

# 电子和离子发射

Л. И. 多布雷楚夫

科学出版社

# 电子和离子发射

Л. Н. 多布雷楚夫 著

刘学愬 译

科学出版社

1960

Л. Н. ДОБРЕЦОВ

## ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ЭМИССИЯ

ГИТТЛ, 1952

### 內 容 簡 介

本书是作者根据他在大学高年级授课的讲稿改写成的,书中不仅总结了作者本人的研究工作,而且还反映了国内外其他研究者的工作。

虽然本书所介绍的学科属于实验物理学的范畴,但是本书并不太多叙述实验和仪器,而把重点放在现象的结果及物理原理的讨论上。

书中详细地讨论了各种电子发射的机制(热电子发射、光电子发射等)、各种阴极的构造及性能,并介绍了一系列与之有关的现象及其理论。

本书可供高等学校高年级学生、工程师及研究工作者阅读。

### 电 子 和 离 子 发 射

Л. Н. 多布雷楚夫 著

刘 学 懿 译

\*

科学出版社出版 (北京朝阳门大街 117 号)

北京市书刊出版业营业登记证出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总经售

\*

1960 年 7 月第 一 版

书号: 3231 字数: 219,000

1960 年 7 月第一次印刷

开本: 727 × 1692 1/27

(京) 00001—12,000

印张: 16

定价: 1.05 元

## 前 言

电子学应该理解为物理学的一部分，它研究带电粒子产生的过程(电子与离子发射)、带电粒子在真空中或极稀薄气体中的运动(电子或离子光学)和带电粒子在电极上消失的过程(需要指出，在一系列外国书中，特别是在美国书中，只把研究电子的产生和电子在电子和离子器件中的运动的控制这一部分，即我们称之为技术电子学的这一部分称做电子学)。因此，本书所研究的材料有很大一部分是物理电子学。

革命前我国已经在电子学方面作出了一系列重要工作。这里可以提起 A. Г. 斯托列托夫对光电效应定律的研究，A. Ф. 約飞对基本光电效应的研究；这里还可算上 B. И. 巴甫洛夫和米特凱維奇的工作，巴甫洛夫与弗兰克和赫兹同时独立地研究了电子与原子碰撞时的能量交换，而 B. Ф. 米特凱維奇最先解释了在弧光放电中的灼热阴极热电子发射现象。

在苏维埃时代里，阴极电子学方面的工作获得了很大发展，在伟大的十月社会主义革命后的头十年里，就已在电子学问题方面完成了一系列重要的实验与理论研究(П. И. 卢基尔斯基和 H. H. 謝曼諾夫在水银表面反射电子方面所做的工作，П. И. 卢基尔斯基和 C. C. 普里列札也夫对正常光电效应的研究，列宁格勒物理技术研究所完成的各项工作，以及 C. A. 波固斯拉夫斯基在空间电荷对真空中带电粒子流的影响方面所做的工作等等)。但是，在苏联电子学领域内的工作一直到三十年代才达到了特别巨大的规模<sup>[1]</sup>。即使列举最近 20 年来的最重要工作也要占太多篇幅，因为在苏联单单在杂志上发表的电子学方面的论文就不少于 500 篇。在电子学方面工作的物理学家们曾组成许多集体，部分集体现在

还在这一领域内工作。例如，1928年在列宁格勒建立的由 П. И. 卢基尔斯基和 С. А. 維克辛斯基领导的“斯維特兰”工厂的物理实验室，以卢基尔斯基为首的列宁格勒大学物理研究所电气物理组，以及稍后的工业大学技术电子学教研组等等，对苏维埃电子学的发展都起了重大作用。差不多同时，在莫斯科，电子学方面的工作也得到发展，这些工作主要集中在全苏电工研究所和莫斯科大学（П. Б. 契莫費也夫，Н. А. 卡普佐夫等等）。以 Н. Д. 莫古利斯为首的基輔物理学家們在这一领域内有成效地工作着。塔什干城和苏联其他城市的物理学家們都在电子学方面做了一系列有价值的工作。

