面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

复变函数

李庆忠 主编
焦宝聪 王 安 王燕生 编

科学出版社

面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

复　变　函　数

李庆忠　主编

焦宝聪　王　安　王燕生　编

科学出版社

2000

内 容 简 介

本书是北京市教学改革项目试点教材之一，主要内容包括：复数系、度量空间的概念与平面上的拓扑、解析函数的初等性质、复积分、留数及其应用、Schwarz 引理的几何解释以及 Picard 定理的证明、Riemann 映射定理的证明、正规族的概念及其应用等.

本书强调了复变函数理论与其它学科之间的联系，内容处理上重点突出，叙述简明，每节末附有课外作业和练习.

本书适合高等师范院校数学系及普通综合性大学数学系高年级学生使用.

图书在版编目（CIP）数据

复变函数/李庆忠主编；焦宝聪，王安，王燕生编. －北京：科学出版社，2000.9

（面向 21 世纪课程教材）

ISBN 7-03-008336-9

I. 复...　II. ①李...　②焦...　③王...　④王...　III. 复变函数-高等学校：师范院校-教材　IV. O174. 5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 04271 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717

北京双青印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2000 年 9 月第 一 版　开本：787×960 1/16
2000 年 9 月第一次印刷　印张：14
印数：1—5 300　字数：259 000

定价：18.00 元

序　　言

复变函数理论在 19 世纪由三位著名的数学家 A. L. Cauchy(1789.8.21 ～ 1857.5.25), K. Weierstrass (1815.10.31 ～ 1897.2.19) 和 B. Riemann (1826.9.17 ～ 1866.7.20) 奠定了基础. 若从 1826 年 Cauchy 建立其积分公式算起, 至今已有 170 多年的历史, 发展至今已经相当成熟. 这三位数学家从完全不同的途径来研究复变函数理论而得到殊途同归的效果: Cauchy 定义的解析函数 $f(z)$ 是指其在区域内存在连续导数 $f'(z)$; Weierstrass 定义的解析函数 $f(z)$ 是指其在区域每一点的邻域内可以展为收敛的幂级数; Riemann 则把复变函数分成实部和虚部来研究, 即 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, 而 $f(z)$ 在区域解析是指 u,v 在此区域内存在一阶连续偏导数而且满足现在称之为 Cauchy-Riemann 的方程. 而事实上这三种定义都是彼此等价的. 也就是说, 其中任一种定义都可以推出其它两种定义. 当初他们三人并不都称他们定义的函数为解析函数, 而是各有各的名字, 因而还有正则 (regular) 函数和全纯 (holomorphic) 函数的称谓. 由于其等价性, 因而解析、正则和全纯是同一事物的三种不同的称呼而已. 以上是指其殊途同归. 但是, 这三个人各成系统, 各有特色, 各自形成其学派: Cauchy 建立了复变函数的积分理论; Weierstrass 建立了复变函数的级数理论; Riemann 建立了复变函数的几何理论. 这三部分构成了复变函数理论的基础. 至今国内外高等院校的复变函数论基础课程的教材都是以这三部分为中心来编写的. 我国自 50 年代末开始教改以来, 凡 40 年, 深知此三部分内容为不可触动者. 综观现在复变函数论的各色教材, 都是以各自的观点将此三部分内容为中心再加一些特色来编写的. 本教材也不例外, 并受 Steven G. Krantz 所写的 Complex Analysis: The Geometric Viewpoint 一书的影响. 本教材的特点是用几何观点看复变函数, 特别是第七章, 引进了一些微分几何的概念, 并在 Poincaré 度量的基础上, 以双曲几何的观点给出了 Picard 定理的证明. 这可以说是本教材的一大特色, 是否能为大家所接受, 尚待实践进一步检验.

史济怀和刘太顺在其编著的 ≪ 复变函数 ≫ 一书 (中国科技大学出版社, 1999) 的序言中谈到了这样的问题: 在微积分课程中, 讲完单变量微积分, 还要讲多变量微积分, 为什么在复变函数课程中没有多变量函数的理论?

