



科技工程中的 数 学 模 型

湛安琦 编著

中国铁道出版社

科技工程中的数学模型

湛安琦 编著

中 国 铁 道 出 版 社

1988年·北京

内 容 提 要

本书全面系统地介绍各种类型的数学模型：微观模型与宏观模型、离散模型与连续模型、线性模型与非线性模型、周期模型、确定模型与随机模型。通过大量的例子来分析说明各种类型数学模型的特征和建立数学模型的方法。全书实例丰富，包含物理、化学、生物、医学、工程技术、经济学及其他学科的例子共114个。

在编写上考虑到各种专业读者的需要，对涉及到的数学内容都作了适度的处理。文字通俗。本书可作为理（包括数学专业）、工、农、医、经济管理等各类专业的科技人员、大学生、研究生的参考书籍。

科技工程中的数学模型

湛安琦 编著

中国铁道出版社出版、发行

责任编辑 宋黎明 封面设计 翟 达

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：850×1168毫米 1/32 印张：13 字数：339千

1988年8月 第1版 第1次印刷

印数：0001—1500册 定价：7.10元

ISBN7-113-00075-4/O·4

前 言

现代科学技术发展的一个重要特征是各门科学技术日益精确化、数量化。数学已经逐步渗透到各种科学技术领域。数学最早应用在经典力学、热学等物理学科，现在又进入化学、生物学等领域。数学除了应用在自然科学和工程技术外，它的触角已伸进到过去应用数学较少的社会科学，如经济学、管理科学、人口学、教育学等。正如马克思说的那样“一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步”^{*}。一门科学要能运用数学，首先必须建立它各种有关的数学模型，定量地描述事物的本质，否则应用数学将是一句空话。所以研究探讨有关数学模型的问题对于我们来说就非常必要了。

本书系统地介绍了各种类型的数学模型，有直接确定性模型、微观模型、宏观模型、周期模型、离散模型、线性模型及各种随机模型等。通过大量的事例来分析说明这些模型的特征和建立模型的方法。我们着重讨论有关数学模型的问题，不详细讨论各种数学理论及数学方法。

全书实例丰富，包括有力学、热学、电学、化学、生物学、医学、经济学、人口学等各学科的例题共 114 例。这对于掌握建立数学模型的方法是很有帮助的。

本书适于有关专业的大学生、研究生及科技人员在学习和工作中作参考。

由于作者水平所限，本书内容牵涉面广，错误和缺点在所难免，敬请读者批评指正。

湛安琦

1986年于深圳

^{*} “回忆马克思恩格斯”，人民出版社，1957年版。第73页。

目 录

第一章 数学模型概述	1
§ 1—1 数学模型与科技工程	1
(1) 绪 言	1
(2) 科学发展与数学模型	1
(3) 工程技术与数学模型	3
§ 1—2 数学模型及分类	4
(1) 模 型	4
(2) 数学模型	6
(3) 数学模型的分类	8
§ 1—3 建立数学模型的一般方法	12
(1) 建立数学模型的方法与步骤	12
(2) 举 例	14
第二章 直接确定模型	30
§ 2—1 直接确定模型——函数式	30
(1) 函数式	30
(2) 隐函数·复合函数	31
(3) 系统的直接数学模型——函数的建立	33
§ 2—2 经验公式	36
(1) 建立经验公式的步骤	36
(2) 决定经验公式的形式	37
(3) 常用经验公式	37
§ 2—3 图示法	48
(1) 直 线	48
(2) 曲线改直	50
§ 2—4 最小二乘法	52
(1) 最小二乘法原理	52
(2) 正规方程	55

● (3) 线性及可化为线性的经验公式	57
§ 2—5 均值法与差分法	64
(1) 均值法	64
(2) 差分法	67
(3) 方法的误差比较	71
第三章 微观模型	74
§ 3—1 基本概念	74
(1) 微观模型	74
(2) 导数、偏导数	77
(3) 微分	78
§ 3—2 物理学中一些与微分有关的基本定律	80
(1) 力学	80
(2) 电学	89
(3) 热学	95
§ 3—3 几何、化学、群体增长及其他类型	98
(1) 几何	98
(2) 化学动力学	104
(3) 溶液混合问题	108
(4) 群体理论模型及人口增长	110
§ 3—4 微观模型与微分方程	123
(1) 微观模型的分类	123
(2) 集中参数系统的数学模型	127
(3) 分布参数系统的数学模型	142
§ 3—5 定解条件	154
(1) 定解条件	154
(2) 初始条件	157
(3) 边界条件	161
(4) 混合条件	165
(5) 衔接条件	165
第四章 宏观模型	168
§ 4—1 宏观模型	168
(1) 微观模型与宏观模型	168
(2) 积分概念	169

