



代数学辞典

樊 恽 钱吉林 岑嘉评 主编
刘 恒 穆汉林 华中师范大学出版社

代 数 学 辞 典

主 编

樊 恽 钱吉林 岑嘉评
刘 恒 穆汉林

华中师范大学出版社



华中师范大学出版社

代数学辞典

樊 恽 钱吉林 岑嘉评
刘 恒 穆汉林 主 编

(鄂)新登字 11 号

图书在版编目(CIP)数据

代数学辞典/樊恽、钱吉林等主编

—武汉:华中师范大学出版社,1994.12

ISBN 7-5622-1412-3

I. 代…

I. ①樊…②钱…

Ⅱ. 代数—辞典

N. O151

代数学辞典

© 樊恽、钱吉林等主编

华中师范大学出版社出版发行

(武昌桂子山 邮编:430070)

新华书店湖北发行所经销

湖北省新华印刷厂印刷

责任编辑:伍家德 郑学群 封面设计:蔡跃华 督印:吴小岸

责任校对:崔毅然 罗少琳 张钟

开本:850×1168 1/32 印张:41 字数:1020千字

版次:1994年12月第1版 1996年2月第2次印刷

印数:3 001—6 000 定价:58.00元

本书如有印装质量问题,可向承印厂调换。

熱烈祝賀《代數學辭典》隆重出版

新的代數學辭典，將成為

學校同學和廣大數學工

作者的良師益友。

深圳科能達電子有限公司

董事長 王譯文 九四年二月八日

《代数学辞典》编辑委员会

主 编 樊 恽 钱吉林 岑嘉评 刘 恒 穆汉林
副主编 张茂祥 彭勇行 陶跃钢 徐邦腾 刘合国
陈昭木 魏宗宣 张惠兰 黄伟策 谢禄臣
叶启云 毛纲源 张闰明

编 委 (按姓氏笔画为序)

王尊全	毛纲源	冯兴山	白方湘	左可正	叶启云
伍 毅	刘 恒	刘丁酉	刘先忠	刘合国	刘红美
刘初生	刘康泽	孙晓梅	李 政	李德宜	岑嘉评
张 琳	张茂祥	张闰明	张惠兰	陈昭木	陈裕群
杨 云	杨 谦	吴同泽	汪 萍	何本喜	邹大庸
宋占奎	沈 竹	明平华	柯 云	徐千里	徐邦腾
陶跃钢	钱吉林	柴国庆	贺志农	黄伟策	黄德荣
曹喜望	彭勇行	彭瑞华	喻国华	童丽珍	谢开端
谢禄臣	谢鸿材	詹前涌	樊 恽	潘清芳	穆汉林
魏宗宣	欧阳光				

序

大学代数(高等代数和近世代数)无疑是高等数学教育中最基本最重要的课程之一。这本辞典就是为大学代数教育服务的。

大学代数是介绍数(以及同余数)、多项式、矩阵(或线性变换)、置换和它们的四则运算,以及以之为背景的群、环、域等代数系统。经过长期的教学改革和积累,大学代数(特别是高等代数部分)的内容似乎已经定型了,这本辞典就是以公认的大学代数内容为主,适当地略有补充而编写成的:书中除了介绍大学代数的基本概念和基本理论、一些富有启发性的练习、国内外研究生的入学试题和大学生数学竞赛题,还把某些涉及大学代数内容的论文分解为若干个条目介绍给读者。这最后一类内容该能对数学系高年级学生写论文有一定的参考价值。如果说高等代数的习题集已有许多,那么本辞典中涉及近世代数的习题有一千多条该是它的一个特色。

虽说大学代数的内容似乎已经标准化了,但仍可看到一些试探性地引进新的、非传统的内容,如多重线性代数、线性群以及群表示论等。我想域上多元多项式环中关于一个理想的 Gröbner 基的内容也应是大学代数中该引进的一个新内容。它是本世纪 60 年代中出现而从 70 年代以来迅速发展的计算机代数(Computer Algebra)或计算交换代数和代数几何的出发点和基石。在一元多项式理论中有起重要作用的欧氏(带余除法)算法,在线性方程组理论中有起中心作用的高斯(消元法)算法。长期以来,我们不知道在多元多项式理论中什么东西是上述两种算法的相应物,也能在多元多项式理论中起相应的作用。现在我们知道了,它就是 Gröbner