我的看法是，多变量微积分基本上是单变量微积分的平行推广，在理论上无多少创新之处. 因而学了单变量微积分之后就很容易学多变量微积分，一些能力强的学生都可以进行自学. 然而在复变函数中，单复变的理论绝大多数不可能平行推广到多复变中去，例如在多复变中解析函数的零点总不是孤立的，多复变中不存在 Riemann 映射定理等等. 将单复变中的任何一个重要概念推广到多复变中，总会遇到想像不到的困难，这就促使人们去发现更强有力的且不同于单复变的结果与方法. 于是就形成了多复变特有的内容与结果，并创造了新的工具与方法. 这说明多复变与单复变有本质的区别，因而不可能在复变函数的课程中讲多复变的内容. 本教材最后一章，仅仅是多复变的一些粗浅的东西，旨在于指出多复变与单复变之不同.

本教材原计划不讲 Riemann 曲面，由于教育部数学与应用数学专业的教学规范关于复变函数的教学内容中有 Riemann 曲面，因而加上了这个内容.

现在强调课程内容与体系的改革适应 21 世纪国家发展的需要，其难点之一是精简内容与削减课时. 因而在较为紧凑的课时下，不可能在课堂上讲解理论联系实际的具体问题. 安排在课外也许是可能的. 为此向读者推荐 ≪ 复变函数的应用 ≫ 一书 (闻国椿、殷慰萍，首都师范大学出版社， 1999). 该书较全面地讲述了复变函数论方法在流体力学、空气动力学、弹性力学、电磁学、热学、电工及通讯等方面的应用.

我们很荣幸地请到北京大学李忠教授、张顺燕教授、复旦大学张锦豪教授、同济大学陈志华教授、南京师范大学陈怀惠教授和华东师范大学张奠宙教授对本教材进行了审查. 他们提出了很多宝贵的改进意见，为本教材增色不少，在此我们表示衷心的感谢. 虽然按他们的意见进行了修改和补充，我想还是不能尽如人意. 我是这个教改项目的主持人 (负责人), 在我的主持下，已经按照讨论过的编写大纲完成了初稿. 后来，李庆忠博士来到我系，我就请李庆忠博士全权做本教材的主编工作. 李庆忠博士很高兴地接受了这一任务. 所谓用人不疑，此后我基本上就没有插手此事. 当然，请专家审查，联系出版等事还是由我出面. 在此我要感谢李庆忠博士完成了本教材的主编工作，也感谢焦宝聪、王安和王燕生参与了本教材的编写. 因此，他们要我写一个序言，我就欣然领命.

殷慰萍

2000 年 1 月

目　录

序　言
第一章　复数系 1
§1 复数域 1
§2 复平面 4
§3 复数的根和极坐标表示 6
§4 复数在平面几何上的应用 9
§5 扩充复平面和它的球面表示 13
第二章　度量空间和平面的拓扑 16
§1 度量空间的定义和例子 16
§2 序列和完备性 21
§3 紧性 24
§4 连续性 27
§5 一致收敛 29
§6 连通性 32
第三章　解析函数的初等性质与例子 35
§1 幂级数 35
§2 解析函数的概念 44
§3 Cauchy-Riemann 方程 48
§4 解析函数的例子 53
§5 初等多值解析函数的例子 58
§6 初等 Riemann 面 62
§7 从映射的观点看解析函数 64
§8 Möbius 变换 66
§9 Möbius 变换的应用 73
第四章　解析函数的积分表示 77
§1 复积分的概念及简单性质 77
§2 Cauchy 积分定理与 Cauchy 积分公式 85
§3 解析函数的幂级数表示 88

§4 解析函数的零点 93
§5 零点的个数 100
§6 Goursat 定理 101
第五章 解析函数的奇点 105
§1 奇点的分类 105
§2 Laurent 展式 109
§3 留数 115
§4 辐角原理 122
§5 开映射定理 128
§6 Schwarz 引理 130
§7 解析开拓 134
第六章 正规族与 Riemann 映射定理 139
§1 正规族 139
§2 Riemann 映射定理 142
第七章 Poincaré 度量与 Liouville 定理 146
§1 Riemann 度量和长度的概念 146
§2 复分析中的两个重要算子 152
§3 等距 155
§4 Poincaré 度量 158
§5 Schwarz 引理的几何解释 165
§6 曲率 168
§7 Liouville 定理及其应用 173
§8 正规族和球面度量 176
§9 Picard 定理的证明 182
第八章 多复变函数 185
§1 多复变解析函数的定义 185
§2 多重幂级数与全纯函数 187
§3 全纯函数的零点 192
§4 单位球的自同构 195
参考文献 204
附录 A 共形度量的 Guass 曲率计算公式 205
附录 B 非欧几何模型 209
名词索引 212

第一章 复 数 系

§1 复 数 域

虽然在初等数学中我们已接触到一些有关复数的知识，但不够系统，也不够严格. 要严格叙述复数的概念，应该从代数的观点出发.

