



高等学校教材

材料力学

(第二版)

下册

天津大学材料力学教研室 编

苏翼林 主编

高等教育出版社

高等学校教材

材 料 力 学

(第二版)

下 册

天津大学材料力学教研室 编

苏翼林 主编

高等教育出版社

本书是根据目前我国高等工科院校“材料力学”课程的教学基本要求进行修订的。

本书分上、下两册。上册包括绪论、拉伸与压缩、材料的力学性质、拉伸(压缩)超静定问题、剪切、扭转、弯曲、应力与应变分析、强度理论、组合变形及平面图形的几何性质。下册包括能量方法、超静定系统、动载荷、交变应力、压杆稳定、厚壁筒、考虑材料塑性时的强度计算及断裂力学简介。

本书可作为高等工科院校和职工大学机械类专业材料力学课程的教材,也可供机械工程技术人員参考。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学 下册/苏翼林主编;天津大学材料力学教研室编. —2版. —北京:高等教育出版社,1988.4(2001重印)
高等学校教材
ISBN 7-04-000902-1

I. 材… I. ①苏… ②天… III. 工程材料-材料力学-高等学校-教材 IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 00116 号

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街55号

邮政编码 100009

电 话 010—64054588

传 真 010—64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 河北省香河县印刷厂

版 次 1980年9月第1版

开 本 787×1092 1/16

1988年4月第2版

印 张 11

印 次 2001年6月第12次印刷

字 数 252 000

定 价 9.40 元

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

符号表(下册)

符号	意 义	常用单位	符号	意 义	常用单位
α	应力强度因子表达式中的形状因子	无量纲	a	穿透裂纹长度	mm
β	表面状态系数, 强迫振动的增长系数	无量纲	k_d	动荷系数	无量纲
δ, Δ	广义位移(线位移或角位移)	mm或rad	k_σ, k_τ	有效(应力)集中系数	无量纲
Δ	半径过盈(公盈)	mm	K_σ, K_τ	疲劳综合影响系数	无量纲
δ_{ij}	影响系数	mm/N, mm/Nm, rad/N, rad/Nm	K_{I0}	平面应变断裂韧度	MNm ^{-3/2}
δ_{ir}	由载荷在 <i>i</i> 点沿 <i>i</i> 方向引起的位移	mm或rad	M', M'_n	单位力引起的弯矩, 扭矩	Nm, kNm
$\bar{y}$	虚位移	mm	N'	单位力引起的轴力	N, kN
$\bar{\theta}$	虚转角	rad	$(M_n)_{ix}$	圆轴极限扭矩	Nm, kNm
δ_1	静变形	mm, rad	M_{ix}	极限弯矩	Nm, kNm
δ_1	动变形	mm, rad	N	应力循环次数, 疲劳寿命	无量纲
θ	角位移	rad	N_0	循环基数	无量纲
ε	尺寸系数	无量纲	n_σ, n_τ	交变应力下构件工作安全系数	无量纲
$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$	径向应变, 环向应变	无量纲	n_w	稳定安全系数	无量纲
ε_s	屈服开始时的应变	无量纲	n_k	断裂安全系数	无量纲
σ_1	静应力	MPa	P_{1j}	临界力	N, kN
σ_d	动应力	MPa	P_{1x}	极限载荷	N, kN
λ	压杆的柔度	无量纲	r	向径	mm
μ	压杆长度系数	无量纲	R	循环特征	无量纲
γ	重度	N/m ³ , kN/m ³	t	时间	s
σ_r, σ_θ	径向应力, 环向应力	MPa	T_0	动能	J
$\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$	交变应力中的最大应力, 最小应力	MPa	u	径向位移	mm
σ_m, σ_a	交变应力中的平均应力, 应力幅度	MPa	W_0	外力虚功	J
σ_B	循环特征 <i>R</i> 时的疲劳极限	MPa	W_1	内力虚功(虚变形功)	J
σ_{-1}, τ_{-1}	对称循环时的疲劳极限	MPa	W_s	塑性抗弯截面模量	mm ³
σ_{1j}	临界应力	MPa	X_1, X_2, X_3	多余反力或反力偶	N, kN或 Nm, kNm
φ	压杆折减系数	无量纲			
ψ_σ, ψ_τ	交变应力下的材料常数	无量纲			
Ω	载荷弯矩图面积	Nm ² , kNm ²			
a, b, c	厚壁筒半径	mm			
A	振幅	mm			
a, c	椭圆形裂纹的短半轴, 长半轴	mm			

注: 1. 上册中的字符在下册中仍继续采用, 不再列出。

2. 下册中有的下标字符已按国标规定排正体。

目 录

符号表(下册).....1	§ 15-7 扭弯联合下的疲劳强度93
第十二章 变形能法.....1	§ 15-8 提高抵抗疲劳能力的措施96
§ 12-1 杆件基本变形的变形能1	习题98
§ 12-2 变形能的通式3	第十六章 压杆稳定.....102
§ 12-3 单位力法求位移4	§ 16-1 稳定平衡与不稳定平衡.....102
§ 12-4 图形互乘法10	§ 16-2 两端铰支的压杆的临界力103
* § 12-5 曲杆变形13	§ 16-3 杆端约束的影响105
§ 12-6 互等定理14	§ 16-4 临界应力图107
* § 12-7 卡氏定理16	§ 16-5 压杆稳定校核108
§ 12-8 虚功原理18	§ 16-6 折减系数法111
* § 12-9 最小势能原理22	§ 16-7 提高压杆稳定性的措施112
习题25	§ 16-8 能量法求临界力114
第十三章 超静定系统.....35	* § 16-9 纵横弯曲116
§ 13-1 力法的基本概念35	习题119
§ 13-2 力法的正则方程39	第十七章 厚壁筒.....128
* § 13-3 连续梁42	§ 17-1 厚壁筒的基本方程128
§ 13-4 内力超静定系统46	§ 17-2 厚壁筒的位移和应力130
* § 13-5 超静定桁架49	§ 17-3 组合筒134
* § 13-6 用卡氏定理理解超静定问题52	习题136
§ 13-7 支座沉降影响54	第十八章 考虑材料塑性时的强度计算.....139
习题.....55	§ 18-1 引言139
第十四章 动载荷.....62	§ 18-2 金属材料的塑性性质
§ 14-1 概述62	及拉伸图的简化.....139
§ 14-2 构件作变速运动时应力	§ 18-3 超静定杆系的极限载荷140
与变形的计算.....62	§ 18-4 圆轴的极限扭矩144
§ 14-3 冲击载荷下构件中的应力与变形65	§ 18-5 静定梁的极限载荷146
* § 14-4 构件作强迫振动时的应力计算71	§ 18-6 超静定梁的极限载荷150
习题74	习题153
第十五章 交变应力.....80	*第十九章 断裂力学简介156
§ 15-1 金属疲劳80	§ 19-1 概说156
§ 15-2 疲劳极限83	§ 19-2 裂纹尖端附近的应力场和位移场157
§ 15-3 疲劳极限图84	§ 19-3 应力强度因子的修正161
§ 15-4 影响疲劳极限 σ_{-1} 的因素85	§ 19-4 断裂判据及其应用162
§ 15-5 对称循环的疲劳强度校核90	习题164
§ 15-6 非对称循环的疲劳强度校核91	习题答案.....165