無論是在高等学校和科学研究所里，或者是在专业研究所和实验室里，技术电子学都得到了快速发展。各个机构都常常用自己首創的方法解决問題（Л. А. 庫別茨基，С. А. 維克辛斯基等人）。現在在一整系列电子学問題上，苏联物理学家在科学上毫无疑问地是居于领导地位的（复合阴极的热电发射，光电效应和复合光电阴极，次級电子发射，反次級电子发射，表面电离等等，以及一整系列工程电子学問題）。

本书是作者为高年級大学生編的讲义改写成的。因此，本书討論的不只是作者研究过的那些問題，也有作者自己未研究过的問題（例如光电效应、次級发射等等）。当然这都已反映在书中适当章节中。

虽然本书是实验物理学的一部分，但是为了紧凑，书中沒有叙述太多的实验和仪器，而主要討論研究的結果和所研究現象的物理机制。因此，在很多情况下，研究結果不引用原始工作中的曲綫，而表示成示意图綫。

作者希望本书在現有形式下是有用的，特别是希望修习这门課程的高等学校的学生在学习物理电子学时能够用它作教材。

本书是1950年版的再版，在再版时作者曾作了修訂。

作者

# 目 录

|                                 |         |
|---------------------------------|---------|
| 前言 .....                        | ( i )   |
| § 1. 緒論 .....                   | ( 1 )   |
| § 2. “自由”电子 .....               | ( 5 )   |
| § 3. 周期場中的电子状态 .....            | ( 13 )  |
| § 4. 半导体 .....                  | ( 34 )  |
| § 5. 热电子发射的热力学 .....            | ( 43 )  |
| § 6. 热电子发射的統計理論 .....           | ( 48 )  |
| § 7. 純淨金属的热电子发射的实驗研究 .....      | ( 54 )  |
| § 8. 电場对热电子发射的影响 .....          | ( 63 )  |
| § 9. 热电子的速度分布 .....             | ( 73 )  |
| § 10. 鍍鈹 .....                  | ( 80 )  |
| § 11. “碎鱗”理論 .....              | ( 89 )  |
| § 12. 鍍鋇 .....                  | ( 93 )  |
| § 13. 逸出功(单質阴极) .....           | ( 98 )  |
| § 14. 逸出功(薄膜阴极) .....           | ( 110 ) |
| § 15. 氧化物阴极 .....               | ( 118 ) |
| § 16. 自电子发射 .....               | ( 130 ) |
| § 17. 正常光电效应 .....              | ( 138 ) |
| § 18. 选择光电效应 .....              | ( 161 ) |
| § 19. 現代光阴极 .....               | ( 165 ) |
| § 20. 次級电子发射 .....              | ( 171 ) |
| § 21. 半导体、絕緣体和复合阴极的次級电子发射 ..... | ( 183 ) |
| § 22. 反常次級发射 .....              | ( 191 ) |
| § 23. 重粒子轰击下的电子发射 .....         | ( 196 ) |

|                        |       |
|------------------------|-------|
| § 24. 表面电离.....        | (200) |
| § 25. 负表面电离.....       | (220) |
| § 26. 离子撞击下重粒子的发射..... | (225) |
| § 27. “二分之三”定律.....    | (232) |
| § 28. 真空中的带电粒子流.....   | (242) |
| 参考文献 .....             | (252) |
| 人名对照表 .....            | (260) |

## § 1. 緒 論

固体电子理論的发展在历史上是跟金属导电問題分不开的。在研究这一問題时,提出了有关电子系統的各种性質的問題。

在經典統計理論中<sup>[2]</sup>,金属是由“充滿”电子气的离子点陣組成的。这电子气被認為具有經典分子运动論中的一般单原子气体所具有的那些特性,也就是說,电子被看做是服从經典力学的剛体小球。与此相应,每个电子的状态由三个坐标  $(x_i, y_i, z_i)$  和三个动量分量  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  来表征,而整个电子体系的微觀状态,則由所有电子的  $3N$  个坐标和  $3N$  个动量分量来表征。决定这种粒子集合的能量或动量分布定律的机理是粒子的相互“碰撞”。“碰撞”可理解为两个粒子例如第  $i$  个和第  $k$  个粒子的任何相互作用,結果是这两个粒子由动量为  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ ,  $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$  的起始状态跃迁到动量为  $(\xi'_i, \eta'_i, \zeta'_i)$ ,  $(\xi'_k, \eta'_k, \zeta'_k)$  的新状态。象大家所知道的,对这样粒子系統的統計平衡的研究得到粒子的能量分布定律,它由麦克斯韦公式来表示:

$$w(E) = Ce^{-\frac{E}{kT}}, \quad (1.1)$$

其中  $w(E)$  是粒子的能量处在能量  $E$  附近的单位能量間隔中的几率,  $k$  是玻耳茲曼常数,  $T$  是绝对温度。如果体系中含有  $N$  个粒子,其中有  $dN$  个粒子的能量处在能量間隔  $E$  到  $E + dE$  内,那么

$$w(E) = \frac{1}{N} \frac{dN}{dE}, \quad (1.2)$$

由此得

$$dN = CN e^{-\frac{E}{kT}} dE. \quad (1.3)$$

但是实验表明,微粒子的性質不是經典力学所描述的那样,它們与“质点”模型不一样。



所以很自然,在經典描述可以应用的假設下(即在对粒子性质有确定假設的情况下)获得的分布定律是与实验不相符的,这样的分布可能并不是电子集合所固有的。而量子力学对电子状态的描写跟实验則很相符合。根据量子力学,电子好像是“滿布”空中的“电子云”。这种电子云在某一点  $(x, y, z)$  上的密度  $\rho$  等于函数  $\Psi(x, y, z, t)$  的模数的平方:

$$\rho(x, y, z) = \Psi(x, y, z, t) \cdot \bar{\Psi}(x, y, z, t). \quad (1.4)$$

大家都知道,对于处在势函数为  $U(x, y, z)$  的,并且不随时间改变的力場中的单个粒子,上述函数具有下面的形式:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi_s(x, y, z) e^{-\frac{2\pi i E_s t}{h}}, \quad (1.5)$$

其中能量  $E_s$  和振幅函数  $\psi_s(x, y, z)$  由薛定諤方程

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U)\psi = 0 \quad (1.6)$$

来确定。从这个方程可以找出描写粒子各穩恆状态的所有可能的  $\psi_s$ , 同时,一般說来,也可以找出对应于这些状态的不連續的能量  $E_s$ 。因此对应于某一能量間隔  $\Delta E$  的不是无限多連續的各种可能的电子状态,而是有限的不連續的量子状态  $\Delta Z$ 。

如果有一激励力場(例如光波的电磁場)在  $t = 0$  的瞬时开始作用于处在第  $s$  个量子态(1.5)上的粒子(例如电子)时,那么在这一激励的影响下,粒子将要改变其状态,将从函数(1.5)所描述的穩恆状态,跃迁到具有下面形式的函数  $\Psi(x, y, z, t)$  的状态:

$$\Psi(x, y, z, t) = a_s(t) \psi_s + \sum_m a_m(t) \psi_m,$$

而且,  $a_s(t)$  在  $t = 0$  时等于 1, 它将逐漸减小;而  $a_m(t)$  在  $t = 0$  时等于零,以后将按某一規律随時間而变化。迭加系数的模数的平方  $a_m(t) \cdot a_m^*(t)$  ( $a_m^*$  是  $a_m$  的共轭复数)可以看做是粒子从  $s$  态跃迁到  $m$  态的几率。例如表征由矢势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 2\mathbf{b} \cos 2\pi[\nu t + (\mathbf{r}\mathbf{k})]$$

(式中  $\nu$  是頻率,  $\mathbf{k}$  是光波的波矢) 的光波的电磁場所引起的跃迁

的系数  $a_m(t)$ , 在量子力学中的表式为

$$a_m(t) = \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(E_s + h\nu - E_m)t} - 1}{\frac{2\pi i}{h}(E_s + h\nu - E_m)} M_{sm}, \quad (1.7)$$

式中  $M_{sm}$  是所谓从  $s$  态跃迁到  $m$  态的矩阵元, 它等于

$$M_{sm} = \int \psi_m^* (2\mathbf{a} \cdot \text{grad} \psi_s) e^{2\pi i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\tau \quad (1.7a)$$

