# 大学文科高等数学

## 第二册

姚孟臣 主编 徐庆和 孙惠玲 卢刚 刘洁民 编

高等教育出版社

# 大学文科高等数学

## 第二册

姚孟臣　主编
徐庆和　孙惠玲　卢　刚　刘洁民　编

高等教育出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

大学文科高等数学　第2册/姚孟臣主编;徐庆和等编.
北京:高等教育出版社,2001重印
ISBN 7-04-006390-5

Ⅰ.大… Ⅱ.①姚… ②徐… Ⅲ.高等数学-高等学
校-文科(教育)-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第21597号

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | | |
| 社　　址 | 北京市东城区沙滩后街55号 | 邮政编码 | 100009 |
| 电　　话 | 010—64054588 | 传　　真 | 010—64014048 |
| 网　　址 | http://www.hep.edu.cn | | |
| 经　　销 | 新华书店北京发行所 | | |
| 印　　刷 | 北京人卫印刷厂 | | |
| 开　　本 | 850×1168　1/32 | 版　　次 | 1997年12月第1版 |
| 印　　张 | 9.625 | 印　　次 | 2001年3月第6次印刷 |
| 字　　数 | 240 000 | 定　　价 | 9.50元 |

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

全书以微积分、线性代数、概率论和数理统计为主要内容,按“模块式”结构编写,分两册出版.两册间既相互独立,又互相衔接、逐层递进,以便不同专业根据需要和学时多少灵活选取或组合.第一册包括初等微积分、线性代数、概率统计初步三部分内容;本册包括一元微积分、线性代数、初等概率论、一元统计分析初步四部分内容,每章的最后一节是历史注记,介绍一些与该章内容有关的数学史知识;章末有习题.

# 目　　录

第一部分　一元微积分 …………………………………………… (1)
第一章　一元微分学 ……………………………………………… (1)
§1 反函数、隐函数求导 ……………………………………… (1)
§2 中值定理 ……………………………………………………… (9)
§3 洛必达法则 …………………………………………………… (15)
§4 函数的极值 …………………………………………………… (21)
§5 导数的实际应用 ……………………………………………… (30)
§6 历史注记:一元微分学 ……………………………………… (34)
习题 1.1 …………………………………………………………… (37)
第二章　一元积分学 ……………………………………………… (40)
§1 不定积分的计算(2) ………………………………………… (40)
§2 定积分的计算(2) …………………………………………… (50)
§3 定积分的应用 ………………………………………………… (53)
§4 反常积分 ……………………………………………………… (58)
§5 定积分在经济领域中的应用 ………………………………… (65)
§6 历史注记:一元积分学 ……………………………………… (70)
习题 1.2 …………………………………………………………… (75)
第三章　常微分方程简介 ………………………………………… (79)
§1 基本概念 ……………………………………………………… (79)
§2 分离变量法 …………………………………………………… (82)
§3 初等变换法 …………………………………………………… (88)
§4 常微分方程的简单应用 ……………………………………… (92)
§5 历史注记:常微分方程 ……………………………………… (95)
习题 1.3 …………………………………………………………… (97)
第四章　无穷级数 ………………………………………………… (99)
§1 基本概念 ……………………………………………………… (99)

§2 数项级数 …… (103)
§3 幂级数 …… (115)
§4 初等函数的幂级数展开式 …… (121)
§5 幂级数的意义及其应用 …… (129)
§6 历史注记:无穷级数 …… (134)
习题 1.4 …… (141)
**第二部分　线性代数** …… (144)
**第一章　$n$ 阶行列式** …… (144)
§1 $n$ 阶行列式的定义 …… (144)
§2 $n$ 阶行列式的性质和计算 …… (151)
§3 历史注记:行列式 …… (156)
习题 2.1 …… (157)
**第二章　矩阵及其运算** …… (159)
§1 矩阵的逆 …… (159)
§2 分块矩阵 …… (165)
§3 矩阵的初等变换 …… (175)
§4 矩阵的秩 …… (183)
习题 2.2 …… (184)
**第三章　线性方程组** …… (187)
§1 有解的判别定理 …… (187)
§2 解的公式 …… (190)
§3 初等变换解法 …… (193)
习题 2.3 …… (199)
**第三部分　初等概率论** …… (202)
**第一章　随机变量及其分布** …… (202)
§1 随机变量 …… (202)
§2 离散型随机变量 …… (204)
§3 连续型随机变量 …… (208)
§4 有关概率的计算 …… (211)
§5 分布函数与随机变量函数的分布 …… (214)
§6 历史注记:概率论的起源与发展 …… (222)
习题 3.1 …… (227)