第十二章 变 形 能 法

当作用于弹性体的外力由零逐渐增至最后值时,弹性体的变形也由零增至其最后值,在这个过程中,外力将完成一定量的功。在弹性范围内,外力作的功在数值上等于存储于弹性体内的变形能。利用变形能法来研究材料力学中的某些问题,特别是求杆件或结构的位移,是非常有效的。本章讲述用能量方法求结构的位移。

§ 12-1 杆件基本变形的变形能

对于直杆的轴向拉伸,储存于杆件内的变形能为

$$U = \frac{N\Delta l}{2} = \frac{N^2 l}{2EA} = \frac{(\Delta l)^2 EA}{2l} \quad (12-1)$$

这里 N 为轴力, Δl 为杆的轴向伸长, l 为杆的原长, EA 为抗拉刚度。

当轴力 $N(x)$ 沿杆轴变化时,则 dx 段杆的伸长为 $N(x) \cdot dx/EA$,于是杆的变形能为

$$U = \int_l \frac{N(x)N(x)}{2EA} dx = \int_l \frac{1}{2} \frac{[N(x)]^2}{EA} dx \quad (12-2)$$

对于图 12-1 沿杆轴方向承受均匀分布力 q (单位长度的力)的直杆, $N(x) = q(l-x)$,于是

$$U = \frac{1}{2EA} \int_0^l q^2 (l-x)^2 dx = \frac{q^2 l^3}{6EA}$$

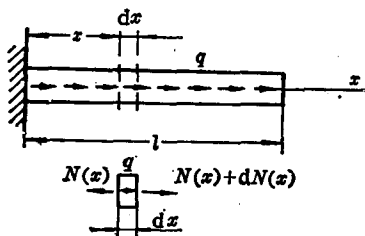


图 12-1

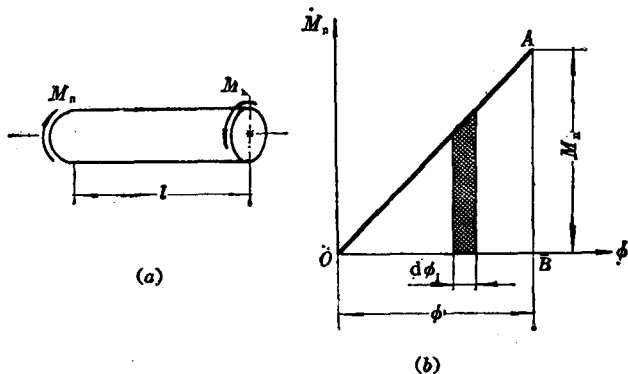


图 12-2

对于直杆扭转(图 12-2a),在弹性范围内扭角与扭矩呈线性关系,如图 12-2b 的 OA 直线。图中阴影面积表示当扭角有微小增量 $d\phi$ 时扭矩作的功,故三角形 OAB 面积表示扭矩由零逐渐增至 M_n 时所作的总功,此功即存于杆件中的扭转变形能,

$$U = \frac{M_n \phi}{2} \quad (a)$$

因为

$$\phi = \frac{M_n l}{GI_n} \quad (b)$$

所以

$$U = \frac{M_n^2 l}{2GI_n} = \frac{\phi^2 GI_n}{2l} \quad (12-3)$$

这里 l 为杆长, GI_n 为杆的抗扭刚度。如杆为圆截面, 则 I_n 应代以极惯矩 I_p ; 如为矩形截面, 则 I_n 应代以 $\beta b^3 h$ (见 § 5-9)。

当直杆承受 P_1, P_2 力而发生弯曲变形时 (图 12-3 a), 我们自梁中 x 处取出一微段 dx 。此 dx 段两侧面作用着弯矩 M 和剪力 Q , 如图 12-3 b 所示。当载荷由零逐渐增长至最后值 P_1, P_2 时, 弯矩和剪力亦由零增长至最后值 M 和 Q 。对应着弯矩, dx 段两侧面的相对转角亦由零增长至最后值 $d\theta$, 因之弯矩在相对转角上所作的功 $M \cdot d\theta/2$ 等于储存于此微段内的弯曲变形能 dU ,

$$dU = \frac{M d\theta}{2}$$

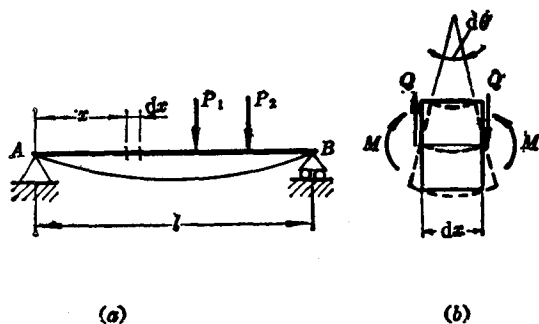


图 12-3

于是整个梁的弯曲变形能为

$$U = \int_l \frac{M d\theta}{2} \quad (12-4)$$

由第八章 § 8-3 知 $\frac{d\theta}{dx} = y'' = \frac{M}{EI}$, 即 $d\theta = \frac{M}{EI} dx$, 代入上式

$$U = \int_l \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (12-5)$$

又因 $EI y'' = M$, 代入上式得弯曲变形能的另一表达式

$$U = \int_l \frac{1}{2} EI (y'')^2 dx \quad (12-6)$$

再看图 12-3 b, 当 dx 微段左右侧面发生相对转角 $d\theta$ 时, 剪力 Q 并不做功; 但由于 Q 的作用, dx 段左右侧面要发生相对错动 (图中未画出), 剪力 Q 在相对错动上要做功, 因而 dx 段还储存有剪切变形能。在通常情况下剪切变形能远小于弯曲变形能, 因而可以略去。