(对整个体积积分)。

$N$  个粒子的系统的状态并不是用  $6N$  个数  $(x_i, y_i, z_i, \xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , 而是用函数  $\Psi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t)$  来描述的; 函数的振幅部分决定于系统的薛定谔方程

$$(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_N)\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N)]\psi = 0,$$

其中  $\Delta_i$  表示对第  $i$  个粒子坐标的二次微商的和。

但是, 在数学上, 这个方程是太复杂了, 因此, 固体晶体点阵中电子状态问题的解只好限于近似解。这些近似解的一般形式是

$$\begin{aligned} & \psi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, x_N, y_N, z_N) \\ &= \psi_{k_1}(x_1, y_1, z_1), \dots, \psi_{k_N}(x_N, y_N, z_N), \end{aligned} \quad (1.8)$$

其中函数  $\psi_{k_i}(x_i, y_i, z_i)$  决定于方程

$$\left[ -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta_i + U_R(x_i, y_i, z_i) + \sum_s U_{is} \right] \psi_{k_i} = E_{k_i} \psi_{k_i}, \quad (1.9)$$

这就是单个电子的薛定谔方程, 其中  $U_R$  是电子在晶体点阵的离子场中的势能;  $U_{is}$  是电子在第  $s$  个电子的“电子云”所造成的场中的势能,

$$U_{is} = \int \frac{e^2}{r_{is}} |\psi_{k_s}|^2 d\tau_s; \quad (1.10)$$

$\sum_s U_{is}$  是电子在除第  $i$  个电子之外全部“剩余”电子所造成场中的势能 (求和号上角的撇号表示对除  $s = i$  之外  $s$  的所有值求和)。

波函数  $\psi_{k_i}$  和能量  $E_{k_i}$  下角的标号  $k_i$  表征包含第  $i$  个电子的量子状

态,也就是代表全部(或四个,要是算上自旋坐标的话)量子数的总合。假定函数 $\psi$ 能够表示成(1.8)的形式(所谓“单电子近似”)是整个近代固体电子理论的弱点,但是没有这个假定就不可能解电子系统的方程,也不可能得到任何结论。然而就是这个假定也还没有消除所有困难,因为要找到 $\psi_k$ ,就需要先解出所有其余的 $\psi_{k'}$ ,而这又反过来要知道 $\psi_k$ 。

但是,如果这些数学上的困难不管是靠某些简化假定或其他方法而得到克服,那么在此近似下,由方程(1.9)求得的(1.8)形式的 $N$ 个解的乘积的各种不同组合[即(1.8)的乘积,它们相当于 $k_i$ 的所有可能的组合],将描述 $N$ 个电子的体系的所有可能状态和 $N$ 个电子在固体中按这些状态的所有可能分布,而 $N$ 个其中的一个给定组合 $k_i$ 则表征系统的一个确定的微观状态。这些可能的组合要受到泡利原理的限制。大家都知道,泡利原理规定,只能有两个电子处在对应于某一函数 $\psi_k$ 的给定量子状态中;此时电子的自旋必需是彼此反平行的。因此方程(1.9)的任何解 $\psi_k$ 在表式(1.8)中都不可能出现两次以上。所以如果把对应于某一给定的 $\psi_k$ 、但对应于电子自旋的不同取向的状态认为是不同的量子状态,那么在每一个这样的状态中,只能或者有一个电子,或者一个电子也没有。

因此,由于泡利原理,某一集合中电子所遭受的任何“碰撞”、任何相互作用,只能使电子从初始的量子态跃迁到未被其他电子占据着的量子态。

在考虑到泡利原理和在任一能量区间 $dE$ 中量子态数 $dZ$ 是有限的时,对统计平衡的电子系统的研究所得到的电子的能量分布定律不同于麦克斯韦分布,而是

$$\frac{dN}{dZ^*} = \frac{dN}{dZ - dN} = C' e^{-E/kT}, \quad (1.11)$$

其中 $dZ^* = dZ - dN$ 是未被电子“占据”的状态数;或

$$dN = \frac{dZ}{C e^{E/kT} + 1}. \quad (1.12)$$

这个定律称做费米分布定律。我们用 $w(E)$ 表示 $dZ$ 中某一状态

被电子“占据”的几率,即

$$w(E) = \frac{dN}{dZ},$$

就得到

$$w(E) = \frac{1}{C e^{E/kT} + 1}. \quad (1.13)$$

当  $dZ \gg dN$ , 即当  $dZ$  个量子态中只有极少一部分为电子所“占据”时, (1.11) 中的  $dN$  与  $dZ$  相較可以略去, 因而得到麦克斯韦公式, 这是个极限情况。