**第二章　随机变量的数字特征** …………………………………………… (230)
§1 数学期望 ………………………………………………………………… (230)
§2 随机变量函数的数学期望 ……………………………………………… (235)
§3 方差 ……………………………………………………………………… (237)
§4 历史注记:随机变量的数字特征 ……………………………………… (245)
习题 3.2 …………………………………………………………………… (246)
**第四部分　一元统计分析初步** ……………………………………………… (248)
**第一章　参数估计** ………………………………………………………… (248)
§1 点估计 …………………………………………………………………… (248)
§2 区间估计 ………………………………………………………………… (256)
§3 历史注记:参数估计 …………………………………………………… (266)
习题 4.1 …………………………………………………………………… (271)
**第二章　假设检验** ………………………………………………………… (273)
§1 基本概念 ………………………………………………………………… (273)
§2 期望的假设检验 ………………………………………………………… (276)
§3 方差的假设检验 ………………………………………………………… (280)
§4 历史注记:假设检验 …………………………………………………… (283)
习题 4.2 …………………………………………………………………… (284)
**习题答案** …………………………………………………………………… (285)
**附表 1**　正态分布数值表 ………………………………………………… (295)
**附表 2**　$t$ 分布临界值表 ………………………………………………… (296)
**附表 3**　$\chi^2$ 分布临界值表 …………………………………………… (297)
**后记** ………………………………………………………………………… (298)

# 第一部分　一元微积分

在第一册，我们已经初步地学习了有关一元微积分的知识，如函数、极限、导数、不定积分及定积分的一些基本概念及其应用.在这一册，我们将进一步地讨论和研究一元微积分的知识，包括隐函数和反函数求导，中值定理和洛必达法则，函数的极值及其在经济领域的应用；不定积分的第二换元法和分部积分法；定积分的换元法和分部积分法以及定积分和反常积分在几何问题及经济领域中的应用.除此之外，我们将介绍常微分方程和无穷级数的一些基本概念及其在实际问题中的应用.

## 第一章　一元微分学

本章将在第一册学习导数概念的基础上，继续深入讨论和研究导数的概念，如隐函数与反函数的导数，中值定理及其应用，函数的极值等.最后我们将进一步介绍导数在实际问题中，如在日常生活和经济领域中的应用.

### §1　反函数、隐函数求导

在这一节，我们将讨论反函数、隐函数求导法及对数求导法.

## 1.1 反函数的导数

先给出求反函数的导数的公式：

**定理** 若函数 $y=f(x)$在某区间内单调、可导，且 $f'(x)\neq 0$，则其反函数 $x=\varphi(y)$在相应区间内也可导，且

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)},$$

也可写成

$$x_y'=\frac{1}{y_x'} \qquad (y_x'\neq 0).$$

**证明** 因为 $y=f(x)$与 $x=\varphi(y)$互为反函数，故可将 $x$ 看成中间变量，有复合函数

$$y=f[\varphi(y)].$$

两边对 $y$ 求导：

$$1=f'[\varphi(y)]\cdot\varphi'(y),$$

解出 $\varphi'(y)$，则有

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'[\varphi(y)]}=\frac{1}{f'(x)}.$$

上述定理告诉我们：在定理的条件下，反函数的导数，等于直接函数的导数的倒数.

**例1** $y=\arctan x$，求 $y'$.

**解** 由于 $y=\arctan x$ 是 $x=\tan y\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$的反函数，函数 $x=\tan y$ 在该区间内可导、单调，且

$$x'_y=(\tan y)'=\frac{1}{\cos^2 y}>0.$$

由上述定理，在相应的区间$(-\infty,+\infty)$内，$y_x'$也存在，且 $y_x'=\frac{1}{x_y'}$，也就是

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \cos^2 y$$
$$= \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

故

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

同理我们可以求得：

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

**例2** $y = \arcsin x(|x|<1)$，求 $y'$.

**解** $y = \arcsin x$ 是 $x = \sin y\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数，由于 $x = \sin y$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调、可导，且

$$x'_y = (\sin y)' = \cos y > 0,$$

由上述定理，当 $x \in (-1,1)$ 时，$y'_x$ 也存在，且

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

因此，

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}},$$

即：

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1<x<1).$$

同理：

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1<x<1).$$

### 1.2 隐函数的导数

前面我们介绍的求导法则都是针对显函数的.所谓显函数就是因变量 $y$ 已经写成自变量 $x$ 的明显表达式的函数,即形如

$$y=f(x),x\in X$$

的函数.但在很多实际问题中,我们所遇到的 $x$ 与 $y$ 之间的函数关系是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的.例如,函数 $y=(3x-7)/2$ 可由方程 $3x-2y=7$ 确定.通常我们把未解出因变量的方程 $F(x,y)=0$ 所确定的 $x$ 与 $y$ 之间的函数关系称为隐函数.