由上面的讨论可看出变形能 U 是内力 (N, M_n, M) 或变形 ($\Delta l, \phi, y''$) 的二次函数。如图

12-3, 由 P_1 或 P_2 单独作用时任一截面 x 的弯矩为 M_1 或 M_2 , P_1 和 P_2 同时作用时 x 截面的弯矩 $M = M_1 + M_2$, 将此式代入 (12-5) 式, 得出

$$U = \int_1 \frac{(M_1 + M_2)^2 dx}{2EI} = \int_1 \frac{M_1^2 dx}{2EI} + \int_1 \frac{M_2^2 dx}{2EI} + \int_1 \frac{M_1 M_2 dx}{EI}$$

上式右方的第一, 二两项分别表示 P_1, P_2 单独作用时的变形能。所以 P_1, P_2 单独作用时产生的变形能之和并不等于两者同时作用时的变形能。故一般说来, 变形能不能叠加。如果构件上有两种载荷, 其中任一种载荷在另一种载荷引起的位移上如不作功, 则此两种载荷单独作用时的变形能可以叠加, 以得到同时作用时的变形能。例如一直杆同时承受弯曲和扭转, 扭矩在弯曲引起的转角 $d\theta$ 上不作功, 弯矩在扭转引起的扭角 $d\phi$ 上也不做功。故杆件的拉、弯、扭变形能可单独计算, 然后叠加求出三者同时作用的总变形能。

§ 12-2 变形能的通式

图 12-4a 示一杆系结构, 其上作用有 P_1, P_2 力和力偶 P_3 。我们可以把力和力偶统称为广义力。此结构 P_1 力作用点的位移为 δ_1 ; P_2 力作用点的位移是 CC' , 但是沿 P_2 力的分位移是 δ_2 ; 力偶 P_3 作用截面的角位移(转角)是 δ_3 。广义力 P_1, P_2, P_3 分别在位移 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 上做功, 这种与广义力做功相对应的位移可称为广义位移。假设诸广义力按某一比例由零增至最后值, 那么对应的位移也由零比例增长至最后值。我们限于讨论线性结构, 即结构上的位移与载荷之间是线性关系, 那么任一广义位移, 例如 δ_2 , 可表示为

$$\delta_2 = C_1 P_1 + C_2 P_2 + C_3 P_3 = P_2 \left(C_1 \frac{P_1}{P_2} + C_2 + C_3 \frac{P_3}{P_2} \right) \quad (a)$$

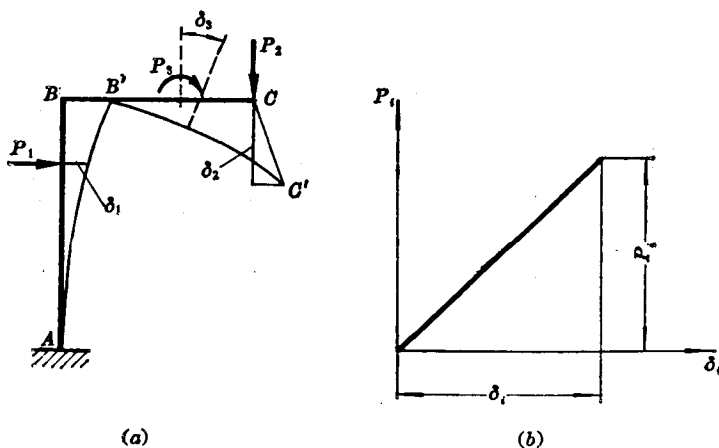


图 12-4

这里 $C_1 P_1, C_2 P_2, C_3 P_3$ 分别表示 P_1, P_2, P_3 力在 C 点引起的竖向位移, 而 C_1, C_2, C_3 是比例常数。在比例加载时 P_1/P_2 和 P_3/P_2 也是常数, 故 (a) 式表明 δ_2 与 P_2 之间的关系是线性的。同理 δ_1 与 P_1 , δ_3 与 P_3 的关系也是线性的, 如图 12-4b 所示。这时在整个加载过程中结构的变形能等于外力的功, 即

$$U = \frac{1}{2}P_1\delta_1 + \frac{1}{2}P_2\delta_2 + \frac{1}{2}P_3\delta_3 \quad (12-7)$$

上式并不包括固定端 A 处反力所作的功，因为它们作的功为零。上式称为克拉贝隆原理。这里我们强调上式只能用于线性结构。对于非线性结构(变形和载荷之间呈现非线性关系)上式不适用，因为位移 δ_i 和载荷 P_i 之间不存在线性关系时， P_i 的功不是 $P_i\delta_i/2$ 。

最后我们再讨论一下在弹性范围内变形能与加载次序无关的问题。以第八章图 8-8 的简支梁为例，中点受集中力 P ，右支座受有力偶 m 。梁中点的挠度为

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{ml^2}{16EI}$$

梁右端的转角为

$$\theta = \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{ml}{3EI}$$

根据(12-7)式，梁内变形能为

$$U = \frac{1}{2}P\delta + \frac{1}{2}m\theta = \frac{1}{EI} \left(\frac{P^2 l^3}{96} + \frac{m^2 l}{6} + \frac{mPl^2}{16} \right) \quad (b)$$

如果在这梁上先加 P 力后，再加力偶 m ，则 P 与 m 所作的功为

$$U = \frac{1}{2}P \cdot \frac{Pl^3}{48EI} + P \cdot \frac{ml^2}{16EI} + \frac{1}{2}m \cdot \frac{ml}{3EI} \quad (c)$$

上式中的第一项是 P 力由零增至最后值所作的功，第三项是力偶 m 由零增至最后值所作的功，第二项是先加于梁上的 P 力在后加的力偶 m 所引起的中点挠度 $ml^2/16EI$ 上作的功(注意此功没有因子 $1/2$)。显然(b)和(c)式是相等的。这就说明结构的变形能与加力的次序无关，而只决定于载荷的最终值。

§ 12-3 单位力法求位移

求结构位移的变形能法有许多种，其中单位力法(也称为莫尔法)比较方便，采用的也比较多。今以图 12-5a 的梁为例来说明此法求位移的原理。现在要寻求 AB 梁在 P_1, P_2 力作用下任一点 C 的竖直位移 Δ 。设沿 P_1, P_2 方向的位移分别为 δ_1, δ_2 ，载荷 P_1, P_2 分别在位移 δ_1, δ_2 上作功，因而梁储存有变形能 U ，按照(12-5)式，