我们定义复数集 $\mathbb{C}$ 为所有有序实数对 (a,b) 的集合，即

$$\mathbb{C}=\{(a,b): a,b\in\mathbb{R}\}.$$

在 $\mathbb{C}$ 上定义加法和乘法如下：

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d);$$

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

可以验证，$\mathbb{C}$ 上这样定义的加法和乘法满足域的所有公理. 即：$\mathbb{C}$ 上的加法和乘法满足结合律、交换律，乘法对加法满足分配律；$(0,0)$ 和 $(1,0)$ 分别是加法和乘法的单位元；$(0,0)$ 称为 $\mathbb{C}$ 的零元；$\mathbb{C}$ 的元有加法逆元，每个非零元有乘法逆元. $\mathbb{C}$ 上配有以上定义的加法和乘法后成为一个域，我们称这个域为复数域.

映射 $a\longrightarrow(a,0)$ 定义了实数域 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{C}$ 的子域

$$\{(a,0)\in\mathbb{C}: a\in\mathbb{R}\}$$

的一个同构. 因此，可以认为 $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个子域，我们将复数 $(a,0)$ 记为 a. 如果我们令 $\mathrm{i}=(0,1)$，那么当 $b\in\mathbb{R}$ 时，

$$\mathrm{i}b=(0,1)(b,0)=(0,b).$$

所以

$$(0,b)=\mathrm{i}b,\quad (a,b)=a+\mathrm{i}b.$$

下面我们不再用有序实数对来记复数，而用 $z = a + ib$ 来表示复数.

注意到 $i^2 = -1$，所以方程

$$z^2 + 1 = 0$$

在 $\mathbb{C}$ 中有根. 事实上，对 $\mathbb{C}$ 中的每个 z，有

$$z^2 + 1 = (z + i)(z - i).$$

更一般地，对任给的复数 z 和 w 有

$$z^2 + w^2 = (z + iw)(z - iw).$$

若在上式中令 z 和 w 分别为实数 a 和 b 且 $a^2 + b^2 \neq 0$, 则有

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right),$$

这就是复数的倒数公式.

当我们记 $z = a + ib \ (a, b \in \mathbb{R})$ 时，称 a 和 b 分别为 z 的实部和虚部且记为

$$a = \mathrm{Re} z, \quad b = \mathrm{Im} z.$$

下面我们在 $\mathbb{C}$ 中引进模与共轭的概念. 对于复数 $z = a + ib \ (a, b \in \mathbb{R})$, 我们定义

$$|z| = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

为 z 的模；定义 $\overline{z} = a - ib$ 为 z 的共轭. 注意

$$\overline{\overline{z}} = z, \tag{1.1}$$

$$|z|^2 = z\overline{z}. \tag{1.2}$$

特别地，若 $z \neq 0$，那么

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

下面是模与共轭的基本性质，它们的验证留作练习.

$$\mathrm{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \tag{1.3}$$

$$\mathrm{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

$$\overline{(z+w)}=\overline{z}+\overline{w}, \tag{1.4}$$

$$\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}, \quad (\overline{z})^{-1}=\overline{(z^{-1})}.$$

$$|zw|=|z||w|. \tag{1.5}$$

$$|z/w|=|z|/|w|. \tag{1.6}$$

$$|\overline{z}|=|z|. \tag{1.7}$$

读者在证明最后三个等式时，最好不要展开 z 和 w 为实部和虚部，而只利用 (1.1), (1.2),(1.3) 和 (1.4).

【课外作业】

1. 复习域和子域的定义.
2. 复习域之间的同态、同构的概念.
3. 验证复数集 $\mathbb{C}$ 配上本节定义的加法和乘法成为一个域.
4. 验证映射

$$\Phi:\mathbb{R}\longrightarrow\{(a,0)\in\mathbb{C}: a\in\mathbb{R}\}$$

$$a\longmapsto(a,0)$$

为域同构.