给出一个隐函数,如何求它的导数呢?是不是需要把它化成显函数以后再求导数呢?这是不必要的.我们注意到将方程 $F(x,y)=0$所确定的函数 $y=f(x)$代入方程后,则方程一定成为恒等式,即 $F(x,f(x))\equiv 0$.因此,我们把 $F(x,y)=0$ 中的 $y$ 看成是由方程所确定的隐函数时,方程 $F(x,y)=0$ 就成为一个恒等式,这时我们利用复合函数的求导法则对方程直接求导,即可解出 $y'_x$.

**例3** 求由方程 $x^2+y^2=R^2$ 所确定的函数 $y=f(x)$的导数.

**解** 将方程 $x^2+y^2=R^2$ 的两边同时对 $x$ 求导,注意到 $y^2$ 是 $x$ 的复合函数,有

$$2x+2y\cdot y'_x=0.$$

由此解出

$$y'_x=-\frac{x}{y}.$$

注意,$-x/y$ 中的 $y$ 仍是 $x$ 的函数,不必把它写成 $f(x)$的形式.如果我们从圆周方程 $x^2+y^2=R^2$ 中解出显函数后,再求导数,其结果是一样的.请读者自己验证.

**例4** 求由方程 $y-x-\frac{1}{2}\sin y=0$ 所确定的函数 $y=f(x)$的

导数.

**解** 在方程 $y-x-\frac{1}{2}\sin y=0$ 的两边同时对 $x$ 求导,得到

$$y_x'-1-\frac{1}{2}\cos y\cdot y_x'=0,$$

由此解出

$$y_x'=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos y}.$$

由此可见,尽管由这个隐函数方程得不到显函数的表达式,但我们仍可以算出它的导数.

**例5** 求曲线 $y^3+y^2=2x$ 在(1,1)点的切线方程.

**解** 首先求出切线的斜率.根据隐函数求导法则,在方程 $y^3+y^2=2x$两边同时对 $x$ 求导,有

$$3y^2\cdot y_x'+2y\cdot y_x'=2,$$

即

$$y_x'(3y^2+2y)=2.$$

于是

$$y_x'=\frac{2}{3y^2+2y}.$$

所以切线在(1,1)点处的斜率

$$k=y_x'\big|_{(1,1)}=\frac{2}{5}.$$

再由直线方程的点斜式,得到切线方程为

$$y-1=\frac{2}{5}(x-1),$$

即

$$2x-5y+3=0.$$

### 1.3 对数求导法

在初等数学中，利用对数运算，可将乘除法变成加减法，乘方、开方变成乘除法，从而使运算简化.同样，在求导运算中，用取对数的方法，也可以使一些运算得到简化.如在涉及乘除、乘方、开方的混合运算和幂指函数的求导运算中，可采用取对数求导法.

取对数求导法分两步进行：

1) 在等式两边取自然对数；

2) 利用复合函数求导法则，在等式两边对 $x$ 求导.

**例6** 求 $y=\sqrt{\frac{(x-3)(x-5)}{(x-1)(x-2)}}$ $(x>5)$ 的导数.

**解** 1) 两边取自然对数：

$$\begin{aligned}\ln y&=\ln\sqrt{\frac{(x-3)(x-5)}{(x-1)(x-2)}}\\&=\frac{1}{2}[\ln(x-3)+\ln(x-5)-\ln(x-1)-\ln(x-2)].\end{aligned}$$

2) 两边对 $x$ 求导：

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}\right]$$

$$\begin{aligned}y'&=\frac{1}{2}y\left[\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}\right]\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-3)(x-5)}{(x-1)(x-2)}}\left[\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}\right].\end{aligned}$$

**例7** $y=x^x(x>0)$，求 $y'$.

**解** 1) 两边取自然对数：

$$\ln y=\ln x^x=x\ln x.$$

2) 两边对 $x$ 求导：

$$\frac{y'}{y}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x},$$

即

$$y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

**例8** 求函数 $y = x^{\sin x}$的导数.

**解** 1）两边取自然对数：

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x.$$

2）两边对 $x$ 求导：

$$\frac{y'_x}{y} = \frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x,$$

即

$$\begin{aligned} y'_x &= y\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x\right) \\ &= x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x\right) \\ &= \sin x \cdot x^{\sin x - 1} + x^{\sin x}\ln x \cdot \cos x. \end{aligned}$$

**例9** 求函数 $y = (1 + x)^x$ 的导数.

**解** 先把函数 $y = (1 + x)^x$ 化成指数形式

$$y = (1 + x)^x = e^{\ln(1+x)^x} = e^{x\ln(1+x)}.$$

根据指数函数求导公式及复合函数求导法则，得

$$\begin{aligned} y'_x &= e^{x\ln(1+x)}[x\ln(1 + x)]' \\ &= (1 + x)^x\left[\frac{x}{1 + x} + \ln(1 + x)\right]. \end{aligned}$$

上式又可以写成

$$y'_x = x(1 + x)^{x-1} + (1 + x)^x\ln(1 + x).$$

从上面的例 9 中可以看到，对形如$[f(x)]^{g(x)}$的幂指函数也可以不用在等式的两边取对数后再求导的方法，而采用先化成指数函数 $y = e^{g(x)\ln f(x)}$的形式后再求导数的方法.