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (a)$$

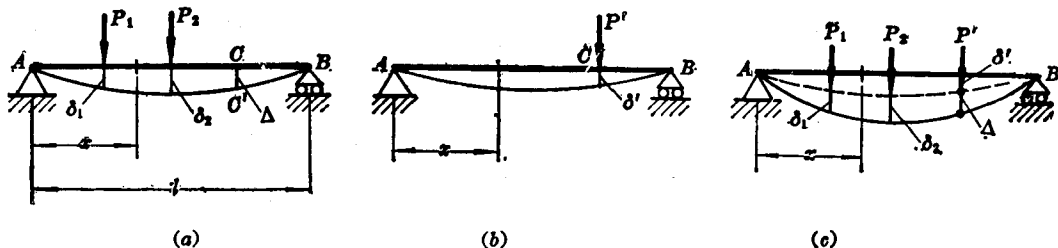


图 12-5

这里 M 是 x 截面由于载荷 P_1, P_2 引起的弯矩。积分范围是整个梁长 l ，在这里被省略了。

看图 12-5 b，我们先在 C 点沿竖直方向加一单位力 $P'=1$ ，沿单位力方向的位移是 δ' ，对于此图可写出变形能

$$U' = \int \frac{(M')^2 dx}{2EI} \quad (b)$$

这里 M' 是同一 x 截面由于单位力 P' 引起的弯矩。

再看图 12-5 c，其加力次序是先加 P' 力，后加 P_1 和 P_2 力。先加 P' 力， AB 梁发生变形（如图中虚线所示），此时梁的变形能是 U' 。在此变形的位上再加 P_1 和 P_2 力， AB 梁将进一步变形，由虚线位置变形到实线位置。在此过程中 P_1, P_2 力分别在位移 δ_1, δ_2 上作功，梁的变形能增加了 U 。此外 P' 还将完成功 $P'\Delta$ ，因为在加 P_1, P_2 力时 P' 已作用在梁上了，并且 P' 力作用点的附加位移即是图 12-5 a 的 CC' ，故最后梁的总变形能是 $U' + U + P'\Delta$ 。在最后变形位置，梁上 x 截面的弯矩是 $M + M'$ ，这里 M 对应着图 12-5 a， M' 对应着图 12-5 b。于是对于图 12-5 c 可写出

$$U' + U + P'\Delta = \int \frac{(M + M')^2 dx}{2EI} \quad (c)$$

由 (c) 式减去 (a) 式和 (b) 式，并注意 $P'=1$ ，得到

$$1 \cdot \Delta = \int \frac{M' M dx}{EI} \quad (12-8)$$

上式 M 和 M' 分别是梁上同一截面 x 由于载荷和单位力产生的弯矩，故应理解为 $M'(x)$ 和 $M(x)$ 。如上式右端积分为正，说明单位力的功 $1 \cdot \Delta$ 是正，故载荷引起的位移 Δ 和单位力的矢向一致，如积分为负，则说明 Δ 和单位力的矢向相反。(12-8) 式积分称为莫尔积分。

在上面的讨论中，当寻求 C 点挠度时，即在 C 点沿挠度方向加一单位力（图 12-5 b）。如果求图 12-5 a 上任一截面的转角，则在该截面加一单位力偶，仿照上面的推理仍得到 (12-8) 式，不过此时 Δ 代表该截面的角位移，而 M' 是单位力偶引起的弯矩。此情况下，如积分得正，说明角位移 Δ 的转向与所加的单位力偶方向相同。

对于杆系结构，如果杆件的每一截面上除弯矩外尚有轴力 N ，那么在 (12-8) 式的右方应添入对应项 $N' N dx / EA$ ，并且对组成杆系结构的所有杆件求和，则有

$$1 \cdot \Delta = \sum \int \frac{M' M dx}{EI} + \sum \int \frac{N' N dx}{EA} \quad (12-9)$$

对于桁架结构，上式中右方的第一项不存在，又因为轴力沿每一杆长不变，于是

$$1 \cdot \Delta = \sum \frac{N'_i N_i l_i}{E_i A_i} \quad (12-10)$$

式中 i 为杆号，又上式求和号应包括桁架的每一杆。

还须指出，在用 (12-8) 式求梁的变形时只考虑了弯矩的影响。自然，梁的剪力对梁的变形也是有影响的，不过对于一般细长梁（梁长是梁高的五倍以上）剪力影响远比弯矩为小而可以略去，详细讨论可参看习题 12-2。

例 12-1 对于图 12-6a 的桁架, 试求节点 B 的竖直位移, 设各杆的 EA 都相同。

解: 因为各杆的 EA 都相同, 故利用 (12-10) 式时只须计算 $\sum N'_i N_i l_i$ 。对照图 12-6a 求出各杆在载荷 P 作用下引起的轴力 N_i 。然后对照图 12-6b, 在 B 点加竖向单位力, 求出由此单位力引起的轴力 N'_i 。计算结果列表 12-1。 N_i 和 N'_i 栏中正号表示拉力, 负号表示压力。最后 B 点的竖向位移为

$$\Delta_{VB} = \frac{(3+2\sqrt{2})Pl}{EA}$$

结果得正说明 B 点位移向下。

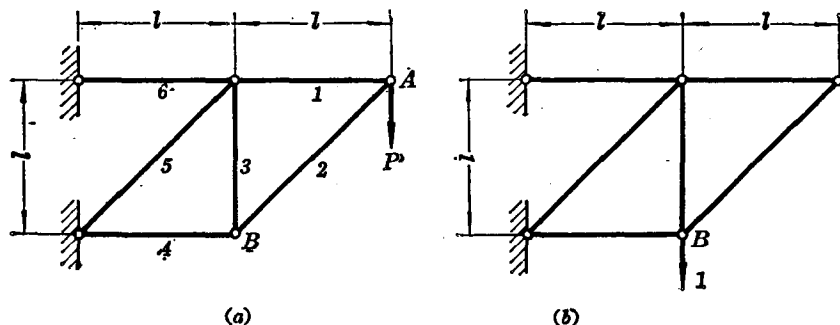


图 12-6

表 12-1

杆 号	杆 长	N_i	N'_i	$N'_i N_i l_i$
1	l	P	0	0
2	$l\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	0	0
3	l	P	1	Pl
4	l	$-P$	0	0
5	$l\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}Pl$
6	l	$2P$	1	$2Pl$