练　　习

1．找出下面每个复数的实部和虚部：

$$\frac{1}{z};\quad \frac{z-a}{z+a}\ (a\in\mathbb{R});\quad z^3;\quad \frac{3+5\mathrm{i}}{7\mathrm{i}+1};\quad \left(\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3;$$

$$\left(\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^6;\quad \mathrm{i}^n;\quad \left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n,\quad 2\leqslant n\leqslant 8.$$

2．找出下面每个复数的模和共轭：

$$-2+\mathrm{i};\quad -3;\quad (2+\mathrm{i})(4+3\mathrm{i});$$

$$\frac{3-\mathrm{i}}{\sqrt{2}+3\mathrm{i}};\quad \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}+3};\quad (1+\mathrm{i})^6;\quad \mathrm{i}^{17}.$$

3．证明：z 是实数当且仅当 $z=\overline{z}$.

4．如果 z 和 w 是复数，证明下面的等式：

$$|z+w|^2=|z|^2+2\mathrm{Re}(z\overline{w})+|w|^2,$$

$$|z-w|^2=|z|^2-2\mathrm{Re}(z\overline{w})+|w|^2,$$

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2).$$

5．使用归纳法证明：对于

$$z=z_1+z_2+\cdots+z_n,\quad w=w_1w_2w_3\cdots w_n$$

有

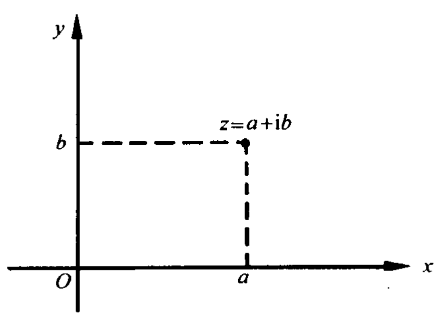
$$\overline{z}=\overline{z_1}+\cdots+\overline{z_n};\quad |w|=|w_1||w_2|\cdots|w_n|;\quad \overline{w}=\overline{w_1}\,\overline{w_2}\cdots\overline{w_n}.$$

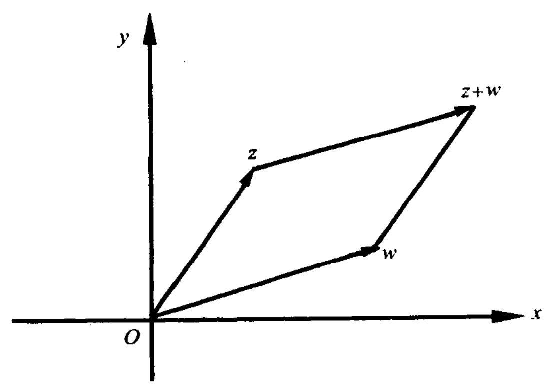
6．设 $R(z)$ 为 z 的有理函数．证明：当 $R(z)$ 中的所有系数为实数时，

$$\overline{R(z)}=R(\overline{z}).$$

§2 复 平 面

在平面上取定一个直角坐标系，实数对 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ 就表示平面上的一个点，所以复数 $z=a+\mathrm{i}b$ 可以看成平面上以 a 为横坐标，以 b 为纵坐标的一个点 (如左下图).





第一个坐标轴 (x 轴) 称为实轴，第二个坐标轴 (y 轴) 称为虚轴，两轴所在的平面称为复平面．这样复数集 $\mathbb{C}$ 与平面上的点建立了一一对应的关系，同时也给出了复数的几何表示．而复数的加法与平面上向量的加法规律一致．若 $z,w\in\mathbb{C}$, 则从 O 到 z 与 O 到 w 的直线段 $\overline{Oz}$, $\overline{Ow}$ 是以 O, z, w 和 $z+w$ 为顶点的平行四边形的两个边 (如右上图).

再注意到 $|z-w|$ 为 z 和 w 之间的距离，那么 §1 中练习第 4 题的几何解释是：一个平行四边形边长的平方和等于它的对角线长度的平方和.

下面我们从复数的运算角度证明距离函数 (见第三章) 的三角不等式：

$$|z_1 - z_2| \leqslant |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|,$$

这里 $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

证明　由

$$z_1 - z_2 = (z_1 - z_3) + (z_3 - z_2),$$

记 $z = z_1 - z_3$, $w = z_3 - z_2$, 可将原不等式的证明转化为证明不等式

$$|z+w| \leqslant |z| + |w| \qquad (z, w \in \mathbb{C}). \tag{2.1}$$

为证此不等式，注意到对任给的 $z \in \mathbb{C}$,

$$-|z| \leqslant \mathrm{Re} z \leqslant |z|, \tag{2.2}$$

$$-|z| \leqslant \mathrm{Im} z \leqslant |z|.$$

因此

$$\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leqslant |z\overline{w}| = |z||w|.$$

这样便得

$$|z+w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \leqslant |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.$$

于是得到 (2.1). 我们也称 (2.1) 为三角不等式. (2.1) 的几何意义是：如果在平面上记以 O,z 和 w 为顶点的三角形为 $\triangle$, 那么三角形 $\triangle$ 一个边的长度总小于另两个边的长度之和，或两点间的最短连线是直线段.