(3) 连续系统的宏观模型	170
(4) 例题	172
§ 4—2 积分方程式	174
(1) 积分方程式	174
(2) 线性积分方程的类型	176
(3) 解的存在及唯一性	177
(4) 线性齐次积分方程	182
(5) 线性非齐次积分方程	184
(6) 涅尔特拉方程	186
第五章 周期模型	189
§ 5—1 周期函数	189
(1) 周期函数	189
(2) 圆函数	190
§ 5—2 傅里叶级数	190
(1) 傅里叶级数	190
(2) 三类函数的傅里叶级数	196
(3) 傅里叶级数的复数形式	200
§ 5—3 周期函数的经验公式	203
(1) 周期函数的经验公式	203
(2) 系数公式	209
§ 5—4 含周期系数的微分方程	220
(1) 含周期系数的微分方程	220
(2) 可化得周期系数的微分方程	222
(3) 周期系数线性微分方程的一些性质	227
第六章 离散型模型	231
§ 6—1 离散变量与连续变量	231
(1) 离散变量与连续变量	231
(2) 离散变量与连续变量的相互转化	231
§ 6—2 离散型数学模型	234
(1) 输入输出模型	234
(2) 方框图	240
(3) 状态变量模型	241
§ 6—3 化连续型模型为离散型模型	246

(1) 差分·差商	246
(2) 演算符号 E 和 Δ	248
(3) 离散量与连续量的对应	250
(4) 微分方程化为差分方程	252
§ 6—4 差分方程式	256
(1) 基本概念	256
(2) 简单差分方程的和分解法	257
(3) 线性差分方程	261
(4) 常系数线性差分方程	264
(5) 差分方程的数值解	271
第七章 线性模型	274
§ 7—1 线性模型	274
(1) 概 念	274
(2) 线性数学模型的表示法	277
(3) 输入-输出数学模型举例	277
§ 7—2 离散线性模型	280
(1) 离散模型的卷积表示法	280
(2) 脉冲响应序列	282
(3) 卷积的运算	285
§ 7—3 δ 函数	290
(1) 一般定义	290
(2) 用分配函数定义 δ 函数	296
§ 7—4 连续线性模型	298
(1) 连续线性模型的卷积表示法	298
(2) 脉冲响应函数	301
(3) 连续系统卷积的计算	306
(4) 方法的推广	309
§ 7—5 状态变量模型	312
(1) 单道输入、输出的离散系统	312
(2) 多道输入、输出的离散系统	316
(3) 连续系统	322
第八章 随机模型	325
§ 8—1 随机现象的数学模型	325

(1) 随机现象	325
(2) 概率空间	327
(3) 随机变量及分布函数	332
(4) 数字特征	337
(5) 随机向量	339
(6) 随机变量的函数	343
§ 8—2 贝努里试验概型	346
(1) 随机模型	346
(2) 贝努里概型·二项分布	347
(3) 推广的贝努里概型·多项分布	350
(4) 举 例	350
§ 8—3 波阿松试验概型·广义二项分布	352
(1) 波阿松概型·广义二项分布	352
(2) 卜里耶分布	353
(3) 超几何分布	354
(4) 超几何分布的推广	354
(5) 举 例	355
§ 8—4 区间上撒点概型·波阿松分布	357
(1) 波阿松分布	357
(2) 波阿松分布与二项分布的渐近关系	359
(3) 举 例	360
§ 8—5 随机误差概型·正态分布	363
(1) 正态分布	363
(2) 三个概率分布的渐近关系	366
(3) 举 例	367
§ 8—6 利用频率分布描述随机现象	369
(1) 频率的稳定性	369
(2) 离散型随机变量	370
(3) 连续型随机变量	371
(4) 正态分布	373
第九章 随机过程	378
§ 9—1 随机过程	378
(1) 基本概念	378

