# 材料力学难题分析

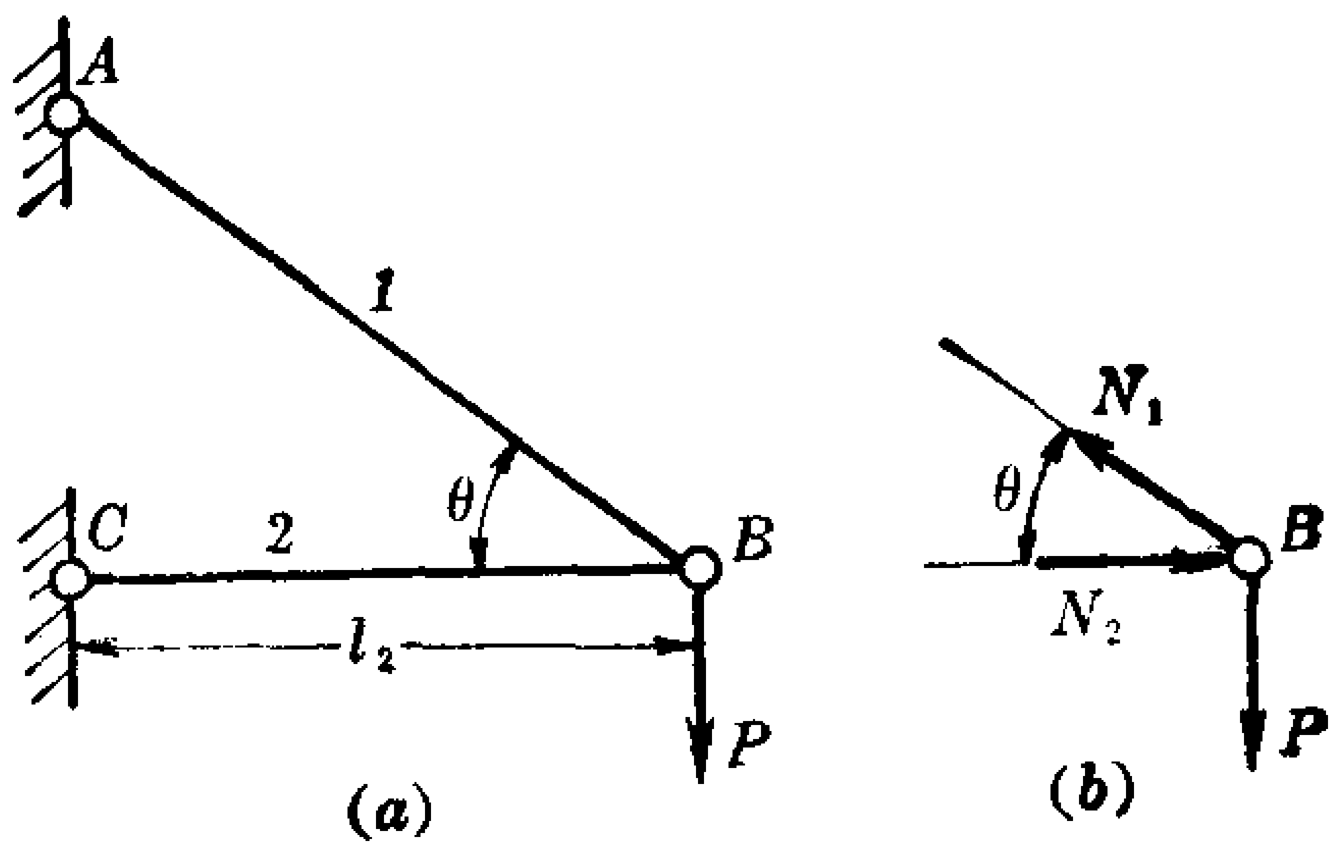
CAILIAO LIXUE NANTI FENXI

苏翼林 主编

高等教育出版社

# 第一章　轴向拉伸与压缩·超静定杆系

**1-1**　1、2两杆在节点$B$处承受铅直载荷$P$(如图$a$)。两杆由同一材料制成，水平杆的长度为$l_2$，斜杆的长度随$\theta$角的大小而定。材料的拉、压许用应力相同，假设两杆的应力均达到许用应力值$[\sigma]$。试求该结构具有最小重量时的$\theta$角。




题 1-1 图

**解:** 取节点$B$为分离体(图$b$)，设两杆对节点$B$的作用力为$N_1$和$N_2$。节点$B$的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned} N_1\sin\theta &= P \\ N_1\cos\theta &= N_2 \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

可以解出

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{P}{\sin\theta} \\ N_2 &= \frac{P\cos\theta}{\sin\theta} \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

若使两杆的应力均达到材料的许用应力值$[\sigma]$，则有

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{P}{[\sigma]\sin\theta} \\ A_2 &= \frac{P\cos\theta}{[\sigma]\sin\theta} \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

设斜杆的长度为 $l_1$，则

$$l_1 = \frac{l_2}{\cos\theta}$$

所谓该结构的重量为最轻，就是指该结构所用材料的体积 $V$ 为最小。而

$$V = l_1A_1 + l_2A_2 = \frac{Pl_2}{[\sigma]}\left(\frac{1}{\cos\theta\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

若 $V$ 为最小，则应有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = 0$$

即

$$2\cos^2\theta - \sin^2\theta = 0$$

于是

$$\mathrm{tg}\,\theta = \sqrt{2}$$

$$\theta = \mathrm{arc\,tg}\sqrt{2} = 54.7°$$

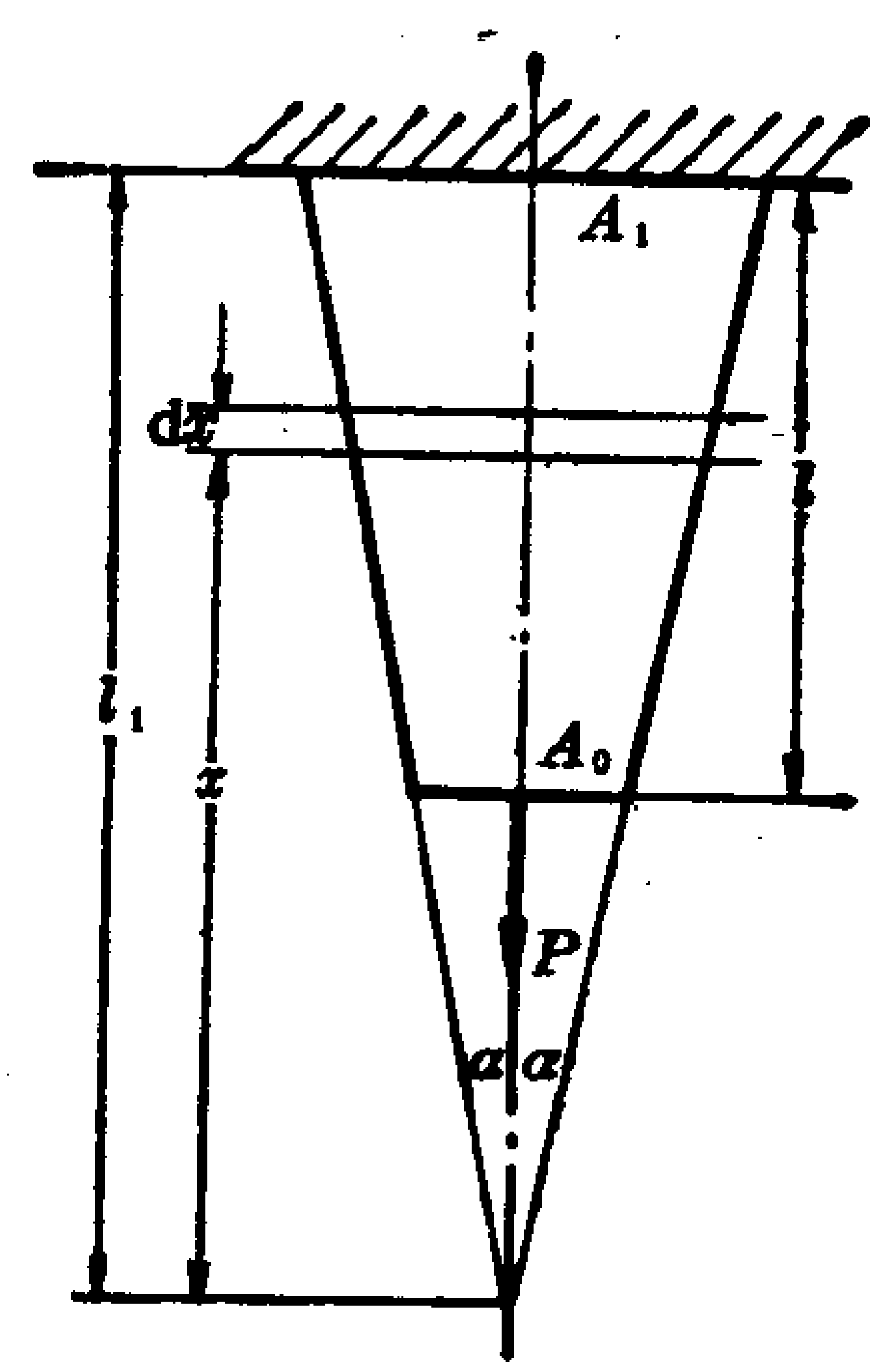
**1-2** 一根圆锥形杆，两端横截面的面积分别为 $A_0$ 和 $A_1$，假设杆的长度 $l$ 远大于杆的横向尺寸。在 $P$ 力作用下，试求：