(1.12) 中的  $C$  决定于条件

$$\int dN = N, \quad (1.14)$$

其中  $N$  是系统中电子的总数, 而积分是对所有电子, 即对全部能量值  $E$  进行的。若令  $C$  的形式为  $C = e^{-\frac{E_0}{kT}}$ , 则 (1.13) 变成

$$w(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_0}{kT}} + 1}. \quad (1.15)$$

数量  $E_0$  称做电化学势级, 并且一般说来, 它是温度的函数:

$$E_0 = E_0(T).$$

从 (1.15) 可看到, 能量  $E = E_0$  的状态被电子“占据”的几率为  $1/2$ 。

当两个物体中的电子能够互相交换时, 譬如說, 当两个物体互相接触时, 它们的电子就构成一个统一的系统, 具有某一数值相同的电化学势级。因此, 在统计平衡建立以后, 构成这一系统的两个物体的电化学势级  $E_{01}$  和  $E_{02}$  的位置应该是相同的, 即

$$E_{01} = E_{02}. \quad (1.16)$$

## § 2. “自由”电子

在金属理论中, 根据索末菲<sup>[3]</sup>, 在一級近似中可认为金属晶体点阵中的离子場被“剩余”电子的場所抵消, 也就是說, 对于每个“給定的”电子在金属内部的[在方程 (1.9) 中的]势能是恒定的, 即

$$U_i(x_i, y_i, z_i) + \sum_s U_s \approx \text{常数}, \quad (2.1)$$

而且一般可以令它等于零。

势能只有在穿过金属边界时才增大,增大的数值等于势阈 $W_0$ 。在这种情况下,大家都知道,对于金属中的每个电子,方程(1.9)的解乘以时间因子  $e^{-\frac{2\pi i}{h}Et}$  就是全函数 $\Psi$ ,它具有下面的形式:

$$\Psi(x, y, z, t) = Ce^{\frac{2\pi i}{h}(x\xi + y\eta + z\zeta - Et)} = Ce^{\frac{2\pi i}{h}(\mathbf{p}\mathbf{r})} \cdot e^{-\frac{2\pi i}{h}Et}, \quad (2.2)$$

它是具有波矢量为

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{h}; \quad |\mathbf{k}| = \frac{1}{\lambda} \quad (2.3)$$

的德布罗意平面波,其中  $\mathbf{p}(\xi, \eta, \zeta)$  是粒子的动量,与其动能 $W$ 的一般关系式为

$$W = \frac{1}{2m} p^2. \quad (2.4)$$

因此,这一理论近似地认为金属中的电子是“自由的”。

对于无限大的金属,  $\xi, \eta, \zeta$  可以有从  $-\infty$  到  $+\infty$  的任意数值。对于有限大的金属,边界条件使动量的诸分量量子化,也就是使  $\xi, \eta, \zeta$  数值的连续谱分裂为一些不连续谱。如果函数  $\psi(x, y, z)$  在物体外比物体大小小得多的一段距离内就变为零,那么边界条件成为卡尔曼-波恩周期性条件,这条件同样使方程的种种解由连续的分裂为不连续的。这一条件要求线度为  $L$  的立方金属块的函数  $\psi_i$  是坐标的周期函数,其周期为  $L$ , 即

$$\psi(x, y, z) = \psi(x + c_1 L, y + c_2 L, z + c_3 L), \quad (2.5)$$

其中  $c_1, c_2, c_3$  是任意整数。

事实上,只要

$$\xi = \frac{h}{L} s_x, \quad \eta = \frac{h}{L} s_y, \quad \zeta = \frac{h}{L} s_z \quad (2.6)$$