(2) 分布函数与数字特征	380
(3) 随机过程的一些类型	382
§ 9-2 生物学中的一些随机模型	386
(1) 群体增长	386
(2) 竞争型的群体增长	391
(3) 传染病流行	394
§ 9-3 化学动力学中的随机模型	398
(1) 一般化学反应	398
(2) 链式化学反应	400

例 题 目 录

第一章 数学模型概述	1
例1.3.1 建立行星运动数学模型的追溯	14
例1.3.2 铁道车辆的浮沉振动	22
第二章 直接确定模型	30
例2.1.1 复合函数的方框图表示	32
例2.1.2 开普勒行星运行第三定律	33
例2.1.3 由开普勒定理推导牛顿万有引力定律	34
例2.3.1 铜导线的电阻与温度关系的经验公式	48
例2.3.2 单摆振幅与时间关系的经验公式	50
例2.4.1 铜棒的长度与温度关系的经验公式	58
例2.4.2 油的粘度与温度关系的经验公式	60
例2.4.3 电弧电流与电压降之间的经验公式	61
例2.5.1 导丝盘速度与电流频率之间的经验公式	64
例2.5.2 钻孔速度与钻孔深度之间的经验公式	66
例2.5.3 水深与流速间关系的经验公式	68
例2.5.4 比较三种求经验公式方法的误差	71
第三章 微观模型	74
例3.1.1 质量不断增长的雨滴的运动规律	74
例3.1.2 马王堆一号墓的年代	75
例3.2.1 离心式节速器	83
例3.2.2 物体在液面上的浮沉振动	84

例3.2.3	单摆的拉格朗日方程	87
例3.2.4	圆柱在圆筒内滚动的数学模型	88
例3.2.5	$R-C$ 电路	93
例3.2.6	线性定常 RLC 电路	93
例3.2.7	绝缘细棒的导热方程	96
例3.2.8	流动中的流体导热方程	96
例3.3.1	旋转反射面的形状	99
例3.3.2	铁路线路的缓和曲线	100
例3.3.3	旋转液面的形状	103
例3.3.4	空气除尘	108
例3.3.5	细菌繁殖	110
例3.3.6	鱼类生存竞争的数学模型	113
例3.4.1	梁的弹性曲线	123
例3.4.2	梁的横向振动	125
例3.4.3	追线	128
例3.4.4	悬链线	131
例3.4.5	肿瘤生长的数学模型	134
例3.4.6	诊断糖尿病的数学模型	135
例3.4.7	传染病流行的数学模型	139
例3.4.8	弦微小横振动与膜振动	142
例3.4.9	杆的纵振动	146
例3.4.10	扩散过程	148
例3.4.11	大气污染的扩散	150
例3.4.12	稳定温度分布与稳定浓度分布	151
例3.4.13	输电线方程	152
例3.5.1	弦振动的初始条件	159
例3.5.2	受持久力和冲击力作用的振动系统	159
例3.5.3	杆的纵振动的边界条件	163
例3.5.4	均匀介质球的衔接条件	166
第四章	宏观模型	168
例4.1.1	亚贝尔问题	172
例4.1.2	$R-C$ 串联电路	173
第五章	周期模型	189

例5.2.1	矩形波函数的傅里叶级数	192
例5.2.2	锯齿函数的傅里叶级数	193
例5.2.3	饱和的放大器输出函数的傅里叶级数	194
例5.2.4	矩形波函数傅里叶级数的复数形式	202
例5.3.1	周期机械振动的经验公式	211
例5.3.2	某地全年气温的经验公式	215
例5.4.1	变摆长单摆	221
例5.4.2	具有周期参变量的电路	222
第六章	离散型模型	231
例6.1.1	离散(变)量的连续化处理	232
(1)	电流(2)浓度(3)放射性物质蜕变速度	232
(4)	热电子密度(5)水的密度、压强	232
例6.1.2	连续(变)量的离散化处理	233
(1)	集中荷载(2)脉冲信号	233
例6.2.1	定期存款问题	234
例6.2.2	梯型电阻网络	235
例6.2.3	溶液的逐步混合问题	236
例6.2.4	弦受集中荷载时的位移	236
例6.2.5	随机问题的差分方程	237
例6.2.6	树群株数增长的数学模型	238
例6.2.7	一个经济模型	239
例6.2.8	由系统的方框图推出它对应的数学模型	241
例6.2.9	输入—输出模型转化成状态变量模型	242
例6.2.10	一个经济问题的状态变量模型	244
例6.3.1	化常微分方程为差分方程	252
例6.4.1	差分方程的直接和分解法	260
例6.4.2	求一阶线性差分方程 $y_{t+1} = 2^t y_t$ 的一般解	263
例6.4.3	解常系数线性齐次差分方程	266
例6.4.4	解常系数线性非齐次差分方程	269
第七章	线性模型	274
例7.1.1	RLC 电网络的数学模型	278
例7.1.2	$R-C$ 滤波器的离散数学模型	279
例7.1.3	互感耦合电路的数学模型	279