(1) 杆的伸长 $\Delta l$；

(2) 积存在杆内的应变能 $U$。

**解**：(1) 求杆的伸长 $\Delta l$

首先写出该杆横截面面积的变化规律：




题 1-2 图

$$A(x)=\frac{A_1x^2}{l_1^2} \tag{a}$$

由于圆锥杆的直径沿 $x$ 是线性变化的，故截面积沿杆轴的变化规律是 $x$ 的二次幂。微段 $\mathrm{d}x$ 的伸长 $\mathrm{d}(\Delta l)$ 为

$$\mathrm{d}(\Delta l)=\frac{P\mathrm{d}x}{EA(x)} \tag{b}$$

全杆的伸长为

$$\Delta l=\int_{l_1-l}^{l_1}\frac{P\mathrm{d}x}{EA(x)}=\int_{l_1-l}^{l_1}\frac{Pl_1^2}{EA_1x^2}\mathrm{d}x=\frac{Pll_1}{(l_1-l)EA_1} \tag{c}$$

注意到当 $x=l_1-l$ 时 $A=A_0$，由$(a)$式有

$$A_0=A_1\frac{(l_1-l)^2}{l_1^2}$$

$$\therefore\quad \frac{l_1}{l_1-l}=\sqrt{\frac{A_1}{A_0}} \tag{d}$$

将式$(d)$代入式$(c)$，有

$$\Delta l=\frac{Pl}{E\sqrt{A_1A_0}}$$

（2）求应变能$U$

$x$ 截面上的应力仍认为是均匀分布，则

$$\sigma(x)=\frac{P}{A(x)}=\frac{Pl_1^2}{A_1x^2}$$

应变比能

$$u(x)=\frac{[\sigma(x)]^2}{2E}=\frac{P^2l_1^4}{2EA_1^2x^4}$$

储存于杆内的应变能$U$为

$$U=\int_V u(x)\mathrm{d}V=\int_{l_1-l}^{l_1}u(x)A(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{l_1-l}^{l_1}\frac{P^2l_1^2}{2EA_1x^2}\mathrm{d}x=\frac{P^2l}{2E\sqrt{A_0A_1}}$$

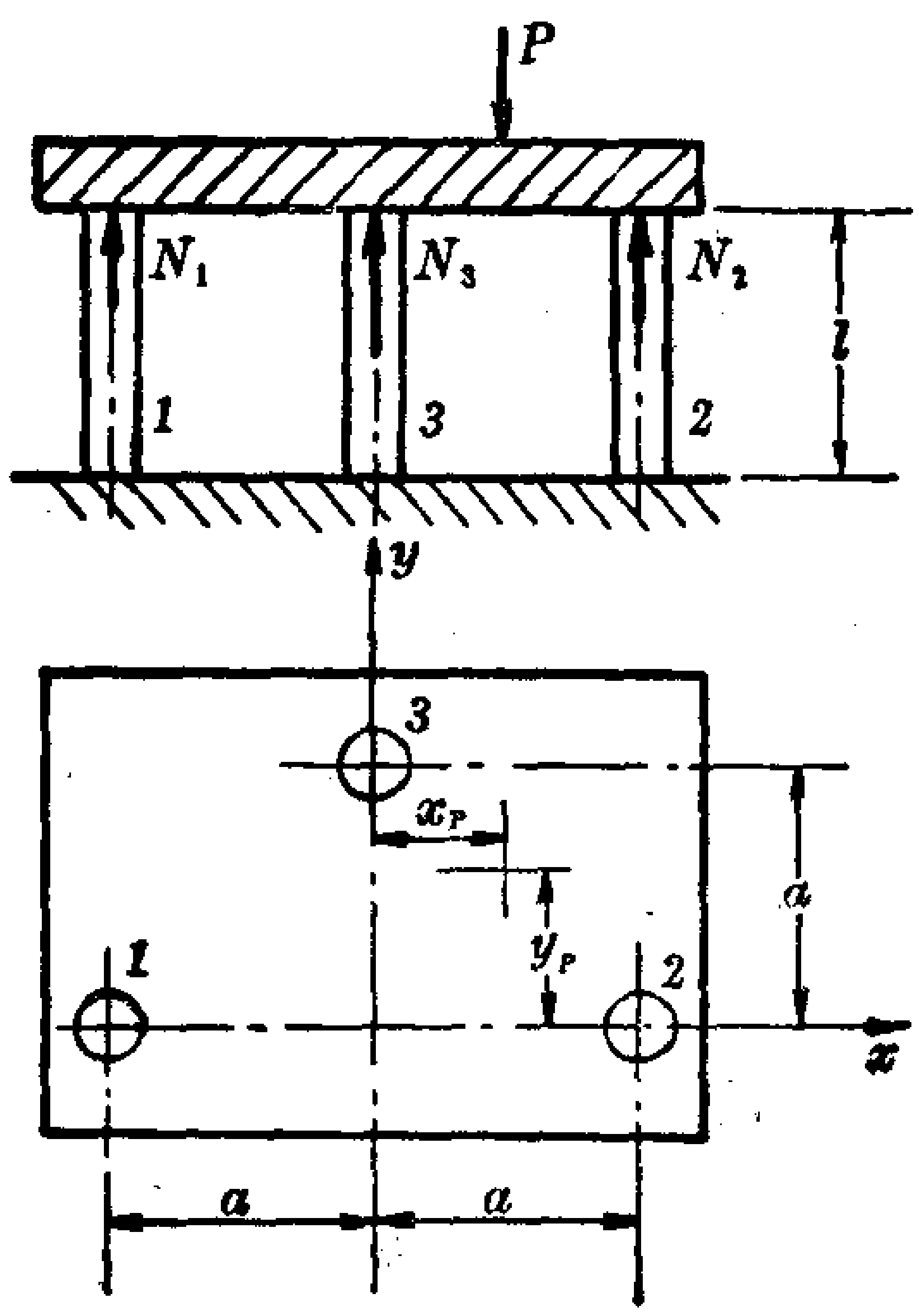
实际上，利用“外力功等于应变能”这一原理，很容易得到

$$U=\frac{1}{2}P\Delta l=\frac{P^2 l}{2E\sqrt{A_0A_1}}$$

上面的推导证实了这一原理对变截面杆也是正确的。

必须指出，横截面上的正应力并不是均匀分布的。当$\alpha$角较小时，例如$\alpha=10°$时，截面上的最大与最小正应力之差约是平均应力的6%。故当截面沿杆长缓慢变化时，设截面上的正应力均匀分布可给出满意的结果。