(其中  $s_x, s_y, s_z$  是任何给定的正的或负的整数), (2.2) 在任意的  $c_1, c_2$  和  $c_3$  下都满足条件 (2.5)。这样,对应于这些量子状态

的动量矢的末端在动量空间里构成一个立方点阵(图1),其点阵常数为  $\hbar/L$ ,立方体元的体积为  $\hbar^3/L^3$ . 因此对应于动量区间  $d\xi d\eta d\zeta$  的可能量子状态数将为

$$dZ_p = ds_x ds_y ds_z = \frac{L^3}{\hbar^3} d\xi d\eta d\zeta.$$

一个处在由三个量子数  $s_x, s_y, s_z$  所表征的各可能状态之一中的电子的动能  $W$  等于

$$\begin{aligned} W(s_x, s_y, s_z) &= \frac{1}{2m} p^2 = \\ &= \frac{\hbar^2}{2mL^2} (s_x^2 + s_y^2 + s_z^2). \end{aligned} \quad (2.7)$$

对应于能量区间  $W$  到  $W + dW$  的量子态数  $dZ_W$  决定于动量空间内的阵点数,这些动量处在由半径为

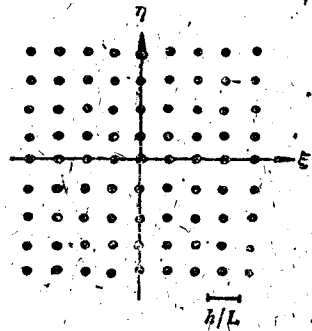


图 1

$$p = \sqrt{2mW} \text{ 和 } p + dp = \sqrt{2mW} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2m}{W}} dW$$

的两个球所包围着的壳层中,壳层的体积为

$$4\pi p^2 dp = 2\pi (2m)^{3/2} \sqrt{W} dW,$$

这就是说

$$dZ_W = L^3 \frac{2\pi (2m)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{W} dW. \quad (2.8)$$

再考虑电子自旋取向的两个可能性,就得到对应于动量区间  $d\xi d\eta d\zeta$  或能量区间  $dW$  内的电子的量子态的总数,它等于

$$dZ_p = \frac{2L^3}{\hbar^3} d\xi d\eta d\zeta, \quad (2.9)$$

$$dZ_W = L^3 \frac{4\pi (2m)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{W} dW. \quad (2.10)$$

我们把这个表式代入费米公式(1.15),就确定出能量处在  $W$  到  $W + dW$  之间的电子数为

$$dN_w = L^3 \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \frac{\sqrt{W} dW}{e^{\frac{W - W_i}{kT}} + 1} \quad (2.11)$$

这里用  $W_i$  来表示对应于公式(1.15)中能级  $E_0$  的动能。在图 2 和 3 中画出了  $T = 0$  (实线) 和  $T > 0$  时能级  $W$  被充填的几率曲线

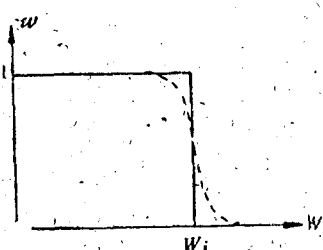


图 2

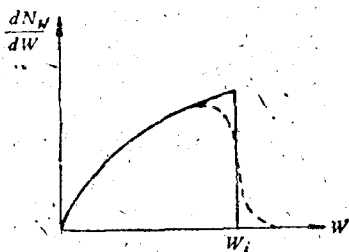


图 3

$$w(W) = \frac{dN_w}{dZ_w}$$

和能量在  $W$  到  $W + dW$  之间的电子数(与能量区间  $dW$  的比)

$$\frac{dN_w}{dW}$$

作为能量  $W$  的函数的曲线。同样,把(2.9)代入(1.12),就确定出动能矢的末端在区间  $d\xi d\eta d\zeta$  内的电子数:

$$dN_p = \frac{2L^3}{h^3} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{e^{\frac{W(\xi, \eta, \zeta) - W_i}{kT}} + 1}, \quad (2.12)$$