基(或 Buchberger 算法)。Gröbner 基(或 Buchberger 算法)是上述两种算法在多元多项式理论中的一个推广,在多元多项式理论中起着与它们类似的作用。它可以看作是回答下述自然而重要问题的一个算法:在域 F 上多元多项式环 $A = F[x_1, \dots, x_n]$ 中给定有限个多元多项式 f_1, \dots, f_m 而 $I = (f_1, \dots, f_m)$ 是它们生成的理想,任取定 A 中一多元多项式 g , 能否找到一个算法,它能判定 g 在理想 I 中或 g 不在理想 I 中,即判定是否有

$$g = g_1 f_1 + \dots + g_m f_m, \quad g_i \in A, i = 1, 2, \dots, m.$$

在多元多项式理论中,Gröbner 基是较例如对称多项式理论更为基本的理论,而关于它的概念的深度和证明的难度也是和大学代数在同一水平上的。这样,Gröbner 基似应在大学代数中找到它自己的位置。近年来已有两本新书(参看[1],[2])系统介绍这方面的内容,这会给试探在大学代数中引入此内容的教师,提供很多方便。也该还有其它一些设想来更新大学代数的内容和讲法。我想在这本为当前大学代数教学服务的辞典中,提及今后大学代数教改问题是自然的和必要的。

这本辞典是许多位数学教育工作者多年来教学经验的结晶,是服务于大学代数教学的一本很有价值的参考书,在此我衷心地向诸位编者代数教育所作出的努力表示感谢和敬佩。

应樊恽教授、钱吉林教授和詹前涌先生等编者之邀写此短文,是为序。

刘绍学

1994年5月写于北京师范大学

参考文献

- [1] Cox, D., Little, J., and O'Shea, D., Ideals, Varieties, and Algorithms. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. (1992) Springer-Verlag, New

York.

[2] Becker, T. , Weispfenning, V. (In Cooperation with Heinz Kredel), Gröbner Bases. A Computational Approach to Commutative Algebra. (1993) Springer-Verlag, New York.

前 言

代数学是数学的一个重要的基础的分支。随着科学技术的发展,代数学的重要性日益显示出来,它的许多内容已成为大专院校诸多专业的基础课程。越来越多的大专院校师生及科技人员迫切希望有一部以题解为中心的代数学辞典问世。为此,我们邀集了湖北、湖南、广东、福建、江西、海南、四川、河南等省以及香港地区的高校部分教师编写了这部书。

鉴于近几十年来代数的教学积累了许多丰富经验,国内外文献资料提供了众多题材,使得我们可能广泛地吸取精华,编纂一部以高等代数与抽象代数为内容的代数学辞典。我们在编纂时,注重了题材的广泛性和代表性,筛选收录了国内外代数教科书中富有启发性的题目、国内外大学生数学竞赛及研究生入学试题,还酌收了近期的代数论文的部分内容;注重了题材的双向归纳:一是对各类问题作了精选与归纳,二是对同一问题的不同解法作了归纳,以使读者能举一反三,触类旁通。此外,在有些条目的解答之末,酌给注释,试图标明有关解题规律的总结和题目意义的推广。

由于我们水平有限,加之时间仓促,疏漏和不妥之处在所难免,恳望读者和专家不吝赐教。

编者

1994年6月

凡 例

一、 本辞典共收录高等代数与抽象代数辞目三千余条。辞目内容为：现行教科书里富有启发性的习题；部分国内外研究生入学试题和大学生数学竞赛试题；由部分代数论文分解而来的题目；部分基本概念与基本定理作为辞条不加证明地列出。

二、 辞目按学科知识体系分类编排。正文前刊有按类编制的目录。

三、 本辞典所使用的记号及术语均是标准的。同一概念有多个常用称法时，则一并使用，譬如：可逆矩阵，非奇异矩阵，满秩矩阵。

四、 有些条目的解答之末酌加释注，标明有关解题规律的总结和题目意义的推广。

五、 条目解答一般是一条一解，部分条目有其它好的解法时，则一条多解，分别列出。

六、 本辞典中已收录条目的结论，在其它条目中用到时，一般不再重复，只注明“见第×条”。

目 录

第一章 基础知识	(1)
一、数域	(1)
二、映射	(6)
三、二元运算	(15)
第二章 矩阵的运算	(21)
一、矩阵的加法、减法、乘法	(21)
二、矩阵乘法可交换的条件	(27)
三、矩阵的幂	(31)
四、矩阵的转置与共轭	(40)
五、矩阵的逆和伴随矩阵	(45)
六、矩阵的迹	(63)
七、矩阵的直积	(65)
第三章 矩阵的三种等价关系	(70)
一、关系	(70)
二、等价关系	(72)
三、等价类	(75)
四、剩余类	(77)
五、矩阵的初等变换与初等矩阵	(77)
六、矩阵的第一种等价关系——等价	(79)
七、分块矩阵的初等变换	(85)
八、矩阵的第二种等价关系——合同	(87)
九、矩阵的第三种等价关系——相似	(88)