**1-3** 刚性平台由截面积相同($A_1=A_2=A_3=A$)，但材料不同的三根短柱支承，材料的弹性模量分别为$E_1$、$E_2$、$E_3$。现欲使平台在受$P$力作用时水平下降，问施力点的坐标$x_P$、$y_P$应为若干？




题 1-3 图

**解**：设三柱对平台的支承力分别是$N_1$、$N_2$、$N_3$，则平台的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma Z=0, \quad N_1+N_2+N_3=P\\&\Sigma m_y=0, \quad Px_P+N_1a-N_2a=0\\&\Sigma m_x=0, \quad Py_P-N_3a=0\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

欲使平台水平下降，则要求三柱的压缩变形是相同的，即

$$\frac{N_1 l}{E_1A}=\frac{N_2 l}{E_2A}=\frac{N_3 l}{E_3A} \tag{b}$$

由式($a$)、($b$)五个方程可以解出轴力和施力点坐标：

$$N_i=\frac{E_i}{E_1+E_2+E_3}P \quad (i=1,2,3) \tag{c}$$

$$x_P=\frac{a}{P}(N_2-N_1)=\frac{E_2-E_1}{E_1+E_2+E_3}a \tag{d}$$

$$y_P=\frac{a}{P}N_3=\frac{E_3}{E_1+E_2+E_3}a \tag{e}$$

下面我们对所得到的结果做些简单的讨论：

1. 由($c$)式可以看出，各杆的内力 $N_i$ 与其材料的弹性模量 $E_i$ 成正比。当刚性平台水平下降时，各杆的压缩变形

$$\Delta l_i=\frac{N_i l_i}{E_i A_i} \quad (i=1,2,3)$$

是相等的，同时各杆的长度和截面积也相同，因而各杆的内力 $N_i$ 必与弹性模量 $E_i$ 成正比。

一般说来，静定结构各构件的内力只与结构的形状及加力方式有关，而超静定结构则还与各构件之间的相对刚度有关。

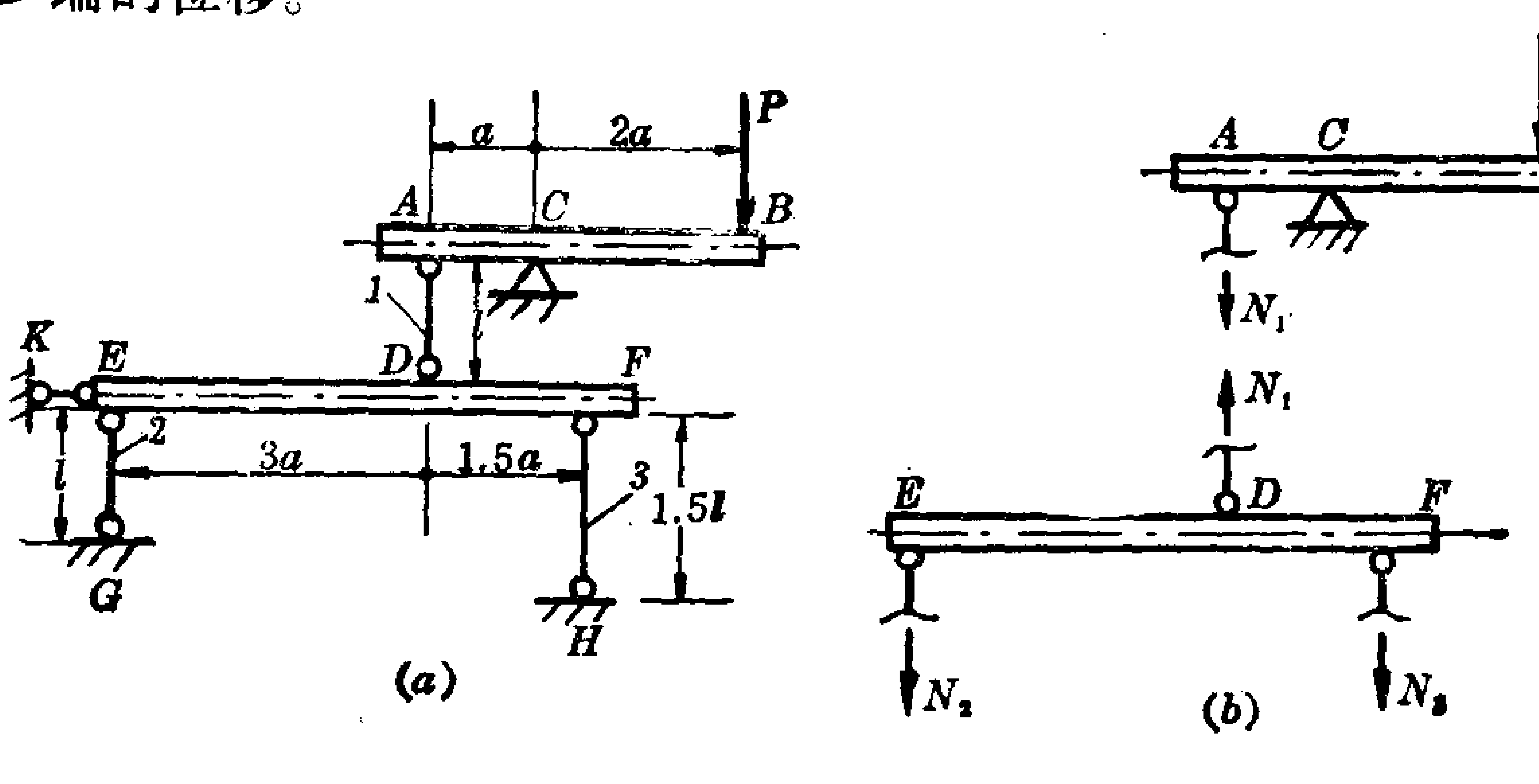
2. 倘若三根短柱的材料相同，即 $E_1=E_2=E_3=E$，则由式($c$)、($d$)得出

$$N_i=P/3 \quad (i=1,2,3)$$

$$x_P=0, y_P=a/3$$

即此时的加力点应在以三短柱为角点的三角形的形心处，且外力平均分配给三根短柱。这显然是正确的。

**1-4** 已知图 $a$ 所示结构的横梁 $AB$ 和 $EF$ 均为刚性体，杆 1、2、3 的抗拉刚度均为 $EA$，长度分别为 $l$、$l$、$1.5l$。试求 $P$ 力作用下 $B$ 端的位移。




题 1-4 图

**解**:图示结构在$P$力作用下,$B$端的位移是铅直向下的,并且是由于1、2、3三杆变形的结果,因而需首先计算此三杆的内力。

取分离体图如图$b$。对横梁$AB$,

$$\Sigma m_C=0, \qquad P\cdot 2a-N_1a=0$$

$$\therefore \quad N_1=2P$$

对横梁$EF$,

$$\Sigma m_D=0, \qquad N_3\cdot 1.5a-N_2\cdot 3a=0$$

$$\therefore \quad N_3=2N_2$$

$$\Sigma Y=0, \qquad N_1-N_2-N_3=0$$

$$\therefore \quad N_2=2P/3, N_3=4P/3$$

各杆的伸长为

$$\Delta l_1=\frac{2Pl}{EA}, \ \Delta l_2=\frac{2Pl}{3EA}, \ \Delta l_3=\frac{2Pl}{EA}$$

