面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

线性代数

张良云　主编

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

线性代数

张良云 主 编

高 等 教 育 出 版 社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材．本书突出了矩阵的作用，强调了线性变换思想，力求在处理上深入浅出．全书共六章，分别为矩阵，行列式，向量组的线性相关性，线性方程组，特征值、特征向量与二次型，线性空间与线性变换．

本书是高等院校农林类、水产类各专业教材，也可作为教学要求相近的工科类学生或科研人员的教材、教学参考书．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/张良云主编．—北京：高等教育出版社，2000

ISBN 7-04-009185-2

Ⅰ．线…　Ⅱ．张…　Ⅲ．线性代数—高等学校—教材　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第77534号

责任编辑　徐　刚　**封面设计**　张　楠　**版式设计**　马静如

责任校对　许月萍　**责任印制**　杨　明

线性代数

张良云　主编

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	**邮政编码**	100009
电　　话	010-64054588	**传　　真**	010-64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2001年1月第1版
印　　张	9	**印　　次**	2001年1月第1次印刷
字　　数	160 000	**定　　价**	8.30元

总　　序

本系列教材是在原华东地区高等农林水院校数学系列课程教材《高等数学》、《线性代数》、《概率论与数理统计》试用后的基础上，按照教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”中有关项目的要求重新编写的，是项目04－6的研究成果．该系列教材各册如下：《高等数学（Ⅰ）》、《高等数学（Ⅱ）》、《线性代数》、《应用概率统计（上、下册）》、《数学模型及其应用》和《数学实验》，适用于高等农林水院校本科各专业．本系列教材编委会由杨崇瑞、王凯捷、吴坚、杨琪瑜、任明荣教授组成．

由南京农业大学牵头，东北林业大学、华中农业大学、西北农业大学合作主持，安徽农业大学、浙江农业大学、中国农业大学、河北农业大学、东北农业大学、黑龙江八一农垦大学、北京农学院、解放军农牧大学共14所院校参加的教育部教改项目“高等农林院校本科数学（含生物统计）系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践”，在各有关院校的重视和项目组成员的共同努力下，已通过验收，并获得了专家组的好评．这套系列教材就是该项目研究成果的一部分．此外，它也是在经过几次会议和有关专家讨论后，在高等教育出版社的大力支持下确定出版的．

该系列教材的选题主要遵从如下的课程体系设置：

- 大农学类数学系列课程
  - 第一平台：基础型课程（面向100％学生）
    - 高等数学
    - 线性代数
    - 应用概率统计
    - 数学实验
  - 第二平台：扩展型课程（面向30％～50％学生）
    - 高等数学（续）
    - 微分方程（续）
    - 数值计算
    - 最优化方法
    - ⋮
  - 第三平台：研究型课程（面向10％～20％学生）
    - 数学模型及其应用
    - 多元统计分析
    - 模糊数学及其应用
    - 系统决策及其应用
    - 生态数学
    - ⋮

该系列教材的出版,首先要感谢参与编写的有关人员,感谢农业部数学课程教学指导委员会的关心和支持,特别致意的是这套系列教材的总设计、该项目组的总负责人杨崇瑞教授,他未能看到这套教材的出版就溘然长逝.现在,该系列教材的顺利出版,是对杨崇瑞先生的莫大慰藉.

编委会十分感谢中科院院士、复旦大学教授李大潜先生担任本系列教材的主审.

由于该系列教材还是一个教改尝试,不免存在一些问题和不足之处,诚恳期望本系列教材的使用者提出意见和建议,以利今后的进一步修改和完善.

编委会

2000年10月10日

前　言

线性代数是大学数学教育中一门主要基础课程，对于培养面向21世纪人才起着重要的作用.本书是编者在进行多年教学实践和改革探索的基础上，为适应不同层次线性代数教学要求而编写的.

作为面向21世纪高等农林院校本科数学(含生物统计)系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践(项目编号为04－6)的系列教材之一.本书主要适用于农、林、水产等高等院校各专业使用，课内学时为36至54学时的都可选用.同时还可作为教学要求相近的工科类学生及农、林、水产等科技人员的教材或参考书.