$$\sum N'_i N_i l_i = (3+2\sqrt{2})Pl$$

例 12-2 图 12-7 为一刚架, 两杆的 EI 和 EA 分别相同, 试求 C 点水平位移 Δ_{HC} 。

解: 在 C 点水平方向加一单位力, 如图 12-7b。如果人站在刚架的左下方来观察竖直杆和水平杆, 那么可写出 1、2 截面的弯矩和轴力。

$$M_1 = -Px_1, \quad M_2 = -Pa$$

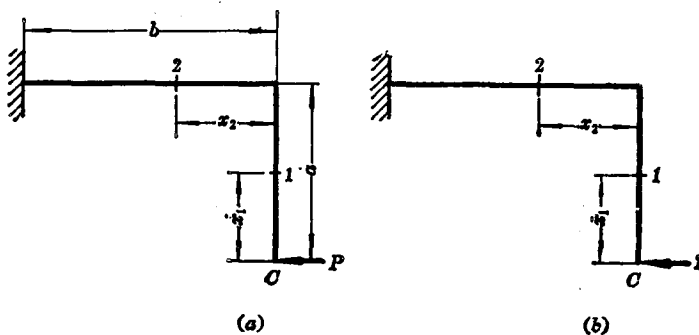


图 12-7

$$\begin{aligned}M'_1 &= -x_1, & M'_2 &= -a \\N_1 &= 0, & N_2 &= -P \\N'_1 &= 0, & N'_2 &= -1\end{aligned}$$

代入(12-9)式,

$$\begin{aligned}\Delta_{H0} &= \frac{1}{EI} \int_0^a (-Px_1)(-x_1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^a (-Pa)(-a) dx_2 + \frac{(-1)(-P)b}{EA} \\&= \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{Pa^2b}{EI} + \frac{Pb}{EA}\end{aligned}$$

如果 $b=a$, 则上式变为

$$\Delta_{H0} = \frac{4Pa^3}{3EI} \left(1 + \frac{3I}{4Aa^2} \right)$$

括号中的第一项对应着杆件弯曲变形引起的位移, 第二项对应杆件轴向变形引起的位移。如两杆均为圆截面(直径为 d), 则 $I/A = d^2/16$, 括号中的第二项变为 $3d^2/64a^2$ 。如 $a=4d$, 则第二项约为 0.3%, 故在求结构位移时, 对于承受弯曲与轴力联合作用的杆件, 可略去轴力的影响。

例 12-3 图 12-8a 为一外伸梁, 其抗弯刚度为 EI , 试用单位力法求 C 点挠度及转角。

解: 欲求 C 点挠度, 在 C 点加一向下的单位力。根据图 12-8a 和 b 可分别写出梁的 AB 段和 BC 段的弯矩:

$$AB \text{ 段, } M(x) = \frac{qa}{2}x - \frac{qx^2}{2}, \quad M'(x) = -\frac{x}{2}$$

$$BC \text{ 段, } M(x) = -qax, \quad M'(x) = -x$$

于是由(12-8)式,

$$1 \times \Delta_{v0} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{2a} \left(\frac{qa}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) \left(-\frac{x}{2} \right) dx + \int_0^a (-qax)(-x) dx \right] = \frac{2qa^4}{3EI}$$

正号说明 C 点挠度与单位力矢向相同, 即向下。

同理, 求 C 截面转角, 则在 C 点加一反时针单位力偶, 图 12-8c, 于是

$$1 \times \theta_0 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{2a} \left(\frac{qa}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{x}{2a} dx + \int_0^a (-qax) \times 1 \times dx \right] = -\frac{5qa^3}{6EI}$$

θ_0 得负号说明 C 截面是顺时针转动。

例 12-4 图 12-9a 是由三杆组成的刚架, B, C 为刚性节点, 三杆的抗弯刚度都是 EI , 试用单位力法求 A_1, A_2 两点的相对位移 $\Delta_{A_1A_2}$ 。

解: 求 A_1, A_2 两点的相对位移, 即是求 A_1, A_2 两点间水平距离的改变。为此可先在 A_1 点加一向右的水平单位力, 利用莫尔积分有

$$1 \times \Delta_{HA_1} = \int \frac{M'_1(x) M(x)}{EI} dx$$

再在 A_2 点加一向左的水平单位力, 则有

$$1 \times \Delta_{HA_2} = \int \frac{M'_2(x) M(x)}{EI} dx$$

这里 $M'_1(x)$ 和 $M'_2(x)$ 分别是 A_1 点和 A_2 点单位力在任一截面 x 引起的弯矩。那么 A_1, A_2 两点的相对位移就等于

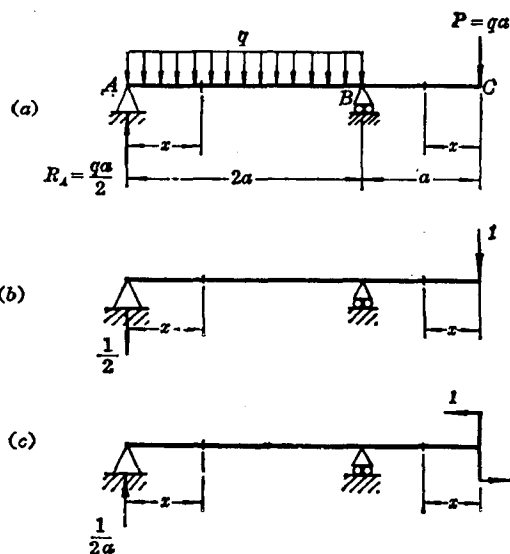


图 12-8

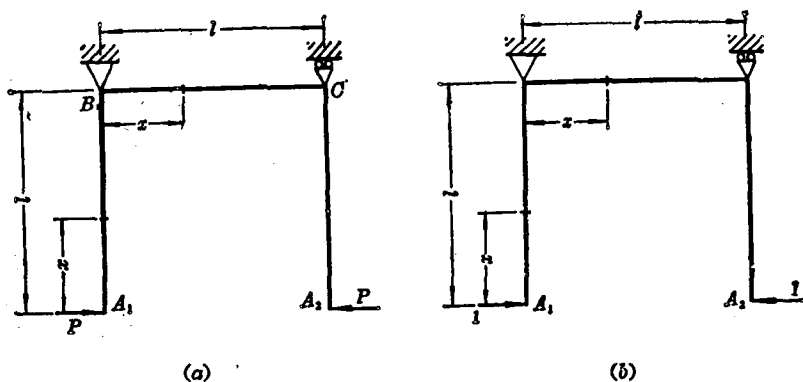


图 12-9

$$1 \times \Delta_{A_1 A_2} = 1 \times \Delta_{HA_1} + 1 \times \Delta_{HA_2} = \int \frac{M'_1(x) + M'_2(x)}{EI} M(x) dx = \int \frac{M' M}{EI} dx$$