$\Delta l_2$和$\Delta l_3$将使$D$点向上位移$\varDelta_D$:

$$\varDelta_D=\Delta l_2+\frac{2}{3}(\Delta l_3-\Delta l_2)$$

$$=\frac{2}{3}\Delta l_3+\frac{1}{3}\Delta l_2=\frac{14}{9}\frac{Pl}{EA}$$

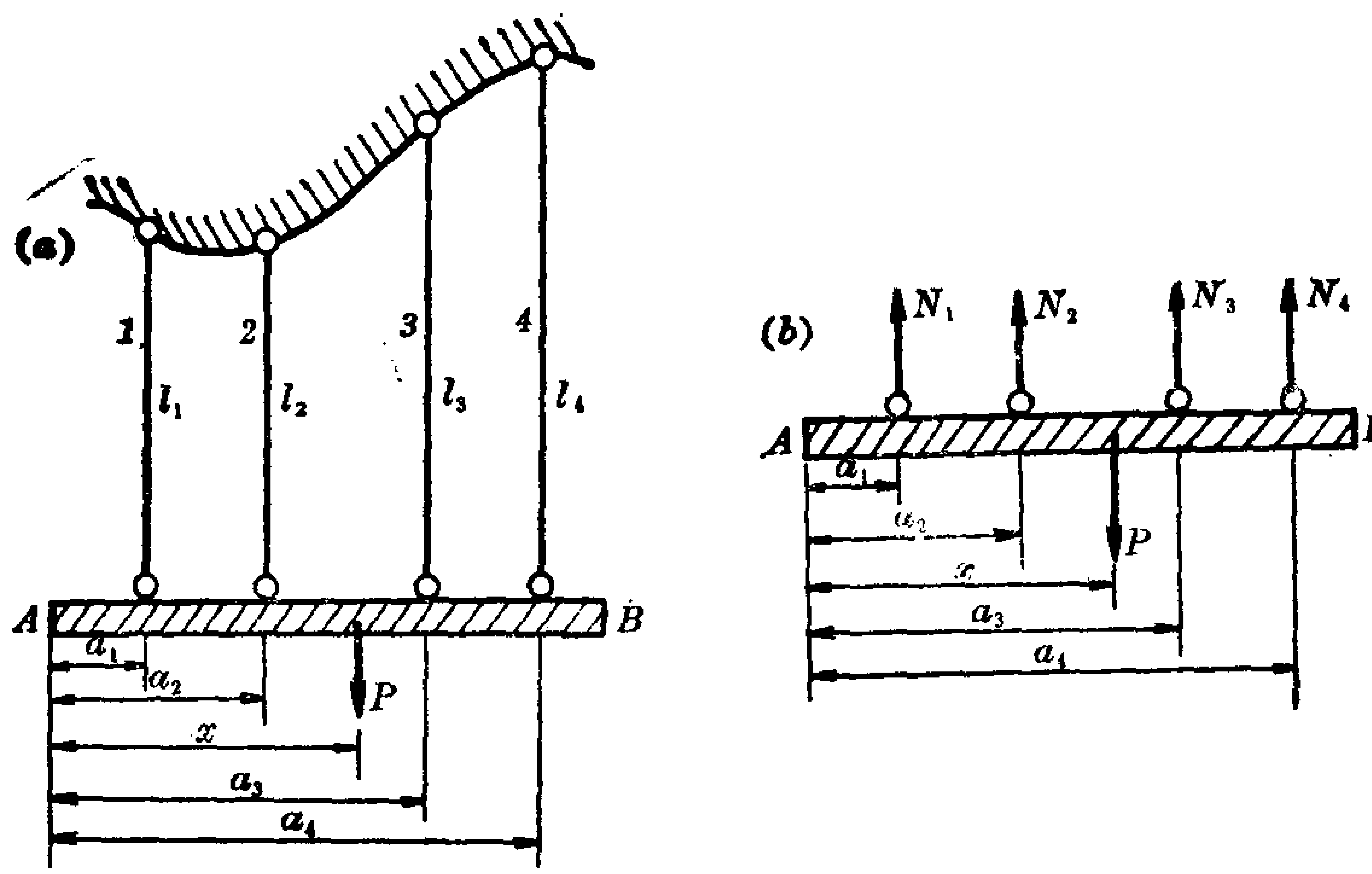
$\Delta l_1$和$\varDelta_D$将会使$A$点向上移动$\varDelta_A$:

$$\varDelta_A=\varDelta_D+\Delta l_1=\frac{32}{9}\cdot\frac{Pl}{EA}$$

由此可知$B$端向下移动$\varDelta_B$:

$$\varDelta_B=2\varDelta_A=\frac{64}{9}\frac{Pl}{EA}=7.11\frac{Pl}{EA}$$

**1-5** 刚性横梁$AB$由四根长为$l_i(i=1,2,3,4)$的钢丝悬挂,每根钢丝的拉伸刚度均为$EA$,第$i$根钢丝距$A$端的距离为$a_i$,在未受力时横梁$AB$处于水平位置。今欲使刚性横梁承受载荷$P$之后仍保持水平,求$P$力距$A$端的距离$x$。




题 1-5 图

**解:** 这是一个超静定结构（超静定次数 $n=2$）。若要求施加 $P$ 力后横梁 $AB$ 仍是水平的，则变形谐调方程为

$$\Delta l_1=\Delta l_2=\Delta l_3=\Delta l_4$$

即

$$\Delta l_i=\frac{N_i l_i}{EA}=\frac{N_1 l_1}{EA}$$

亦即

$$N_i=\frac{N_1 l_1}{l_i} \quad (i=1,2,3,4) \tag{a}$$

考虑图 $b$ 所示分离体的平衡，有

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} N_i=P\\ \sum_{i=1}^{4} N_i a_i=Px\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

由式($a$)、($b$)联立可解出

$$N_i=\frac{P}{l_i\sum\limits_{i=1}^{4}(1/l_i)} \quad (i=1,2,3,4) \tag{c}$$

$$x=\sum_{i=1}^{4}\frac{a_i}{l_i\sum_{i=1}^{4}(1/l_i)} \tag{d}$$

实际上，此题与1-3题相似。根据1-3题的讨论，此时各杆的内力 $N_i(i=1,2,3,4)$ 应与其长度 $l_i(i=1,2,3,4)$ 成反比，即

$$N_i=\frac{k}{l_i}\quad(i=1,2,3,4) \tag{e}$$

此处 $k$ 为一比例常数。再利用静力关系：

$$P=\sum_{i=1}^{4}N_i=k\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{l_i}$$