根据教学改革的精神和本科各专业对线性代数内容的不同要求，我们在内容、结构等方面做了精心选择和编排，具有如下几个方面的特点.(1) 凯莱(Cayley)在1885年的一篇文章中指出：在逻辑上，矩阵概念先于行列式，而在历史上，两者次序正好相反.在本书中，我们正是根据逻辑发展，先讲矩阵，后讲行列式，并且巧妙地处理好这两部分的内容与结构.(2) 为了帮助学生更好地学习并了解线性代数，我们有选择地介绍了矩阵、行列式以及克拉默(Cramer)法则等重要概念的数学历史，这样可以培养他们的学习兴趣，从而激发他们对学习线性代数的热情.(3)在第三章，我们用较少的篇幅介绍了向量组的线性相关性，既简捷又突出重点，易教又易学，使读者在学习中能一气呵成.(4) 引入矩阵的特征值和特征向量，是为了讨论矩阵的对角化问题(主要是实对称矩阵的对角化).把二次型化为标准形，就是把实对称矩阵对角化.鉴于此，我们把这两部分内容安排在第五章讲授，以便读者系统地学习.(5) 对本书习题安排，我们进行了精心设计：每节安排了比较简单的练习题，使初学者在学完本节之后，就能做这些题目，从而加深对所学概念的理解，达到初学的目的；在每章之后，我们精选了部分习题，题型是根据近几年考研情况而定的，但难度适宜，具有一定的层次与坡度；选题新颖，尽管有的题目乍看上去比较熟悉，但解起来需要一定的灵活技巧.并在书后附上习题解答.

随着计算机的日益普及与应用的深入，我们深深感到计算机对现代数学教育的重要作用。本书作为系列教材之一，我们把这部分内容安排在《数学实验》一书中编写，由专业教师统一讲授。

本书由张良云任主编，毕守东任副主编.参加编写工作的有南京农业大学的

张良云(第一章、第六章)、安徽农业大学的毕守东(第四章)、南京林业大学的杨明辉(第五章)、上海水产大学的郑奕(第二章)和南京农业大学的许爱娟(第三章)。全书由毕守东、张良云统稿(部分由许爱娟统稿),最后由张良云定稿.特别值得一提的是,编委荣幸邀请到复旦大学李大潜院士作为本书的主审,在此表示诚挚的谢意.同时我们衷心感谢杨宗瑞教授对本书的关心与鼓励,以及王凯捷教授和编委会对本书的有益建议.

由于水平有限,不妥或谬误之处在所难免,恳请读者和使用本教材的教师及专家批评指正.

主　编

2000 年 8 月于南京

目　　录

第一章　矩　　阵

矩阵是线性代数的主要研究对象，是求解线性方程组的一个有力工具.它在许多数学分支中都有重要作用，许多实际问题还可以用矩阵表达并用有关理论得到解决.

§1.1　矩阵的概念

先看如下的一个例子.

例 1　某产品从产地 A_1,A_2,A_3 运到销地 B_1,B_2,B_3，其运输数量如下表所示.

运输量 (产地＼销地)	B_1	B_2	B_3
A_1	s_{11}	s_{12}	s_{13}
A_2	s_{21}	s_{22}	s_{23}
A_3	s_{31}	s_{32}	s_{33}

其中 s_{ij} 表示从产地 A_i 运到销地 B_j 的产品数量，那么这个调运方案可用如下数表来表示：

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix},$$

这个数表我们称之为矩阵.

定义 1　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列数表

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

叫做 m 行、n 列矩阵，简称为 $m\times n$ **矩阵**①.

这 $m\times n$ 个数叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，a_{ij} 叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素.元素都是实数的矩阵叫做**实矩阵**，元素都是复数的矩阵叫做**复矩阵**.本书中的矩阵除特别说明外，均指实矩阵.

一般地，我们用黑体大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 来表示矩阵.

上述矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 (a_{ij})，也可记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

当 $m=1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 成为 $(a_{11}\quad a_{12}\quad\cdots\quad a_{1n})$，称为**行矩阵**.

当 $n=1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 成为

$$\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix},$$

称为**列矩阵**.

当 $m=n$ 时，$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 n 阶**方阵**.

对于两个矩阵，如果它们的行数、列数分别相等，则称它们为**同型矩阵**.对于两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，如果它们的对应元素都相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是**相等矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

下面介绍常用的几个特殊矩阵.