第四章 矩阵的秩	(90)
一、 定义	(90)
二、 求法	(91)
三、 矩阵的运算及秩的变化	(96)
四、 分块矩阵的秩.....	(107)
五、 降阶公式.....	(113)
第五章 线性方程组	(117)
一、 克莱姆法则.....	(117)
二、 线性方程组的同解.....	(125)
三、 消元法.....	(126)
四、 迭代法介绍.....	(135)
五、 齐次线性方程组的解空间.....	(141)
六、 非齐次线性方程组解的结构.....	(150)
七、 矩阵方程介绍.....	(160)
八、 线性方程组的反问题.....	(163)
第六章 行列式	(166)
一、 定义.....	(166)
二、 性质与公式.....	(172)
三、 化三角形.....	(177)
四、 范德蒙行列式.....	(184)
五、 降价法.....	(192)
六、 拆成行列式之积(或和).....	(205)
七、 作辅助行列式.....	(211)
八、 递推法.....	(212)
九、 数学归纳法.....	(226)
十、 主对角严格占优.....	(227)
十一、 降阶定理.....	(228)

第七章 多项式的运算与因式分解	(232)
一、多项式的概念和运算	(232)
二、整除及带余除法	(240)
三、最大公因式	(254)
四、互素	(259)
五、不可约多项式与因式分解	(276)
第八章 多项式的根	(290)
一、多项式的根	(290)
二、单位根	(295)
三、有理根	(299)
四、根与系数的关系	(302)
五、三次与四次多项式的根	(307)
六、实系数多项式的根	(310)
七、斯图姆定理	(316)
八、两个多项式的公共根	(321)
第九章 多元多项式	(327)
一、定义	(327)
二、对称多项式	(329)
三、二次型的定义	(336)
四、二次型标准形	(338)
五、实二次型合同的充要条件	(349)
六、正定与半正定二次型(矩阵)	(360)
第十章 若当标准形	(380)
一、 λ -矩阵	(380)
二、 λ -矩阵的等价	(383)
三、行列式因子与不变因子	(384)
四、方阵的初等因子	(390)

五、 矩阵相似的条件	(393)
六、 最小多项式	(396)
七、 若当标准形	(404)
八、 方阵与对角阵相似的条件	(422)
九、 两个矩阵同时相似于对角矩阵	(431)
第十一章 特征值与特征向量	(434)
一、 定义与求法	(434)
二、 三对角矩阵的特征值	(454)
三、 矩阵多项式的特征值	(457)
四、 哈密尔顿—凯莱定理	(465)
五、 特征子空间	(473)
六、 圆盘定理	(478)
七、 特征值的界	(483)
八、 广义特征值	(488)
第十二章 几种特殊矩阵	(490)
一、 对角矩阵与准对角矩阵	(490)
二、 三角矩阵	(492)
三、 反对称矩阵	(496)
四、 幂等矩阵	(499)
五、 幂么矩阵	(503)
六、 幂零矩阵	(507)
七、 循环矩阵与反循环矩阵	(510)
八、 正规矩阵	(521)
九、 酉矩阵	(526)
十、 正交矩阵	(530)
十一、 厄米特矩阵	(541)
十二、 亚正定矩阵	(545)
十三、 置换矩阵	(549)

十四、哈达玛(Hadamard)矩阵	(552)
第十三章 矩阵范数	(555)
一、向量范数	(555)
二、矩阵范数	(558)
第十四章 矩阵的稳定性	(565)
一、矩阵的稳定性	(565)
二、多项式的稳定性	(567)
第十五章 矩阵分解	(577)
一、定义	(577)
二、积因子分解	(578)
三、和因子分解	(594)
第十六章 广义逆、矩阵方程、不等式	(597)
一、减号广义逆	(597)
二、加号广义逆	(600)
三、线性方程组的解的公式	(603)
四、矩阵方程	(604)
五、凸函数	(607)
六、几个著名不等式	(612)
七、极值	(615)
八、实对称矩阵的特征值的表示	(617)
第十七章 非负矩阵与 M 矩阵	(622)
一、定义	(622)
二、非负矩阵的谱	(625)
三、正矩阵	(630)
四、M 矩阵	(634)
第十八章 矩阵分析	(641)
一、极限	(641)

二、 矩阵级数	(643)
三、 几个常用的矩阵级数	(648)
四、 矩阵的微分	(650)
五、 矩阵的积分	(653)
第十九章 线性空间	(654)
一、 定义与性质	(654)
二、 向量的线性相关性	(659)
三、 基、维数与坐标	(674)
四、 线性子空间	(687)
五、 线性子空间的交、和	(693)
六、 直和	(706)
七、 欧氏空间	(713)
八、 酉空间(U 空间)	(726)
九、 线性空间的同态与同构	(730)
第二十章 线性变换	(734)
一、 定义	(734)
二、 常见的线性变换	(735)
三、 运算	(737)
四、 线性变换的矩阵	(741)
五、 核和值域(象)	(760)
六、 正交变换	(774)
七、 酉变换	(782)
八、 对称变换	(784)
九、 反对称变换	(787)
十、 共轭变换	(788)
十一、 幂零变换	(790)
十二、 幂等变换	(792)
十三、 对合变换	(793)