上式 $M'(x) = M'_1(x) + M'_2(x)$ 即是 A_1 和 A_2 点一对相向单位力引起的弯矩(看图 12-9b)。所以求结构上任何两点之间的相对位移时,只要在该两点施加一对相向或相背的单位力,然后用载荷及这一对单位力各引起的弯矩代入(12-8)式即可。

对于图 12-9 所示的刚架,约定人位于刚架之内面向各杆来写出各杆的弯矩及其符号。这样,载荷及单位力引起的弯矩是按同一符号规定写出的。于是

$$1 \times \Delta_{A_1 A_2} = \frac{1}{EI} \left[2 \int_0^l (-Px)(-x) dx + \int_0^l (-Fl)(-l) dx \right] = \frac{5Pl^3}{3EI}$$

正号表示 A_1 、 A_2 两点是移近的,因为图 12-9b 所加的是一对相向的单位力。

对于承受弯曲与扭转联合作用的杆件,如采用单位力法求其位移时,在(12-8)式的右方应添入与扭矩有关的对应项。此项可依照弯矩项写出,即将弯矩 M 和 M' 分别换为扭矩 M_n (由载荷引起)和 M'_n (由单位力或单位力偶引起),抗弯刚度 EI 换为抗扭刚度 GI_n 。最后对于弯扭联合作用的杆件,其莫尔积分是

$$1 \cdot \Delta = \int \frac{M' M}{EI} dx + \int \frac{M'_n M_n}{GI_n} dx \quad (12-11)$$

例 12-5 图 12-10a 为一位于水平面内的折轴杆, B 处为一刚性节点, $\angle ABC = 90^\circ$, 在 C 处承受竖直力 P , 设两杆的抗弯刚度和抗扭刚度分别是 EI 和 GI_n , 求 C 点竖直位移。

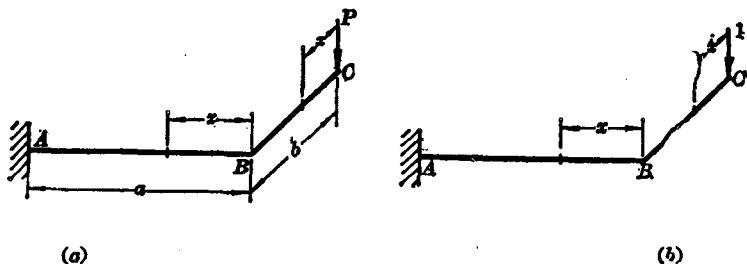


图 12-10

解: 欲求C点竖直位移, 在C点加竖向单位力, 如图12-10b。对于空间杆系, 我们可以规定使杆的上侧纤维缩短, 下侧纤维伸长的弯矩作为正弯矩^①, 于是对于BC段,

$$\begin{aligned} M(x) &= -Px, & M'(x) &= -x \\ M_n(x) &= 0 & M'_n(x) &= 0 \end{aligned}$$

对于AB段,

$$\begin{aligned} M(x) &= -Px, & M'(x) &= -x \\ M_n(x) &= -Pb, & M'_n(x) &= -b \end{aligned}$$

利用(12-11)式,

$$\begin{aligned} 1 \times \Delta_{vo} &= \frac{1}{EI} \int_0^b (-Px)(-x) dx + \frac{1}{EI} \int_0^a (-Px)(-x) dx \\ &\quad + \frac{1}{GI_n} \int_0^a (-Pb)(-b) dx = \frac{P}{3EI} (a^3 + b^3) + \frac{Pab^3}{GI_n} \end{aligned}$$

如AB、BC两杆长度相同($a=b$)并且均为圆截面, 则 $I_n = I_p = 2I$, 再利用 $E = 2(1+\mu)G$, 则上式变为

$$\Delta_{vo} = \frac{Pa^3}{3EI} [2 + 3(1+\mu)]$$

上式中方括号内的第一、二两项分别对应弯曲和扭转变形引起的竖直位移, 由此可看出这两项是同一数量级的。

对于直梁, 由于 $d\theta = Mdx/EI$, 于是(12-8)式也可写为

$$1 \cdot \Delta = \int M' d\theta \quad (12-12)$$

上式左方表示单位力 $P'=1$ 在梁的真实挠度(由载荷引起) Δ 上作的功; 同样, 右方的积分可理解为梁微段 dx 左、右侧面上单位力引起的弯矩 M' 在微段的真实转角 $d\theta$ (由载荷引起)上完成的功的总和。注意当 $d\theta$ 的转向与 M' 一致时, 则 M' 作正功。实际上, 上式对于由于温度改变而引起杆件弯曲变形时也是适用的, 这时 Δ 表示某点的位移, 而 $d\theta$ 表示由于变温而引起的 dx 段左、右侧面的转角。

例12-6 图12-11示一刚度为 EI 的悬臂梁, 此梁的上、下表面温度分别为 T_2 和 T_1 , 并且 $T_2 > T_1$, 沿梁的高度 h 温度作线性变化。已知材料的线膨胀系数为 α , 试求由于温度变化而引起的B点挠度 $\Delta_{B\tau}$ 。

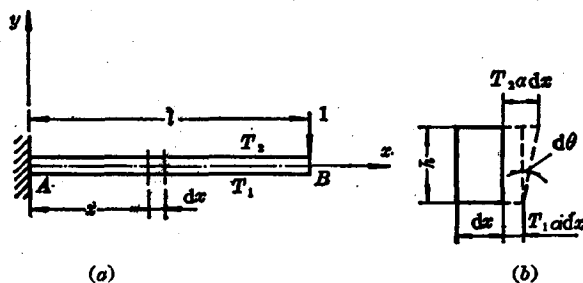


图 12-11

解: 从梁中取出一微段 dx , 此微段由于温度变化使它的左、右侧面发生相对转角 $d\theta$, 由图12-11b可知

$$d\theta = -\frac{T_2\alpha dx - T_1\alpha dx}{h} = -\frac{(T_2 - T_1)\alpha}{h} dx$$

① 这种规定是人为约定, 实际上采用(12-11)式时只要对于载荷及单位力引起的弯矩(或扭矩)采取同一符号规定即可。

注意在图 12-11a 的坐标下 $d\theta$ 为负。在欲求挠度的 B 点加向下的单位力, 如图 12-11a。此时 $M' = -1 \times (l-x)$ 。利用 (12-12) 式,

$$1 \times \Delta_{Bx} = \int_0^l (l-x) \frac{T_2 - T_1}{h} \alpha dx = \frac{(T_2 - T_1) \alpha l^3}{2h}$$