可以解出

$$k=\frac{P}{\sum_{i=1}^{4}(1/l_i)}$$

代入式$(e)$后，可以得到

$$N_i=\frac{P}{l_i\sum_{i=1}^{4}(1/l_i)}\quad(i=1,2,3,4)$$

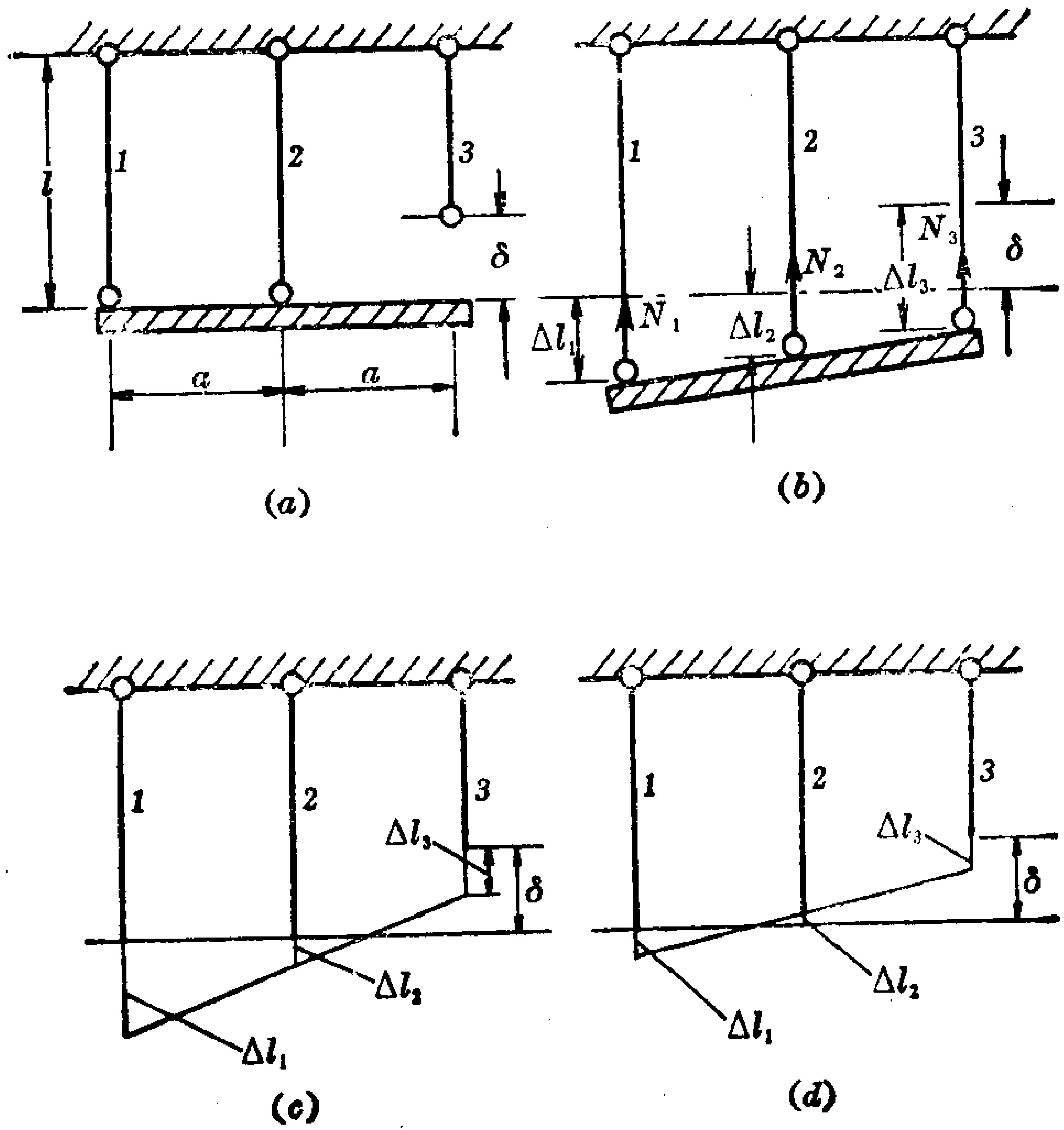
这与前面所得到的$(c)$式是一致的。

**1-6** 图示的刚性梁由三根钢杆支承，它们的截面积均为 $A=2.0\text{cm}^2$，钢的弹性模量 $E=200\text{ GPa}$，其中一根的长度做短了 $\delta=0.0005l$。试求装配后的装配应力。

**解：**设装配后，各杆及横梁的位置如图 $b$ 所示（注意，假设的变形位置并不一定是真实的位置，但一定是结构和约束所允许的位置）。写出变形谐调方程如下：

$$2\Delta l_2=\Delta l_1+(\Delta l_3-\delta)$$

即




题 1-6 图

$$\Delta l_1+\Delta l_3-2\Delta l_2=\delta \tag{a}$$

与假设的伸长变形相对应，各杆的轴力均应设为拉力。横梁的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}N_1+N_2+N_3=0\\N_1a-N_3a=0\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

变形的物理方程为

$$\left.\begin{aligned}\Delta l_1=\frac{N_1l}{EA}\\\Delta l_2=\frac{N_2l}{EA}\\\Delta l_3=\frac{N_3l}{EA}\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

将式($c$)代入式($a$)，得到

$$N_1+N_3-2N_2=\frac{EA\delta}{l} \tag{d}$$

联立求解式($b$)、($d$)得到

$$N_1=\frac{EA\delta}{6l},\ N_2=-\frac{EA\delta}{3l},\ N_3=\frac{EA\delta}{6l} \tag{e}$$

各杆的装配应力则为

$$\sigma_1=\sigma_3=\frac{E\delta}{6l},\quad \sigma_2=-\frac{E\delta}{3l}$$

代入题给数字后，可以得到

$$\sigma_1=\sigma_3=16.7\text{MPa},\sigma_2=-33.3\text{MPa}$$

最后需要指出的是，如果装配后的变形假设成图 $c$ 或 $d$ 所示也都是可以的，只是假设轴力为拉伸或压缩时要与所设的杆件伸长或缩短相一致，这样才能得到正确的结果。

**1-7** 图示结构的三根杆用同一材料制成，弹性模量为$E$，杆1和杆 3 的截面积 $A_1=A_3=A$，杆 2 的截面积 $A_2=2A$。试求载荷$P$作用时各杆的内力。

**解：** 这是一个一次超静定结构。节点$A$在载荷$P$的作用下显然向右下方移动，但是我们特意假设$A$点向左下方移动至$A'$点(图$b$)。由$A'$点向三根杆作垂线，垂足是$A_1$、$A_2$、$A_3$，则

$$\left.\begin{aligned}\overline{AA_1}&=\Delta l_1\ (\text{伸长})\\ \overline{AA_2}&=\Delta l_2\ (\text{缩短})\\ \overline{AA_3}&=\Delta l_3\ (\text{缩短})\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

