_0,\delta)$. 这是一个以点 x_0 为中心，长度等于 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$；这个集合中所有的点 x 与 x_0 的距离 $|x-x_0|$ 都小于 δ.

如果在邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中除去点 x_0，则得集合 $\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$，称这个集合为 x_0 的一个**空心邻域**，并记作 $N(x_0,\delta)$. 它是两个开区间的并集：$N(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$.

今后如果说到点 x_0 的一个邻域，就是指某个开区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$；如果说到点 x_0 的一个空心邻域，就是指某个$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$，其中$\delta$是某个确定的正数. 但有时可能只需说明是点的某个邻域或空心邻域，而不需要说明这个正数 δ 的具体数值，则可以写成$U(x_0)$ 或者 $N(x_0)$.

1.1.3 逻辑符号

在逻辑推理过程中最常用的两个逻辑记号是 $\forall$ 和 $\exists$.

“$\forall$ ”表示“任取”，或者“任意给定”. 例如，$\forall\ a > 0$ 表示任意取一个正数 a，或者任意给定一个正数 a. 又如，$f(x) < 1$，$(\forall\ x \in [a,b])$，表示对于区间$[a,b]$ 中所有的 x 都有 $f(x) < 1$.

“$\exists$ ”表示“存在”，“至少存在一个”，或者“能够找到”.

例如考察下面这段话：

对于任意的正数 M，都能在区间$[a, +\infty)$ 中找到一个数 x，满足 $x > M$.

如果用逻辑符号 $\forall$ 与 $\exists$ ，这一段话的意思可以用更加简明的方式叙述：

$\forall\ M > 0$，$\exists\ x \in [a, +\infty)$，满足 $x > M$.

又如实数的阿基米德(Archmed) 公理是这样叙述的：

任意给定两个正的实数 a,b，都存在一个自然数 n，使得 $na > b$.

用逻辑符号 $\forall$ 与 $\exists$ ，可以将阿基米德公理改写成：

$\forall\ a,b > 0$，$\exists\ n \in \mathbf{N}$，使得$na > b$.

符号“:=”表示“定义”，或者“规定”. 例如定义实数的绝对值为

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

符号“$\Rightarrow$”表示“蕴含”，或者“推出”. 如果 A 与 B 是两个命题，

那么"$A \Rightarrow B$"表示:"若命题 A 成立,则命题 B 也成立". 即命题 A 是命题 B 的充分条件. 例如"a 是整数"$\Rightarrow$"a 是有理数".

符号"$\Leftrightarrow$"表示"等价",或者"充分必要". 若 A 与 B 是两个命题,那么"$A \Leftrightarrow B$"表示命题 A 与命题 B 互相等价,即互为充分必要条件. 例如:$x^2 > 4 \Leftrightarrow |x| > 2$.

1.2 实数与实数集

1.2.1 实数

微积分主要是在实数(real number)范围内讨论问题. 因此,需要对实数和实数集有足够的认识. 这一节对实数作简单的介绍. 有关实数的一些更加深入的讨论将在以后两章逐步展开.

人们对于数的认识是逐步发展的. 首先认识的是自然数(natural number)1,2,3,… 和整数(integer)0, ± 1, ± 2,…,然后是有理数(rational number),最后是无理数(irrational number).

数轴是研究实数的重要工具,有关实数的许多性质,都可以通过数轴直观地表现出来. 因此,我们首先建立数轴的概念.

在一条直线上取定一点,记作 o,称其为**原点**. 取直线的一个方向为正向,并用箭头表示,再取一个单位长度,那么这条直线就称为数轴.

数轴上的任意一个点 P,都对应于一个实数 x. 假定点 P 与原点 o 重合,则 $x = 0$. 假定点 P 不与原点 o 重合,首先用所取的单位长度量出线段 oP 的长度 $|oP|$. 如果点 P 位于原点的右侧,则取 $x = |oP|$; 如果点 P 位于原点的左侧,则取 $x = -|oP|$.