结果得正号表明 B 点由于温度变更而向下位移。

§ 12-4 图形互乘法

用单位力法求等截面杆的位移时, 杆的 EI 为常数, 这时 (12-8) 式变为

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int M' M dx \quad (a)$$

上式的积分可用图形互乘的代数运算来代替。因为 M' 是由单位力或单位力偶引起的弯矩, 故沿杆长方向 M' 图是由直线或折线组成, 而 M 图一般是曲线。设在杆长 l 的一段内 M 图是曲线 (图 12-12a), M' 图是直线 (图 12-12b), 设此直线方程是

$$M' = A + Bx \quad (b)$$

把 (b) 式代入 (a) 式计算积分:

$$\begin{aligned} \int_0^l M' M dx &= \int_0^l (A + Bx) M dx \\ &= A \int_0^l M dx + B \int_0^l x \cdot M dx \end{aligned}$$

上式第一个积分代表 l 段内 M 图的面积 Ω ; 第二个积分代表此 M 图对于竖坐标轴的面矩, 其值为 Ωx_c , 此处 x_c 是 M 图形心 C 的横坐标。于是上面的积分值是

$$\begin{aligned} \int_0^l M' M dx &= A\Omega + B\Omega x_c = \Omega (A + Bx_c) \\ &= \Omega M'_c \quad (c) \end{aligned}$$

这里 M'_c 是和 C (M 图形心) 对应处的 M' 值。

这样对于等截面杆或杆件的等截面段, (a) 式的积

分可用 (c) 式代替, 即此积分可用 M 图的面积 Ω 和与 M 图形心 C 对应的 M'_c 的乘积来代替。于是

$$\Delta = \frac{\Omega M'_c}{EI} \quad (12-13)$$

注意在利用图乘法时, 当 M 图为正弯矩时, Ω 应代以正号; M 图为负弯矩时则 Ω 代以负号。 M'_c 也应按弯矩符号给以正负号。此外, 在推导 (c) 式时认为梁的 l 段内 M' 图是一直线, 如果沿梁长 M' 图是由几段直线组成时, 则必须逐段采用 (c) 式。在实际应用中, 常见的 M 图不外是矩形, 三角形和二次抛物线, 它们的面积和形心见图 12-13。

例 12-7 用图乘法求外伸梁 D 点的竖直位移 (图 12-14a), 梁的 EI 为常数。

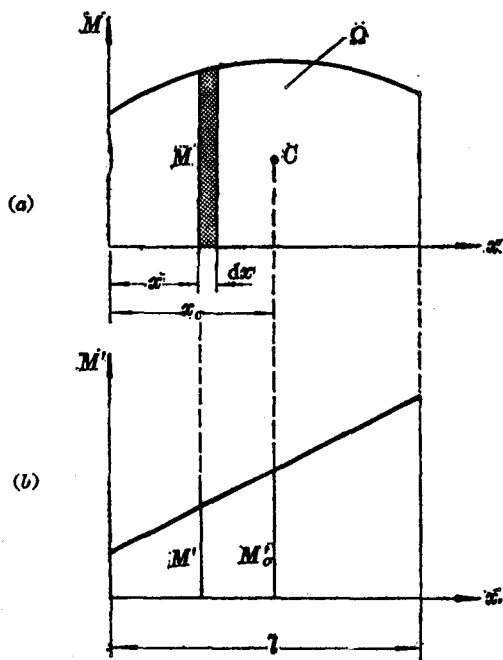


图 12-12

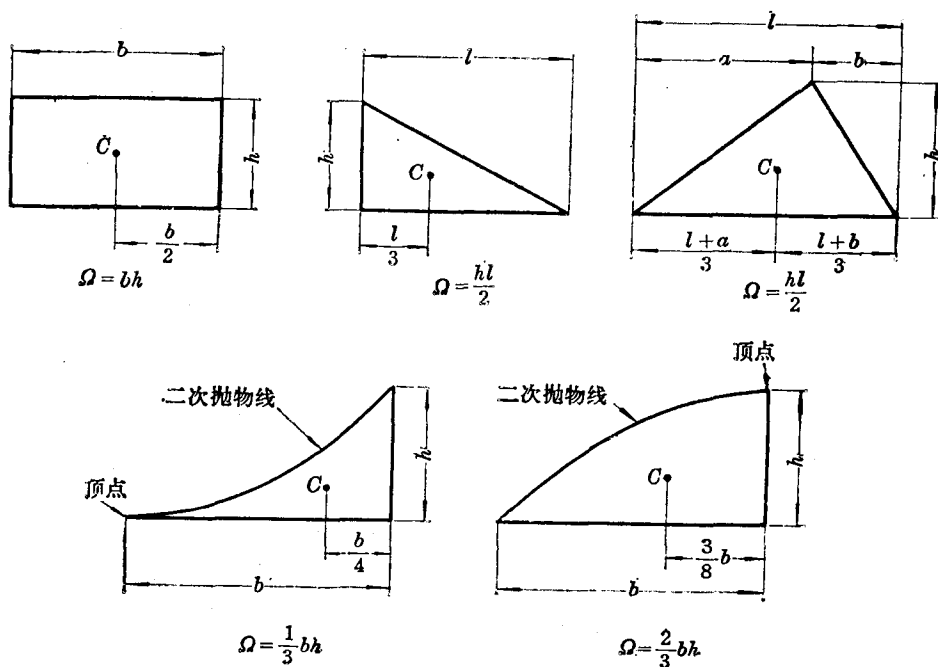


图 12-13

解: 首先画出梁在载荷作用下的弯矩图, 如图 12-14b。然后在 D 点加向下的单位力, 画出单位力的弯矩图, 如图 12-14c, d。图 12-14b 中左段弯矩图为三角形, 右段弯矩图为二次抛物线, 求出和它们的形心对应的 M' 值在图 12-14d 上标出。对于图 12-14b 中段的弯矩图, 可在图中画出辅助的虚线, 将它看成由正弯矩图 123 和负弯矩图 124 组成。在图 12-14d 上注明和 123, 124 三角形形心对应的 M' 值。利用 (12-13) 式得到

$$\begin{aligned} \Delta_D = & \frac{1}{EI} \left[\frac{qa^2}{4} \times a \times \frac{1}{2} \left(-\frac{a}{3} \right) + \frac{qa^2}{4} \times a \times \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3}a \right) \right. \\ & + \left(-\frac{qa^2}{2} \times a \times \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{5}{6}a \right) + \left(-\frac{qa^2}{2} \times a \times \frac{1}{3} \right) \\ & \left. \times \left(-\frac{3}{4}a \right) \right] = \frac{5qa^4}{24EI} \end{aligned}$$