例7.2.1	用叠代法求系统的脉冲响应	282
例7.2.2	用求解法求系统的脉冲响应	285
例7.2.3	用卷积求离散系统的输出	285
例7.2.4	用矩阵法求卷积	289
例7.4.1	利用阶跃响应函数求脉冲响应函数	302
例7.4.2	利用齐次方程的解求脉冲响应函数	305
例7.4.3	求高阶微分方程描述的系统的脉冲响应函数	305
例7.4.4	按定义计算卷积	307
例7.4.5	用阶跃响应函数求输出函数	308
例7.4.6	RLC 电路的脉冲响应函数	310
例7.4.7	推广的离散系统的脉冲响应	311
例7.5.1	单道输入输出的线性系统	315
例7.5.2	多道输入、输出的线性系统	317
例7.5.3	鱒鱼孵化场生态系统的数学模型	318
例7.5.4	连续系统的状态方程	324
第八章 随机模型	325
例8.2.1	电能供应问题	350
例8.2.2	血清的检验	351
例8.3.1	抽样检查	355
例8.3.2	不放回抽样检查	355
例8.3.3	鱼群的统计估值	356
例8.4.1	放射性物质蜕变	360
例8.4.2	显微镜下计算细菌或血球数量	361
例8.4.3	废品问题	362
例8.5.1	服从正态分布的随机变量举例	367
例8.5.2	电话线路数量问题	368
例8.6.1	离散型随机变量的频率分布	370
例8.6.2	连续型随机变量的频率分布	371
例8.6.3	正态分布的判别	373
第九章 随机过程	378
例9.2.1	纯生过程的随机模型	387
例9.2.2	生灭过程的随机模型	389
例9.2.3	竞争型群体增长的随机模型	392

例9.2.4	简单传染病流行的随机模型	394
例9.2.5	两种群体中简单传染病流行的随机模型	395
例9.2.6	一般传染病流行的随机模型	396
例9.3.1	一级单一化学反应的随机模型	399
例9.3.2	二级双分子化学反应的随机模型	399
例9.3.3	直链反应的随机模型	401

第一章 数学模型概述

§ 1—1 数学模型与科技工程

【1】绪 言

世界上一切事物都是按照一定的客观规律运动、变化着，事物之间亦彼此联系和制约着，无论是从浩瀚的宇宙到渺小的粒子，还是从自然科学到社会科学都是这样。事物的变化规律和事物之间的联系规律，必然蕴含着一定的数量关系。所以数学是认识世界和改造世界的必不可少的重要工具，特别是在科学技术飞跃发展的今天，这一点就显得更为重要。

要改造世界，首先要认识世界，其中包括要会用数学的方法来反映、描述或模拟各种各样的现象，即建立这些现象的数学模型。简单地说，所谓数学模型是自然或社会现象某些特征的本质的数学表达式。建立一个合适的数学模型是不容易的，需要通过实验、理论分析、判断、归纳等步骤来建立。这要求我们不但要有足够的数学知识，还需要对有关学科的概念、理论等有充分的了解。当然还要有一定的分析、判断、归纳的能力。

本书将介绍各种数学模型，通过事例分析、说明模型的特点和建立数学模型的一般方法。本章简要介绍数学模型在科技工程中的作用、数学模型的概念和大致分类，最后通过例题来说明建立数学模型的大致方法和步骤。

【2】科学发展与数学模型

科学的发展是离不开数学的，数学模型在其中又起着重要的作用。无论是自然科学还是社会科学，在进行理论研究时，都不是直接研究真实现象的，而是研究它们的模型——略去一些次要因素的一种近似写照。科学就是通过对模型的研究来阐明真实世