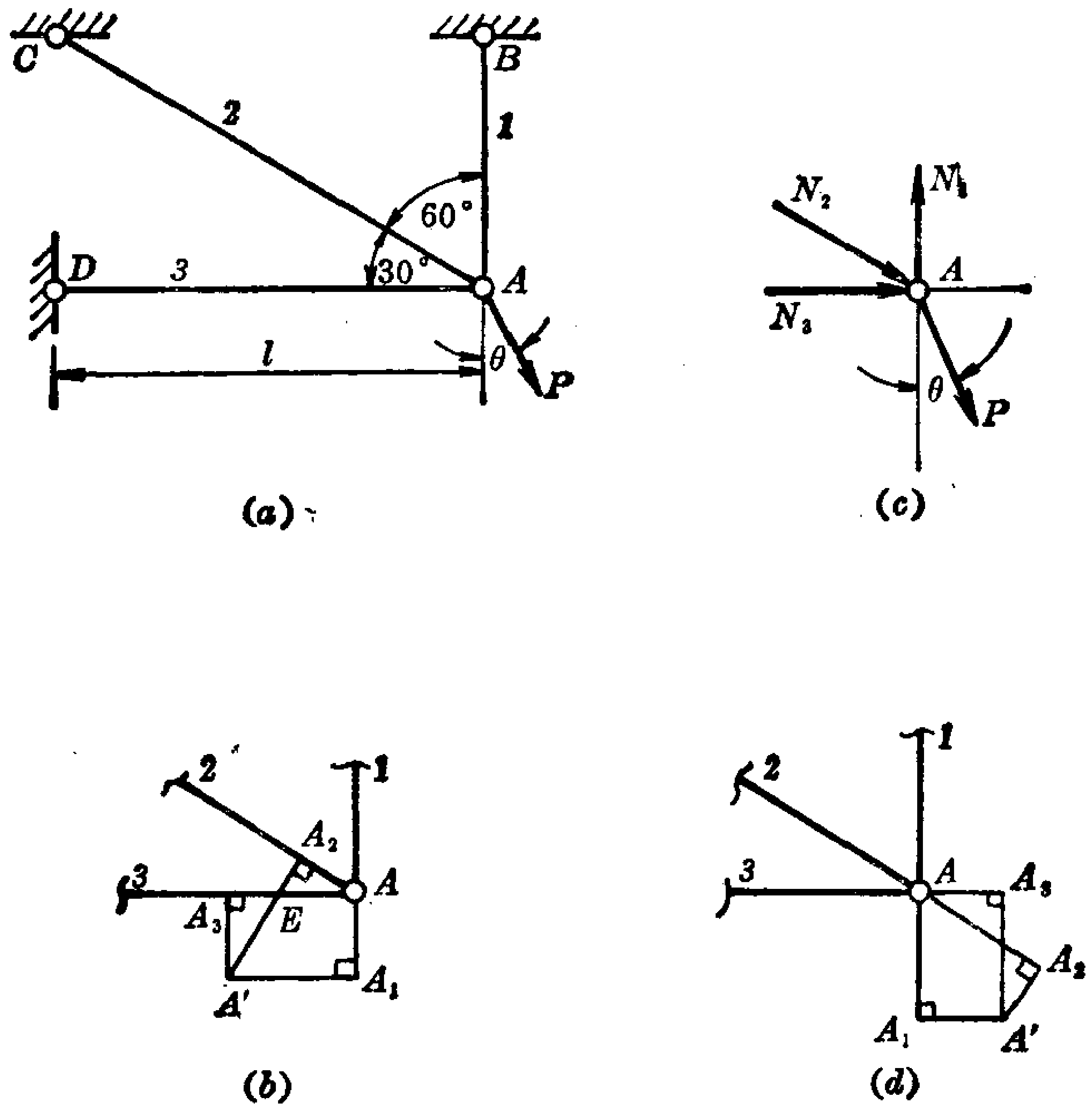
注意到 $\angle A_2A'A_3=\angle A_2AA_3=30°$，变形谐调方程为

$$\overline{A'A_3}\text{tg}30°+\overline{AA_2}/\cos 30°=\overline{AA_3}$$

将($a$)式代入，并考虑到 $\overline{A'A_3}=\overline{AA_1}$，有

$$\Delta l_1\text{tg}30°+\Delta l_2/\cos 30°=\Delta l_3 \tag{b}$$

取节点$A$为分离体；与各杆的伸缩相一致，1、2、3 杆对节点$A$的作




题 1-7 图

用力由图 $c$ 所示。节点 $A$ 的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}N_1-N_2\cos 60°-P\cos\theta=0\\ N_3+N_2\cos 30°+P\sin\theta=0\end{aligned}\right\}\qquad (c)$$

物理方程为

$$\left.\begin{aligned}\Delta l_1&=\frac{N_1 l_1}{EA_1}=\frac{N_1 l}{EA}\mathrm{tg}30°\\ \Delta l_2&=\frac{N_2 l_2}{EA_2}=\frac{N_2 l}{2EA\cos 30°}\\ \Delta l_3&=\frac{N_3 l_3}{EA_3}=\frac{N_3 l}{EA}\end{aligned}\right\}\qquad (d)$$

联立求解式($b$)、($c$)、($d$)，得到

$$N_1=\frac{(3\sqrt{3}+4)\cos\theta-3\sin\theta}{3\sqrt{3}+5}P$$

$$N_2=-\frac{2\cos\theta+6\sin\theta}{3\sqrt{3}+5}P \quad (拉力)$$

$$N_3=\frac{\sqrt{3}\cos\theta-5\sin\theta}{3\sqrt{3}+5}P$$

由此结果可以看出，当 $0°\leqslant\theta<71.9°$时，$(3\sqrt{3}+4)\cos\theta-3\sin\theta>0$，$N_1$ 为拉力；当 $\theta>71.9°$时，$N_1$ 变为压力。当$0°\leqslant\theta\leqslant90°$时，$N_2$恒为拉力。当 $0°\leqslant\theta<19.1°$时，$\sqrt{3}\cos\theta-5\sin\theta>0$，$N_3$ 为压力；当 $\theta=19.1°$时，$N_3$ 为零，3 杆的长度不变，故此时 $A$ 点只有铅垂下移；当 $\theta>19.1°$时，$N_3$ 变为拉力。

倘若假设 $A$ 点向右下方位移，如图 $d$，变形谐调方程为

$$\Delta l_3\cos 30°+\Delta l_1\sin 30°=\Delta l_2 \tag{e}$$

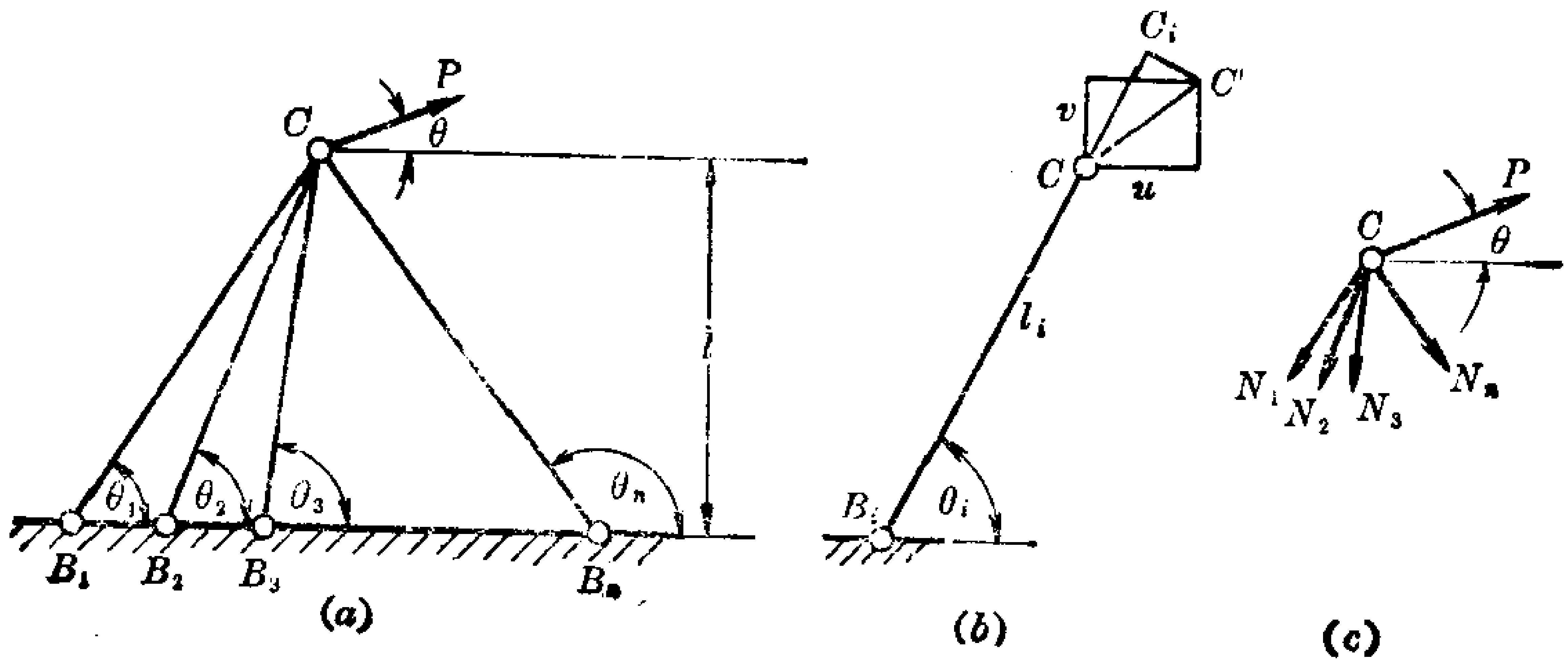
考虑到此时1、2、3杆均假设为伸长，亦即 $N_1$、$N_2$和 $N_3$ 均假设为拉力，可以知道$(e)$式和$(b)$式所反映的变形条件是等价的，自然，这两种关于变形的假设将会给出同样的结果。