反之,任给一个实数 x,都可以在数轴上找到一个点 P,使得点 P 所对应的实数为 x. 这样,数轴上的点就与全体实数建立了一一对应的关系(图 1.1).

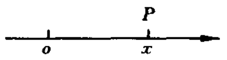

图 1.1

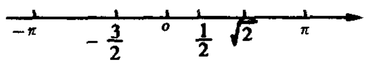

图 1.2

数轴也称为实数系的坐标系，数轴上与实数 x 对应的点 P 称为 x 的坐标. 图 1.2 中标出了实数$\frac{1}{2}$，$-\frac{3}{2}$，$\sqrt{2}$，π，$-\pi$ 的坐标.

用 **N** 表示所有自然数构成的集合；**Z** 表示全体整数组成的集合；**Q** 表示全体有理数组成的集合. 在数轴上，与有理数对应的点称为有理点.

有理数集包括所有整数与分数$\frac{p}{q}$(其中 p,q 为整数，$q \neq 0$). 在有理数集中定义了四则运算(除数不等于零). 有理数集对于四则运算是封闭的. 也就是说，对于有理数任意进行加、减、乘和除运算(零不能作除数)，得到的结果仍然是有理数.

有理数集 **Q** 还有两个重要性质：

第一是有理数的有序性，即有理数集 **Q** 是一个有序集(ordered set)，即对于任意的两个有理数 a,b，或者 $a \leqslant b$，或者 $b < a$，二者必居其一，且只居其一. 在数轴上，所有的有理点是按照从小到大的顺序自左至右排列的.

有理数的另一个重要性质是它的稠密性(denseness)，即任意两个有理数之间有无穷多个有理数. 这个性质可以这样证明：

设 r_1,r_2 是任意两个不相等的有理数，满足 $r_1 < r_2$，那么 $r_3 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ 也是有理数，并且满足 $r_1 < r_3 < r_2$，于是在 r_1 与 r_2 之间至少有一个有理数. 同样在 r_1,r_3 之间与 r_3,r_2 之间都至少有一个有理数，于是在 r_1 与 r_2 之间至少有三个有理数. 用归纳法可以证明，对于任意的自然数 N，在 r_1 与 r_2 之间能够找到多于 N 的有理数，因此在 r_1 与 r_2 之间有无穷多个有理数.

有理数的这个性质说明，有理点在数轴上是处处稠密的，即任意一个非空的开区间内都有无穷多个有理点.

虽然有理点在数轴上是处处稠密的，但是它们不能充满整个实轴. 例如，设边长为1的正方形的对角线长等于 a，则 $a^2=2$. 以数轴上的原点为圆心、a 为半径作圆周，则圆周与实轴的交点就不是有理点(图 1.3)，事实上，我们已经知道这个点是无理数 $\sqrt{2}$.

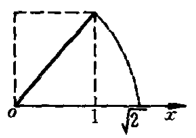

图 1.3

于是，在数轴上除了有理点之外还有许多空隙，这些空隙处的点称为无理点，无理点所代表的数称为无理数. 所有无理数构成的集合称为无理数集.

每个有理数可以表示为一个有限小数，或者一个无限循环小数；每个无理数可以表示为一个无限不循环小数. 但是经常用有限小数作为无理数的近似值，例如

$$\sqrt{2}\approx 1.4142136, \pi\approx 3.1415927 \text{ 等}.$$

有理数和无理数统称为实数，所有实数构成的集合称为实数集. 全体实数构成的集合记作 **R**. 数轴上的点与实数之间是一一对应的关系，因此，通常将实数 x 与数轴上代表 x 的点不加区分. 例如实数 x 也称为点 x，反之亦然.