上式得正, 表明 D 点挠度是向下的, 即和单位力矢向相同。

由此例可看出, 当载荷弯矩图与单位力弯矩图位于梁的同侧时, 则互乘后得正值; 如位于梁的异侧则互乘后得负值。

此题也可分别画出集中力和分布力的弯矩图, 然后利用每一弯矩图与单位力弯矩图互乘。读者试按此法自行计算, 其结果与上相同。

例 12-8 图 12-15a 是一刚架, 两杆的抗弯刚度都是 EI , 试用图乘法求 C 点竖直位移和水平位移。

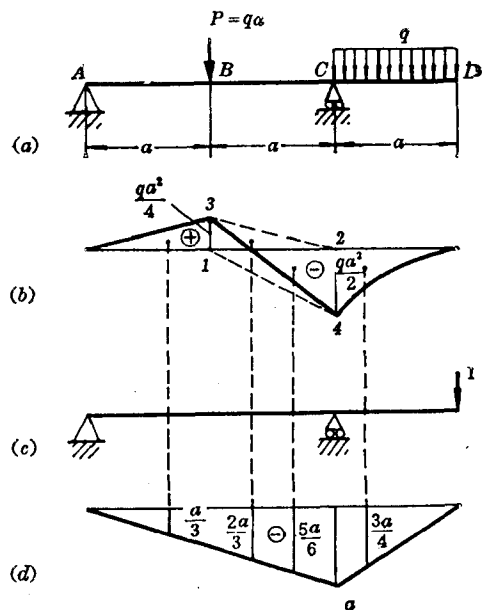


图 12-14

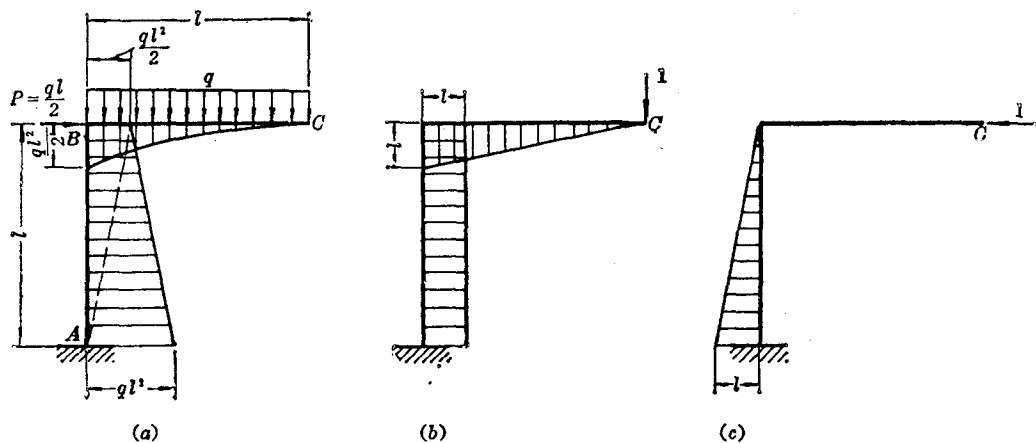


图 12-15

解: 在C点加竖直单位力及水平单位力(图 12-15b, c), 然后分别画出载荷弯矩图及单位力弯矩图。在画刚架弯矩图时, 规定把弯矩图画在杆件受压的一侧。这样, 图形互乘时, M 图和 M' 图如果位于杆件的同侧, 则乘积 $\Omega M'$ 得正, 如果位于异侧则乘积为负。再有AB杆的 M 图为一梯形, 将它分为两个三角形(图 12-15a 虚线所示)后分别与 M' 图互乘。于是

$$1 \times \Delta_{V0} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} \times \frac{ql^2}{2} \times l \times \frac{3l}{4} + \frac{ql^2}{2} \times l \times \frac{1}{2} \times l + ql^2 \times l \times \frac{1}{2} \times l \right]$$

$$= \frac{7ql^4}{8EI}$$

$$1 \times \Delta_{H0} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{ql^2}{2} \times l \times \frac{1}{2} \times \frac{l}{3} - ql^2 \times l \times \frac{1}{2} \times \frac{2l}{3} \right] = -\frac{5ql^4}{12EI}$$

C点竖直位移向下, 水平位移向右, 求出 Δ_{H0} 和 Δ_{V0} 的几何和即是C点的总位移。

例 12-9 图 12-16a 示一变截面悬臂梁, 试求悬臂端的挠度。

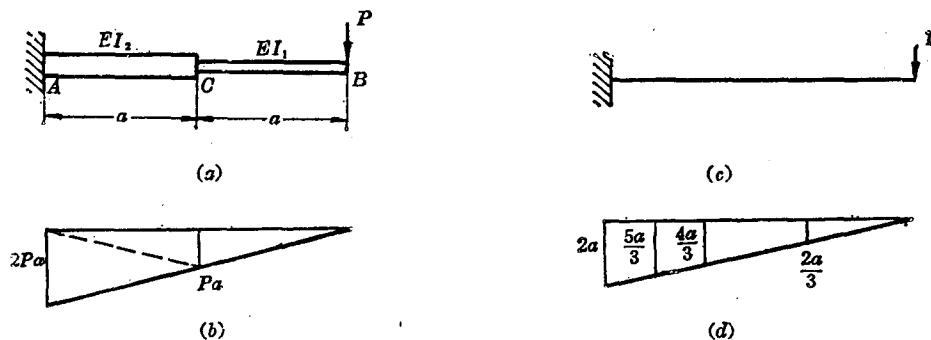


图 12-16

解: 在悬臂端加向下的单位力, 分别画出载荷弯矩图及单位力弯矩图, 如图 12-16b 和 d。由于AC和CB段的刚度不同, 故须分段采用图乘法。在AC段内 M 图为一梯形, 可以将分解为两个三角形, 然后在图 12-16d 上标出与三个三角形形心对应的 M' 坐标, 于是

$$1 \times \Delta_{Vs} = \frac{1}{EI_1} \times \frac{1}{2} Pa \times a \times \frac{2}{3} a + \frac{1}{EI_2} \left[\frac{1}{2} Pa \times a \times \frac{4a}{3} + \frac{1}{2} \times 2Pa \times a \times \frac{5a}{3} \right] = \frac{Pa^3}{3EI_1} + \frac{7Pa^3}{3EI_2}$$