本题在于说明，可以假设 $A$ 点发生任意方向的位移，此位移并不一定是实际的位移。但是，所设的 $A$ 点位移必须符合约束条件。例如本题也可假设 $A$ 点移向右上方或左上方。但若假设 $A$ 点只沿水平或铅直方向移动，则是不允许的，这相当于另外又增加了约束，而限制了 $A$ 点的位移方向。

最后，根据求得的轴力的符号，可以确知各杆的变形是伸长还是缩短，$A$ 点的真实位移也就不难求出。值得提醒注意的还有，内力的假设应与变形假设一致。

**1-8** 由 $n$ 根杆组成的桁架如图所示。这 $n$ 根杆的材料相同，但截面积不同，分别为 $A_1$、$A_2$、…、$A_n$。受 $P$ 力作用后，试求各杆的轴力 $N_i$。

**解**：如取节点$C$ 为分离体，可以列出两个平衡方程，而未知轴力 $N_i$ 却是 $n$ 个，这是一个$(n-2)$次的超静定问题。




题 1-8 图

假设节点$C$在$P$力作用下移动到$C'$点，其水平位移和铅直位移分别是$u$和$v$。任意取出$CB_i$杆，如图$b$，$CC'$在$CB_i$上的投影$CC_i$即是第$i$杆的伸长$\Delta l_i$。$CC'$在$CB_i$上的投影等于它的两个分量$u$、$v$在$CB_i$上的投影之和，于是有

$$\Delta l_i = u\cos\theta_i + v\sin\theta_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (a)$$

设第$i$杆的轴力为$N_i$，由虎克定律有

$$N_i = EA_i\varepsilon_i = EA_i\Delta l_i/l_i$$

$$=\frac{EA_i}{l_i}(u\cos\theta_i + v\sin\theta_i) \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (b)$$

式中

$$l_i = l/\sin\theta_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

写出节点$C$的平衡方程为(图$c$)

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} N_i\cos\theta_i = P\cos\theta \\ \sum_{i=1}^{n} N_i\sin\theta_i = P\sin\theta\end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

将式($b$)代入式($c$)，得到以$u$、$v$为未知数的两个线性方程：

$$
\left.
\begin{aligned}
&u\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{l_i}\cos^2\theta_i\right)+v\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{l_i}\cos\theta_i\sin\theta_i\right)=P\cos\theta/E\\
&u\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{l_i}\cos\theta_i\sin\theta_i\right)+v\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{l_i}\sin^2\theta_i\right)=P\sin\theta/E
\end{aligned}
\right\}\qquad(d)
$$

由$(d)$式解出

$$
\left.
\begin{aligned}
u&=\frac{\sin\theta\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{l_i}\cos\theta_i\sin\theta_i\right)-\cos\theta\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{l_i}\sin^2\theta_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{l_i}\cos\theta_i\sin\theta_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{l_i}\cos^2\theta_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{l_i}\sin^2\theta_i\right)}\cdot\frac{P}{E}\\
v&=\frac{\cos\theta\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{l_i}\cos\theta_i\sin\theta_i\right)-\sin\theta\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{l_i}\cos^2\theta_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{l_i}\cos\theta_i\sin\theta_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{l_i}\cos^2\theta_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{l_i}\sin^2\theta_i\right)}\cdot\frac{P}{E}
\end{aligned}
\right\}(e)
$$

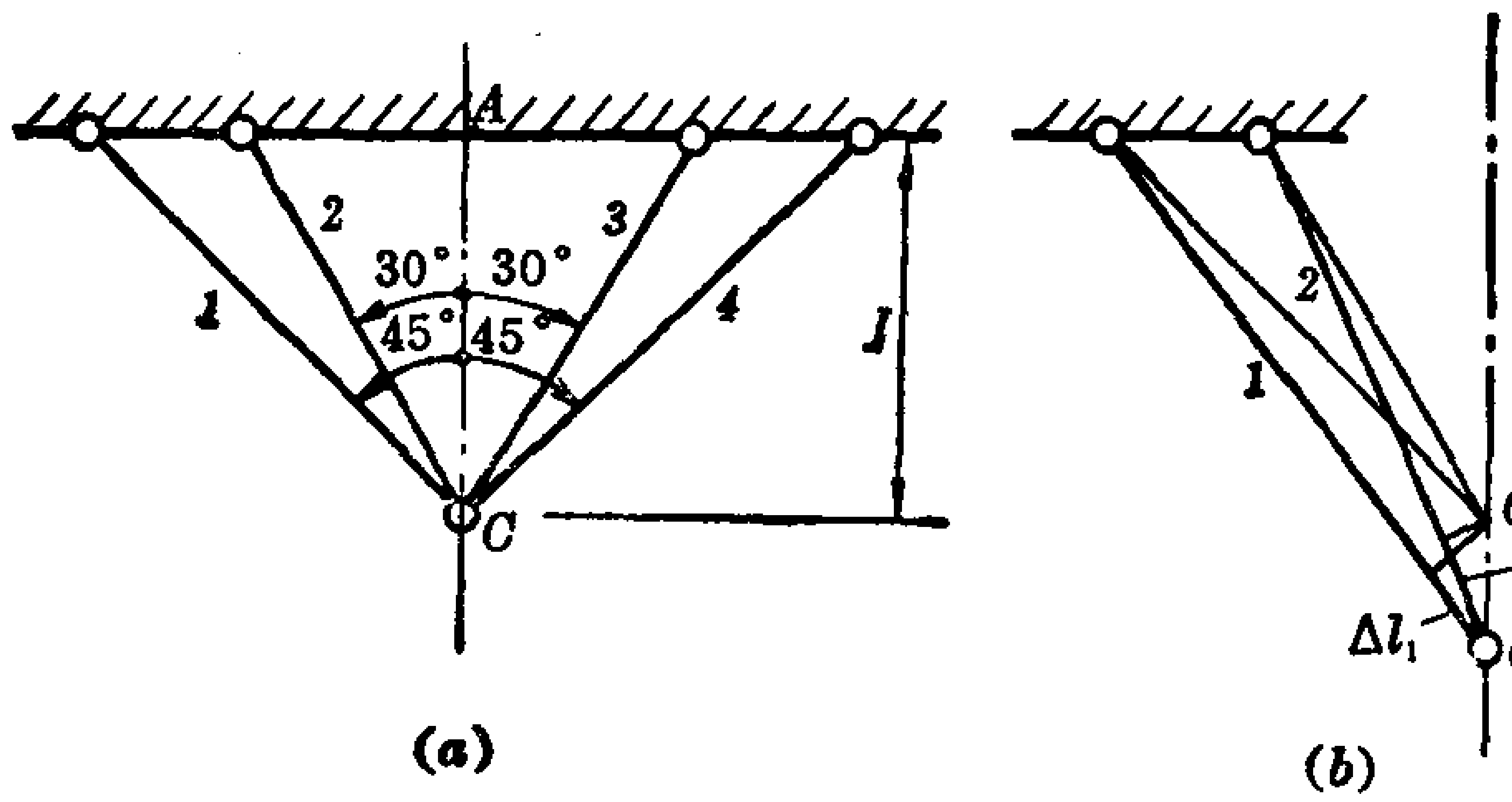
再代回$(b)$式即可得到 $N_i$。

此解法以节点$C$的位移分量$u$、$v$作为基本未知量，通常称为位移法。解题步骤是：首先写出各杆的变形谐调方程$(a)$式，再利用虎克定律得到用基本未知量$u$、$v$表示的各杆的内力［亦即$(b)$式］，最后由平衡方程解出$u$和$v$，代回$(b)$式，可以得到各杆的内力。