元素都是零的矩阵称为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}$.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵，如果当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{pmatrix},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对角矩阵**.

如果对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=1$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**单位矩阵**，记为 $\boldsymbol{I}$

---

① 矩阵这个词是西尔维斯特(Sylvester,1814—1897)于1850年首先使用的.

James Joseph Sylvester 是犹太人，从1841年起他接受过一些较低的教授职位，经过一些年的努力，他终于成为霍布金斯(Hopkins)大学的教授，并于1883年70岁时重返英格兰成为牛津大学萨维尔(Sawilian)几何学教授.他是美国纯数学研究的创始人之一，并创办了美国历史上第一个数学杂志《美国数学杂志》.

西尔维斯特一生致力于纯数学的研究.他的成就主要在代数方面，他同凯莱(Cayley)一起发展了矩阵和行列式理论，共同奠定了不变量的理论基础.

或 $\boldsymbol{I}_n$，即

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_n=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵，如果当 $i>j$ 时 $a_{ij}=0$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & a_{nn}\end{pmatrix},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**上三角形矩阵**；类似可定义**下三角形矩阵**

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11} & & & \\ b_{21} & b_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}.$$

上三角形矩阵和下三角形矩阵统称为**三角形矩阵**.

练习 1.1

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×5 矩阵，若其元素 $a_{ij}=i-j$，试求出 $\boldsymbol{A}$.
2. 在下列矩阵中，指出对角矩阵，三角形矩阵，单位矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

§1.2　矩阵的运算

1.2.1　加法运算

定义 2　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个同型矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的

和定义为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

简记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

注意:只有当两个矩阵为同型矩阵时这两个矩阵才能进行加法运算.

不难证明,矩阵加法适合下面运算律:

(1) 交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) 结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}$,其中 $\boldsymbol{O}$ 为零矩阵.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,记 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$,则称 $-\boldsymbol{A}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵.显然有

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

由此,我们可规定矩阵的减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

例 2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.2.2 数乘运算

定义 3 数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相乘定义为

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

简记 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$.

矩阵的加法与数乘运算称为**矩阵的线性运算**,它们满足下面的运算律:

(1) 结合律 $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$;

(2) 分配律 $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$;

$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;

(3) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;$0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

其中 k,l 均为实数,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵.

例 3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$,且 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$,求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解 在 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 两端同时加上 $(-3\boldsymbol{A})$ 得

$$-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9 & 3\\ -6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -2\\ 8 & -4\end{pmatrix}.$$

两端再乘以 $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 得

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}.$$

1.2.3 乘法运算

定义 4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**乘积**定义为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

其中 $c_{ij}=\sum\limits_{t=1}^{s}a_{it}b_{tj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$,即乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列的元素等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素的乘积之和,如下式所示:

$$i\text{ 行}\begin{pmatrix}\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}\begin{array}{c}j\text{ 列}\\ \begin{pmatrix}\vdots & b_{1j} & \vdots\\ \vdots & b_{2j} & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & b_{sj} & \vdots\end{pmatrix}\end{array}=\begin{array}{c}j\text{ 列}\\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots\\ & \vdots & \end{pmatrix}\end{array}i\text{ 行}.$$

从上述定义可以看出，只有当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数时，两矩阵乘法 $\boldsymbol{AB}$ 才有意义，且乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数相同，$\boldsymbol{C}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数相同. 例如，设 $\boldsymbol{A}$ 是 2×3 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 3×4 矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 为 2×4 矩阵，但 $\boldsymbol{BA}$ 无意义.

一般地，矩阵的乘法运算律与数的乘法运算律有如下区别：

(1) 矩阵乘法不满足交换律. 一般地，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$（见下面的例 4），这样，在进行乘法运算时，注意矩阵的前后位置不要任意调换，否则会出错. 特别地，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，我们就说 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **可交换**.

(2) 在数量乘法运算中，若 $ab=0$，则 $a=0$ 或 $b=0$. 但在矩阵乘积运算中，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则未必有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O}.\text{但}$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}.$$

(3) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，则未必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，即对矩阵乘法消去律一般不能成立.