对于一般的幂指函数 $y = [f(x)]^{g(x)}$有下面的求导公式：

$$([f(x)]^{g(x)})' = g(x)[f(x)]^{g(x)-1} \cdot f'(x)$$

$$+[f(x)]^{g(x)}\ln f(x)\cdot g'(x).$$

**证明** 1）两边取自然对数：

$$\ln y = g(x)\ln f(x).$$

2）两边对 $x$ 求导：

$$\frac{y_x'}{y} = g(x)\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) + \ln f(x)\cdot g'(x).$$

解出

$$\begin{aligned} y_x' &= y\left(g(x)\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) + \ln f(x)\cdot g'(x)\right) \\ &= [f(x)]^{g(x)}\left(g(x)\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) + \ln f(x)\cdot g'(x)\right) \\ &= g(x)[f(x)]^{g(x)-1}f'(x) + [f(x)]^{g(x)}\ln f(x)\cdot g'(x). \end{aligned}$$

**例 10** 求函数 $y=(\ln x)^x$ 的导数.

**解** 由幂指函数求导公式，立即得到

$$\begin{aligned} [(\ln x)^x]' &= x(\ln x)^{x-1}(\ln x)' + (\ln x)^x\cdot(\ln\ln x)\cdot x' \\ &= x(\ln x)^{x-1}\frac{1}{x} + (\ln x)^x\ln\ln x \\ &= (\ln x)^x\left(\frac{1}{\ln x} + \ln\ln x\right). \end{aligned}$$

为了便于查阅，现将基本初等函数的求导公式列表如下：

1. $(C)'=0.$
2. $(x^a)' = ax^{a-1}.$
3. $(a^x)' = a^x\ln a, (e^x)' = e^x.$
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}, (\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$
5. $(\sin x)' = \cos x.$
6. $(\cos x)' = -\sin x.$
7. $(\tan x)' = \sec^2 x.$
8. $(\cot x)' = -\mathrm{cosec}^2 x.$

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

12. $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

有了这些公式,再利用四则运算及复合函数与隐函数的求导法则就可以把所有的初等函数的导数求出来.求导的关键是要准确地、熟练地和灵活地运用这些公式和法则.

## §2 中值定理

微分学中值定理包括罗尔(Rolle)定理、拉格朗日(Lagrange)定理和柯西(Cauchy)定理,它们是微分学的基本定理.本节将介绍这几个定理及其应用.

在证明罗尔定理之前,我们先介绍一下极限的两个不等式,即极限的保号性质,它们在证明罗尔定理,及在证明极值的充分必要条件时要用到.

极限的保号性质:

1) 如果 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$),而 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,则必有 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$);

2) 如果 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,而 $A>0$(或 $A<0$),则必存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时,有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

上述保号性质证明从略.

**罗尔定理** 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在开区间 $(a,b)$ 内可导,并且 $f(a)=f(b)$,则在开区间 $(a,b)$ 内至少存在一点 $x_0$,使得 $f'(x_0)=0$.

**证明** 因为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是连续的，所以根据闭区间上连续函数的性质，函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一定取得最大值 $M$ 和最小值 $m$.

下面分两种情形来讨论：

(1) 设 $M=m$. 因为函数值 $f(x)$ 是在其最大值 $M$ 与最小值 $m$ 之间的，所以函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒等于常数 $M$. 于是在 $[a,b]$ 上，对任意的 $x$，有 $f'(x)=0$. 这时 $x_0$ 可以取 $(a,b)$ 中的任意一点.

(2) 设 $M\neq m$. 那么在 $M,m$ 之中至少有一个不是区间 $[a,b]$ 的端点的函数值（否则，$f(a)=f(b)=M=m$，这与 $M\neq m$ 相矛盾）. 不妨设 $M\neq f(a)$，并设 $x_0$ 为 $(a,b)$ 内的一点，使得 $f(x_0)=M$.

由于函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处达到最大值，所以只要 $x_0+\Delta x$ 在 $(a,b)$ 内，便有

$$f(x_0+\Delta x)\leqslant f(x_0),$$

即

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\leqslant 0.$$

从而当 $\Delta x>0$ 时，有

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0;$$

当 $\Delta x<0$ 时，有

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

已知 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导，根据导数定义与上面给出的极限保号性质，便得

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0,$$