此题也可以将各杆的内力$N_i$取作基本未知量来求解，即通常的力法。但此时平衡方程只有两个，需要补充$(n-2)$个位移谐调方程。在本题的情况下，写出$(n-2)$个位移谐调方程是比较麻烦的。最后还要解一个$n$阶线性代数方程组。由此可见，对于多杆汇交于一个节点的杆系结构，以选用位移法为宜。读者可用位移法重解1-7题。

求解超静定问题，使用位移法和力法都是可以的。一般说来，基本未知量较少的方法，应是简单、方便的。

**1-9** 如图所示的桁架结构，第 1、4 杆为钢杆，截面积 $A_1=A_4$，第 2、3 杆为铜杆，截面积 $A_2=A_3$。桁架在温度为 $T_1$ 时装配好。试求当温度为 $T_2=T_1+T$ 时各杆的温度应力。设钢杆和铜杆的线胀系数分别为 $\alpha_1$ 和$\alpha_2$，并且 $\alpha_2>\alpha_1$，弹性模量分别为 $E_1$ 和 $E_2$。




题 1-9 图

**解:** 此结构对称于 $AC$ 轴，且温度均匀变化，故内力和变形也一定对称于 $AC$ 轴，只须分析一半结构即可。取左半结构，如图 b，设节点 $C$ 移至 $C'$ 点。1，2杆的伸长 $\Delta l_1$ 和 $\Delta l_2$ 与位移 $\overline{CC'}$ 之间的关系是

$$\Delta l_1=\overline{CC'}\cos 45^\circ$$

$$\Delta l_2=\overline{CC'}\cos 30^\circ$$

$$\therefore\quad \Delta l_1\cos 30^\circ=\Delta l_2\cos 45^\circ \tag{a}$$

导致杆件变形的原因，一是杆件的温度变化，二是变温引起的轴力。注意到 $\alpha_2>\alpha_1$，所以设 2 杆的轴力是压力，1 杆是拉力。考虑节点 $C$ 的平衡，有

$$N_1\cos 45^\circ=N_2\cos 30^\circ \tag{b}$$

此时变形的物理方程为

$$\left.\begin{aligned}\Delta l_1&=\frac{N_1 l_1}{E_1A_1}+\alpha_1 l_1 T\\ \Delta l_2&=-\frac{N_2 l_2}{E_2A_2}+\alpha_2 l_2 T\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

将$(c)$式代入$(a)$式,并注意到

$$l_1 = l/\cos 45°, \ l_2 = l/\cos 30°$$

最后得到

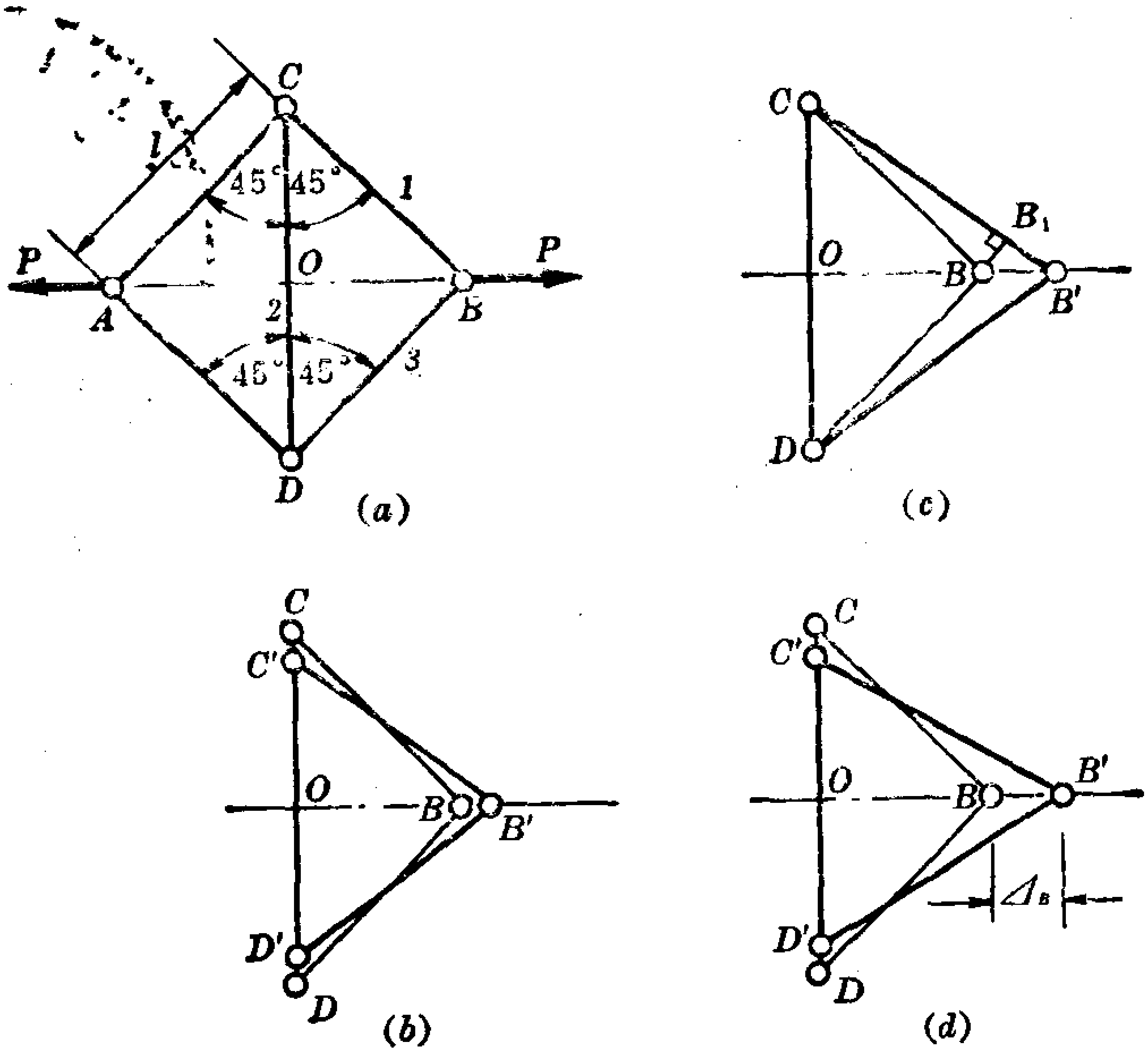
$$\left(\frac{N_1}{E_1A_1} + \alpha_1 T\right)\cos^2 30 = \left(-\frac{N_2}{E_2A_2} + \alpha_2 T\right)\cos^2 45 \qquad (d)$$

将式$(d)$和$(b)$联立可以解出$N_1$和$N_2$,温度应力为

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{\sqrt{3}\,(2\alpha_2 - 3\alpha_1)TE_1E_2A_2}{3\sqrt{3}\,E_2A_2 + 2\sqrt{2}\,E_1A_1}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{\sqrt{2}\,(2\alpha_2 - 3\alpha_1)TE_1E_2A_1}{3\sqrt{3}\,E_2A_2 + 2\sqrt{2}\,E_1A_1}$$

**1-10** 图示为一简单桁架,各杆的截面积均为$A$,材料的弹性模量均为$E$。求在载荷$P$的作用下,节点$A$、$B$之间的相对位移$\Delta$。




题 1-10 图