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&2\\4&-4\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&1\\2&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-3\end{pmatrix},$$

则有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}-2&-4\\4&8\end{pmatrix}$，但 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$.

容易证明，矩阵乘法满足下面运算律：

(1) 结合律　$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(2) 左分配律　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$；

　右分配律　$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$；

(3) $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$；

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times s$ 矩阵，则 $\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{AI}_s=\boldsymbol{A}$；

(5) $\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{O}=\boldsymbol{OA}$.

由上面运算律我们知道，在矩阵乘法中，单位矩阵及零矩阵有类似于数字乘法中数“1”和“0”的作用.

有了矩阵乘法，我们就可以定义 n 阶方阵的**幂**. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，定义

$$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA},\cdots,\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A},$$

其中 k 为正整数. 这就是说 $\boldsymbol{A}^k$ 是 k 个 $\boldsymbol{A}$ 连乘.

由这个定义,我们有如下指数律:

$$A^kA^l = A^{k+l},(A^k)^l = A^{kl},$$

其中 k,l 皆为非负整数.

必须注意,在一般情况下 $(AB)^k \neq A^kB^k$,只有当 A 与 B 可交换时,才有 $(AB)^k = A^kB^k$.

例 4 设 $A=(1\quad 2\quad 3)$, $B=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

(1) 求 AB 和 BA; (2) 设 $C=BA$,求 C^n(n 为正整数).

解 (1) $AB=(1\quad 2\quad 3)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=1\times(-1)+2\times1+3\times0=1.$

$$BA=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}(1\quad 2\quad 3)=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\1&2&3\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(2)
$$\begin{aligned}C^n &= (BA)^n=(BA)(BA)\cdots(BA)\\&=B(AB)(AB)\cdots(AB)A\\&=B(AB)^{n-1}A\\&=BA\\&=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\1&2&3\\0&0&0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

即对任意的正整数 $n\geqslant2$, $C^n=BA$.

1.2.4 矩阵的转置

定义 5 把 $m\times n$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

的行与列互换后得到一个 $n\times m$ 矩阵,称为 A 的**转置矩阵**,记为 A'或 A^{T}.

如果记 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,则由定义可知 $A'=(a_{ji})_{n\times m}$(与 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 相对应).

例如$\begin{pmatrix}2 & 4 & 8\\6 & 8 & 10\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}2 & 6\\4 & 8\\8 & 10\end{pmatrix}$.

矩阵的转置也是一种运算,它满足下述运算规律:

(1) $(\boldsymbol{A}')' = \boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}'$;

(3) $(k\boldsymbol{A})' = k\boldsymbol{A}'$;

(4) $(\boldsymbol{AB})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$.

我们把满足 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**对称矩阵**.显然,对称矩阵必为方阵,而且位于对角线两旁对称位置的那些元素分别相等,即对所有的 i,j 有

$$a_{ij}=a_{ji}.$$

如果 $\boldsymbol{A}'=-\boldsymbol{A}$,即对所有 i,j 有 $a_{ij}=-a_{ji}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**反对称矩阵**.显然,反对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必为方阵,而且位于对角线上的元素 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 全为 0.

例 5　设 $\boldsymbol{A}$ 为任一 n 阶方阵,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'$ 是对称矩阵;$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}'$ 是反对称矩阵.

证　由于 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}')' = \boldsymbol{A}'+(\boldsymbol{A}')' = \boldsymbol{A}'+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'$,所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'$ 为对称矩阵.

由于 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')' = \boldsymbol{A}'-(\boldsymbol{A}')' = \boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A} = -(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')$,所以 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}'$ 为反对称矩阵.

练习　1.2

1. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\2 & 3 & 4\\0 & -2 & 3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\-1 & -2 & -4\\-1 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

试求 $2\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{AB}$ 及 $\boldsymbol{BA}$.

2. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 2 & -8\\1 & 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 7 & 5 & 2\\3 & -1 & 4 & -6\end{pmatrix}$,

试求出矩阵方程 $2\boldsymbol{X}+3\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{B}$ 中的 $\boldsymbol{X}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$,计算 $\boldsymbol{A}^2$ 和 $\boldsymbol{A}^{2n}$(n 是大于 1 的自然数).

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个同阶方阵,试问:在什么条件下如下等式才能成立?

(1) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.