当遇到不等式时，我们总应该问何时不等式中的等号成立. 从几何上可以知道，当 $z = tw$ ， $t \in \mathbb{R}^+$(即点 z,w 与 O 共线) 时， (2.1) 中的等号成立. 反之若等号成立：

$$|z+w| = |z| + |w|,$$

从不等式的证明可知， $|z\overline{w}| = \mathrm{Re}(z\overline{w})$, 这等价于 $z\overline{w} \geqslant 0$ ($z\overline{w}$ 是非负实数). 当 $w \neq 0$ 时，用 w/w 乘以不等式 $z\overline{w} \geqslant 0$ 两边得 $|w|^2(z/w) \geqslant 0$, 若令

$$t = z/w = \left(\frac{1}{|w|^2}\right)|w|^2(z/w),$$

则 t 为实数且 $t \geqslant 0$. 故 $z = tw$, $t \geqslant 0$.

总之，我们得到：不等式 (2.1) 中的等号成立等价于点 O、z、w 共线 (或向量 z 与 w 线性相关).

用归纳法可得

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|. \tag{2.3}$$

另一个有用的不等式是

$$\big||z| - |w|\big| \leqslant |z - w|. \tag{2.4}$$

以上我们已给出了模的几何解释，而从几何的角度看 $\bar{z}$ 为 z 关于实轴的对称点.

练　　习

1．证明 (2.4) 并给出等号成立的充要条件.

2．证明 (2.3) 中的等号成立，当且仅当 $z_l \neq 0$ 时，

$$z_k/z_l \geqslant 0, \quad 1 \leqslant k,\ l \leqslant n.$$

3．令 $a \in \mathbb{R}$, $c > 0$ 固定，描述满足等式

$$|z - a| - |z + a| = 2c$$

的点 z 的集合. 当 a 为复数时，使用一个平面的旋转，描述满足等式的点 z 的轨迹.

§3 复数的根和极坐标表示

考虑复平面 $\mathbb{C}$ 中的点 $z = x + \mathrm{i}y$，设这个点的极坐标为 (r, θ), 即

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

显然 $r = |z|$，θ 是正实轴和 O 与 z 的连线之夹角. 注意：可以用 θ 加上任意 2π 的整数倍代替上面方程中的 θ. 角度 θ 称为 z 的辐角，记为 $\theta = \mathrm{Arg}z$. 由于一个 z 的辐角 θ 可以有无限多个值，所以 Arg 不是一个函数. 但若限制 $\theta \in [0, 2\pi]$, 记这样的 $\theta = \arg z$, 则 arg 是一个函数.

若

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1),\ \ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2),$$

则

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2[(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]. \end{aligned}$$

最后的等式由两角和的正弦与余弦公式而得. 这样

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg} z_2.$$

由此得复数乘法的几何解释.

用归纳法可得, 若

$$z_k = r_k(\cos\theta_k + \mathrm{i}\sin\theta_k),\ \ 1 \leqslant k \leqslant n,$$

则

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n[\cos(\theta_1 + \cdots + \theta_n) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \cdots + \theta_n)]. \tag{3.1}$$

特别地, 对每个整数 $n \geqslant 0$,

$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta). \tag{3.2}$$

此外, 如果 $z \neq 0$, $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, 我们有

$$z\{r^{-1}[\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)]\} = 1,$$

即

$$z^{-1} = r^{-1}[\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)].$$

这样当 $z \neq 0$ 时, (3.2) 对所有整数成立. 作为 (3.2) 的一个特例可得 De Moivre 公式

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta. \tag{3.3}$$

我们现在可以考虑下面的问题: 对一个给定的复数 $a \neq 0$ 和一个整数 $n \geqslant 2$, 能找到一个数 z 满足 $z^n = a$ 吗? 又可以找到多少个那样的 z? 利用 (3.3) 的右边便可容易地找到这样的解.