其中

$$W(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2m} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

能量  $W_i$  可以由条件(1.14)

$$\int dN = N$$

求出,上式中  $N$  是体积  $L^3$  中的总电子数。实际上,在极端情况下,即对于未简并化的或强烈简并化的气体,  $W_i$  是很容易求出的。只

要是在(1.14)积分中包含的所有能量值 $W$ 下, (2.11)[或(2.12)]的分母中的指数项远大于1, 即  $dN \ll dZ$ , 我們便說这种气体是未簡并化的。可以証明, 这发生在

$$T \gg T_c \quad (2.13)$$

时, 其中  $T_c = \frac{W_i}{k}$ , 即所謂簡并化温度。此时(2.11)或(2.12)的分母中的1可以略去, 因而費米分布变为通常的麦克斯韦分布:

$$dN_W = L^3 \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3} e^{\frac{W_i}{kT}} e^{-\frac{W}{kT}} \sqrt{W} dW.$$

代入(1.14), 得

$$\begin{aligned} e^{\frac{W_i}{kT}} &= \frac{L^3}{N} \cdot \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty e^{-\frac{W}{kT}} \sqrt{W} dW = \\ &= \frac{4\pi(2mkT)^{3/2}}{nh^3} \int_0^\infty e^{-x} \sqrt{x} dx, \end{aligned}$$

即

$$e^{\frac{W_i}{kT}} = \frac{2}{nh^3} (2\pi mkT)^{3/2}, \quad (2.14)$$

其中  $n = \frac{N}{L^3}$  是电子的数字密度。

另一极端情况是气体強烈簡并化的情况, 其特点是

$$T \ll T_c \quad (2.15)$$

此时(1.14)中的  $\int dN$  可以按  $T/T_c$  的(偶次)幂展开成級数, 同时相应地可以确定出  $W_i$ , 并表为  $T/T_c$  的幂級数。  $\int dN$  的展式的第一項相当于  $T/T_c$  的零次幂, 显然, 它确定了  $T=0$  时  $W_i = W_0$  的值。此值很易求得, 只要一开始在  $\int dN$  中令  $T=0$ 。此时若  $W < W_i$  則  $dN = dZ$ ; 若  $W > W_i$ , 則  $dN = 0$ , 这就是說, 电



子占滿了能量为  $W = 0$  到  $W_{i_0}$  的所有状态,而在能量更高的状态中一个电子也沒有。

我們把(2.10)的  $dZ_W$  值代入

$$\int dN = \int_0^{W_{i_0}} dZ_W,$$

就得到电子数  $N$  为

$$N = \frac{2 \times \frac{4\pi}{3} (2mW_{i_0})^{3/2}}{\left(\frac{h}{L}\right)^3},$$

这正是半径为  $p_m = \sqrt{2mW_{i_0}}$  的球内以  $h/L$  为点陣常数的立方点陣的陣点数的两倍。由此得

$$W_{i_0} = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3}. \quad (2.16)$$

如果  $T > 0$  (但仍然是  $T \ll T_c$ )，則在計算  $N = \int dN$  时应考虑正比于  $T/T_c$  幕的各项。可以証明,在二級近似下将有

$$W_i = W_{i_0} \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right], \quad (2.17)$$

其中  $T_c = \frac{W_{i_0}}{k}$ , 由(2.16)得到

$$T_c = \frac{h^2}{2mk} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3}. \quad (2.18)$$

根据(2.13)和(2.18), 費米分布和麦克斯韦分布之間的差异(也就是泡利限制的影响)随温度的增高而变小,但当温度一定时,則随粒子的数值密度的减小和质量  $m$  的增大而变小。反之,如果气体粒子的密度  $n$  很大,而质量  $m$  又很小,則在較高的温度下,也会发生簡并化。

一般的原子和分子气体即使在极大的压力和很低的温度下也很少簡并化[也就是說,根据(2.18),对于这些气体  $T_c$  近于绝对零度]。对于金属內的电子气則有完全两样的图象:由于电子的密度极大( $n \sim 10^{22}$  厘米<sup>-3</sup>),而质量  $m$  很小,因此这里的簡并化临界温