界的客观规律的。

各学科的许多基本理论都是用数学（式子）模型表示的。这方面的例子是非常多的，特别是在自然科学方面。牛顿在前人的基础上，通过观察、实验，归纳出反映物体机械运动的基本客观规律——牛顿三定律，它们可用明确而紧凑的数学式子表示。许多电学理论，如反映电路理论的基本规律——基尔霍夫定律也可用数学式子来表示。光学原理，如“光沿着通过时间最少的路径前进”的基本规律可用变分法来表示。热学、化学、甚至社会学等很多的很多方面的规律、原理都可用数学式子来表示。例如马克思用公式 $I(V + m) = II$ 来反映社会再生产的基本规律，即社会再生产中第 I 部类与第 II 部类之比等于社会再生产有机构成中的物化劳动与活劳动之比。这种反映某一类现象客观规律的数学式子就是该现象的数学模型。

一个学科的内容能用数学来分析和表示，这是该学科精密化和科学化的一种表现。利用数学这个有效的工具，可以深刻地认识客观现象的本质，预测未来，促进科学的发展。

数学模型是表达概念的一种重要手段。物理有许多概念用语言来阐述是很难说清楚的，但用数学表达式却可以清晰而准确地表达它们；例如瞬时速度，在没有引进微积分之前，它只能解释成“单位时间内所走过的路程”，这对于变速运动就不合适了。把瞬时速度解释成“假想从某个时刻起物体作匀速运动，此时的平均速度就是瞬时速度”，这样的叙述也是含混不清的。在有了微积分之后，瞬时速度可定义为位移（函数）对时间的导数 $v = \frac{ds}{dt}$ 。显然用导数来表达瞬时速度就比较清楚和准确。又如物理学中的另一概念——功，用初等数学的观点认为功等于力与物体在力的方向上通过的距离的乘积，这对于物体受到常力作用且作直线运动的情况是合适的，但对受到变力和曲线运动就不适用。在初等数学的范围，这个概念是说不清楚的，要更新这个概念，就需要用到高等数学的知识。功可定义为力（函数）沿运动曲线的曲线积分。类似这样的例子是很多的，可见数学式子（即数学

模型) 在表达概念方面起着重要的作用。

随着电子计算机的发展, 许多学科的计算分支都在迅速发展, 这就需要建立有关系统的数学模型。换句话说, 数学模型是发展各学科计算分支的必不可少的条件。例如物理学传统分为理论物理学和实验物理学两大分支, 它们相辅相成地推动着整个物理学的发展。但有许多问题在这两种范围内很难获得满意的解决。如研究太阳的演化, 从理论上它涉及到核反应过程、光子输运过程、物质状态变化过程等等, 问题极为复杂, 即使建立方程组后, 想用理论分析的办法, 求解这组方程也是毫无办法的。用实验的办法也是不行的, 实验室无法模拟如此庞大而复杂的现象。又如流体力学问题, 它牵涉到质量、能量与动量三个守恒定律以及关于压强、密度、温度之间的关系的物态方程。这些方程虽能推导出来, 但求解这组非线性偏微分方程也是很困难的。类似这样的问题是很多的, 如气象、海洋等方面的一些问题, 由于情况复杂, 目前很难从理论上或从模拟实验方面获得很好的解决。电子计算机的问世, 促进物理学的第三个分支——计算物理学的出现和发展。现已在天体问题、流体力学问题等许多领域中取得进展, 要对有关物理问题进行计算, 必须先建立该问题的数学模型, 没有数学模型, 计算就不可能进行。

【3】工程技术与数学模型

随着科学技术的进步, 人们对技术的要求越来越高, 从而对建立生产过程的数学模型也越来越重视。数学模型在工程技术上所起的作用也日益增大。

从设计上来看, 现在有许多是进行经验设计的, 也就是通过模仿、对比、理论校核等方法进行设计的。但随着生产的发展, 有很多情况单靠经验设计是不够的, 还需要通过建立模型, 分析计算等进行理论设计。例如在一些化学工业中, 需用这种方法来决定设备的大小, 原料和触媒的数量, 调节温度等。要进行理论设计首先要建立生产过程的正确的数学模型, 否则会给设计以及