令

$$a = |a|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

由 (3.2)

$$z = |a|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

便满足方程 $z^n = a$. 然而这个 z 不是惟一的解，因为

$$z_1 = |a|^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{1}{n}(\theta + 2\pi) + \mathrm{i}\sin\frac{1}{n}(\theta + 2\pi)\right]$$

也满足 $(z_1)^n = a$. 事实上，数

$$|a|^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{1}{n}(\theta + 2k\pi) + \mathrm{i}\sin\frac{1}{n}(\theta + 2k\pi)\right], \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1, \tag{3.4}$$

均是 a 的 n 次根.

总之，我们得到：对 $\mathbb{C}$ 中的每一个非零数 a，存在 a 的 n 个不同的 n 次根，它们由 (3.4) 给出.

例 计算 1 的 n 次根 (称 1 的 n 次根为 n 次单位根).

由 $1 = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0$, (3.4) 给出了 1 的 n 个 n 次根：

$$1, \quad \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}, \quad \cdots, \quad \cos\frac{2\pi}{n}(n-1) + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}(n-1).$$

特别地，1 的立方根为

$$1, \quad \frac{1}{2}(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}), \quad \frac{1}{2}(-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}).$$

【课外作业】

1. 查阅三次方程的求根公式.

①查阅 [5, p.86~p.90];

②查阅 [7, p.306~p.311].

练　习

1．计算 1 的六次根.

2．计算：(a) i 的平方根；(b) i 的立方根；(c) $\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$ 的平方根.

3. 令

$$z=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n},$$

$n\geqslant 2$ 为整数，证明

$$1+z+\cdots+z^{n-1}=0.$$

4. 证明：$\varphi(t)=\cos t+\mathrm{i}\sin t$ 是加法群 $\mathbb{R}$ 到乘法群

$$T=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|=1\}$$

的同态.

5. 令

$$w=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n},$$

$n\geqslant 2$ 为整数，证明 n 次单位根可表示为

$$1,\ w,\ w^2,\ \cdots,w^{n-1};$$

若 $a^{\frac{1}{n}}$ 为 a 的任一 n 次根，则 a 的 n 次根全体可表示为

$$w^k\cdot a^{\frac{1}{n}}\qquad (k=0,1,2,\cdots,n-1).$$

§4 复数在平面几何上的应用

令 L 表示 $\mathbb{C}$ 中的一条直线，由解析几何可知，L 由 L 上的一个点和一个方向向量决定. 这样，若 a 为 L 上的一个点，b 为它的方向向量，则

$$L=\{z=a+bt\colon -\infty<t<+\infty\}.$$

由 $b\neq 0$, 所以对 L 上的 z，

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)=0.$$

反之，若 z 使得

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)=0,$$

则

$$t=\frac{z-a}{b}$$

为一个实数，所以 $z=a+tb\in L$. 即

$$L=\left\{z\colon \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)=0\right\}. \tag{4.1}$$

问题：集合

$$\left\{z\colon \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)>0\right\}$$

与

$$\left\{z\colon \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)<0\right\}$$

是什么样的几何图形？

首先我们注意到，由于 b 仅代表一个方向，所以可设 $|b|=1$. 先考虑 $a=0$ 的情况，且令

$$H_0=\{z\colon \operatorname{Im}(z/b)>0\},\quad b=\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta.$$

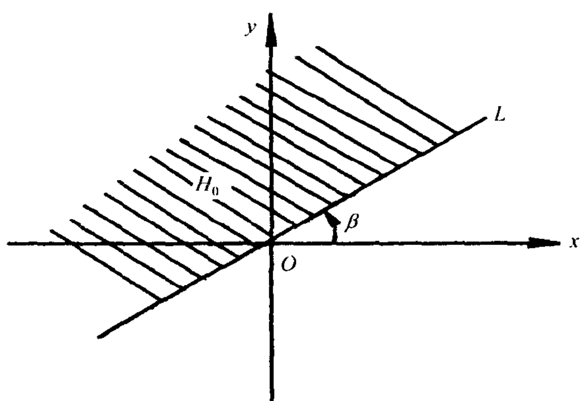
若

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

则

$$z/b=r[\cos(\theta-\beta)+\mathrm{i}\sin(\theta-\beta)].$$

这样，z 在 H_0 里当且仅当 $\sin(\theta-\beta)>0$, 即 $\beta<\theta<\pi+\beta$. 因此 H_0 是位于 L 左边的半平面 (当我们沿 b 的方向在 L 上步行时 H_0 位于我们的左边，如下图).



若令

$$H_a=\left\{z\colon \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)>0\right\},$$

则有

$$H_a=a+H_0\equiv\{a+w\colon w\in H_0\}.$$