在实数集中定义了四则运算，而且实数集对于四则运算也是封闭的. 实数集同样具备有序性和稠密性. 除此之外，实数集还有另外一个重要性质，即实数集的连续性(continuity). 实数集与数轴上的点是一一对应的，如果一个点在数轴上连续运动，那么，它经过的每一个位置都代表一个实数，有理数集则不具备这个性质.

在实数集中，有理数集只是很少的一部分，但有理数在实数集中是稠密的. 即在实数集中的任一个非空开区间中，都包含无穷多个有理数. 有理数在实数集中具有稠密性这一事实，在数学理论中

有非常重要的意义.

对于任意一个实数 x,它的绝对值(absolute value) 为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

例如,$|-3| = |3| = 3$;$|-1.3| = 1.3$,$|0| = 0$ 等.

绝对值 $|x|$ 有明显的几何意义:实数 x 的绝对值 $|x|$ 等于数轴上的点 x 到原点的距离.

绝对值有如下性质(以下 x,y 为任意实数)

(1) $|x| = \sqrt{x^2}$;

(2) $|x| \geqslant 0$;仅当 $x = 0$ 时,$|x| = 0$;

(3) $|-x| = |x|$;

(4) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$;

(5) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$;

(6) $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$;

(7) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

(8) $\left|\dfrac{y}{x}\right| = \dfrac{|y|}{|x|}(x \neq 0)$.

性质(1)~(4)可以由绝对值的定义直接得到.下面仅证明性质(5)和(6),其它证明留给读者.

性质(5)的证明 由绝对值的定义直接得到

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|, \qquad -|y| \leqslant y \leqslant |y|,$$

将上述两式相加,就得到

$$-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|,$$

于是有

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

性质(6)的证明 注意到 $x = (x-y) + y$.在性质 5 中用 $x - y$ 取代 x,可以得到

$$|x| \leqslant |x-y| + |y|,$$

即

$$|x|-|y|\leqslant|x-y|. \tag{1.2.1}$$

同样的方法又可以得到

$$|y|-|x|\leqslant|x-y|. \tag{1.2.2}$$

联合(1.2.1),(1.2.2)两式,就得到性质(6).

由绝对值的性质可以看出:$|x|\leqslant r(r>0)$ 等价于 $-r\leqslant x\leqslant r$. 因此集合 $\{x\mid |x|\leqslant r\}$ 与集合 $\{x\mid -r\leqslant x\leqslant r\}$ 是相同的.

1.2.2 实数集的界与确界

设 S 为一个非空实数集,如果存在 $b\in\mathbf{R}$,使得对于所有的 $x\in S$,都有 $x\leqslant b$,则称 b 是 S 的一个**上界**,此时称 S **有上界**;如果存在 $a\in\mathbf{R}$,使得对于所有的 $x\in S$,都有 $a\leqslant x$,则称 a 是 S 的一个**下界**,此时称 S **有下界**.

如果数集 S 既有上界,又有下界,则称 S 为有界集(bounded set).不难看出数集 S 有界的充分必要条件是存在正数 M,使得对于所有的 $x\in S$,都有

$$|x|\leqslant M.$$

集合 S 中如果有最大的数 b,则称 b 为 S 的**最大值**(maximum),S 的最大值记作 $\max S$.集合 S 中如果有最小的数 a,则称 a 为 S 的**最小值**(minimum),S 的最小值记作 $\min S$.

例如,闭区间$[0,1]$和开区间$(0,1)$都是有界集,闭区间$[0,1]$的最小值和最大值分别是0和1,而开区间$(0,1)$既无最大值,也无最小值.这说明,有界数集未必有最大值和最小值.

如果 S 有上界,则一定有无穷多个上界.事实上,假设 b 是 S 的一个上界,则 $b+1$,$b+2$ 都是 S 的上界.同样,如果 S 有下界,则一定有无穷多个下界.所有的上界中显然没有最大的数.那么所有的上界中有没有最小的数?同样,所有的下界中显然没有最小的数.那么所有的下界中有没有最大的数?对此有以下结论: