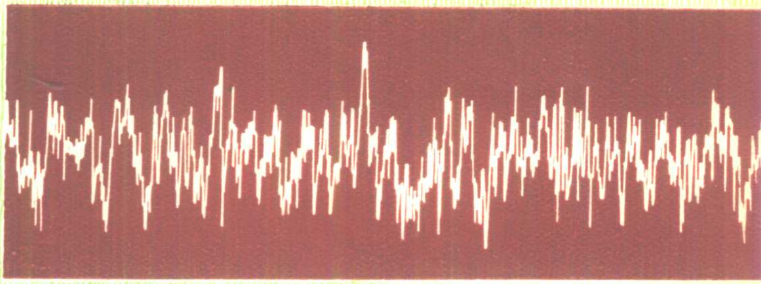
随机振动分析



〔日〕星谷胜著　常宝琦译　王松樵校

地震出版社

随机振动分析

〔日〕星谷胜 著

常宝琦 译

王松樵 校

地震出版社

1977

星　谷　勝
確率論手法による振動解析

随机振动分析

〔日〕星谷胜 著
常宝琦 译
王松樵 校

地震出版社 出版
北京三里河路54号
北京市印刷三厂印刷
新华书店北京发行所发行
全国各地新华书店经售

850×1168　1/32　　8印张　183千字
1977年11月第一版　1977年11月第一次印刷
统一书号：13180・33　定价：1.00元

目　　录

第一章　绪　论

结构物必须合理地设计和施工，以保证在其使用年限内的功能和安全性。

结构物的动力分析，是通过推算随时间变化的荷载作为输入的结构体系的反应特性的方法来评价结构物的安全性，以此来验证按静力等价荷载体系设计的结构物。

动力分析过程通过下述三阶段进行:

1. 荷载体系的模型化;

2. 结构物的模型化;

3. 安全性的评价。

其目的虽有不同，但要求尽可能作接近实际荷载和结构物的理想化和三阶段均衡的合理分析。

过去,动力分析是用确定论方法进行的。例如,在地震加速度波的反应分析中，采取了以历史强震记录作为荷载体系验证其反应的形式，作为评价安全性的方法。强震记录无论怎样复杂地随时间变化,但由于是实际发生的记录,所以是全部信息。因此，用它评价安全度就会得出不是100% 安全就是100% 破坏的结论。目的是要保证结构物在未来使用年限内的安全，但用这种方法则完全不能验证结构物对于难以预测的地震的安全性。经验上的某种程度的定性评价虽有可能,但不能作定量评价。

在遭受地震振动、风荷载、波浪压力等自然界影响的结构物上,特别需要注意的是这些因素共同的统计性质。例如,同一地基上的地震仪即使遭受相同震级的地震振动，也决不会重画出相同的时间过程。就是说,具有非重复性。可以认为,特定的记录是受概率法则支配而出现的。

随机振动理论就是用概率论的方法掌握具有这种非重现性

的、振幅随时间作复杂变化的动荷载，定量评价结构安全度。

所以，在随机振动分析中，将荷载体系作为随机过程加以模型化，并用概率来定量评价结构物在荷载作用下具有何种程度的安全度。对于结构物本身的随机量问题，虽然也有把荷载和结构的统计性质加以比较研究的，但通常只把荷载作为随机量处理。

本书就是用概率论方法处理振动分析（随机振动理论）的。

第二章解释随机过程理论。正确理解其概念是特别重要的。通常，复杂波形容易被认为是随机振动，但受概率支配而产生的波形，即使是简单波也是随机振动现象。另一方面，在确定波的情况下，无论怎样复杂，全部特性也都是唯一确定的，因此不能称为随机振动。所谓随机是概率的意思，不是复杂的意思。

在随机振动分析中，当结构体系很复杂时，可以使用理论上清晰的分析方法——模拟法（Monte Carlo 法）。在第三章把随机过程的模拟法系统地加以汇总。很多方法都是作者研究的。

从第四章到第六章是单自由度体系、多自由度体系以及非线性体系的分析方法。

结构物的定量安全度评价是动力可靠性问题的最重要的一个问题。我们认为，受随机扰动的结构物的反应，在其持续时间内能处于一定值范围内时，就基本上保证了安全性，用其概率能定量地评价安全度。即，用随机破坏（chance failure）的准则研究可靠性。这些，作为随机振动理论中首次偏移概率（first excursion probability）问题在第七章中加以说明。

第八章处理具有随机不确定量的结构体系的振动理论。第九章作为应用例，从随机振动理论出发研究如何评价地震反应的分析方法。

在理解本书上，最重要的将是第二章、第三章所研究的随机过程的诸法则及理论，对于充分了解概率论理论基础的读者来说，将是很容易理解的；倘若概率论基础知识不够，就请参考拙著《用概率方法的结构分析》（鹿岛出版会）的第二章。

第二章　随机过程理论

2.1　随机过程

结构物所受荷载中，有强度随时间变化的地震荷载，风荷载或水下结构物所受的波浪压力等等。这些动荷载的共同特点是，它们不仅表现出随时间的复杂变化，而且两次荷载不会重现同一波形。现以某地所发生的地震为例。图 2-1 是 1940 年爱尔森特罗地震的水平加速度记录的南北分量。这个波形不仅随时间作复杂的变化，而且所包含的频率成分和全部持续时间等，也是受当地地基性状、震源距离、地震震级强烈影响的极其复杂的现象。然而，一个记录虽然很复杂，但由于是作为时间 t 的确定函数给出，所以可以知道其全部特性。例如，地震发生后4秒时的振幅值是确定的，因此，在道理上对于这种特定地震，设计安全的结构物是可能的。可是用另一种方法来看一下这个地震，假设具有和图 2-1 的爱尔森特罗地震相同能量的地震，在同一震源再次发震时，即使周围环境

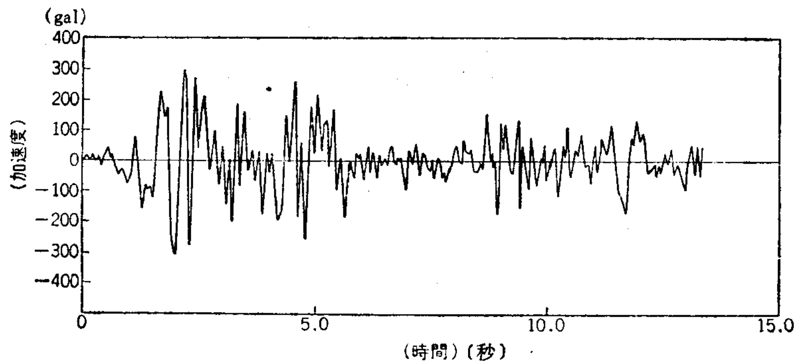


图 2-1　爱尔森特罗地震的水平加速度南北分量(1940 年 5 月)

不变，设置于同一地点的地震仪也决不会重现和图 2-1 完全相同的加速度记录。因此，对于图 2-1 的地震加速度来说，即使结构物是安全的，但对于未来可能发生的一切地震来说，却不能保证该结构物的安全性。因此就要考虑未来可能发生的所有地震波，掌握该地震波集合的特性，对于结构物的反应也应作为集合的特性从统计概率上评价。

随机过程(random process 或 stochastic process)是从集合论上掌握具有这种非重复性的复杂现象，特别是以时间 t 的函数表示的振动现象作为对象时，称为随机振动(random vibration)。本书虽然主要是研究作为随机振动的随机过程，但需要注意的是，随机过程也可以不是时间 t 的函数，也常有用空间坐标的函数给出的随机过程。

上述的想法表明，即使在同一环境下，实际产生的波形是完全不能预测的，是受概率支配而发生的。这种情况下可能产生的所有现象的集合称为母集合（ensemble）各个波形称为实际函数（realized function）或抽样函数（sample function）。随机振动是要通过分析母集合的统计量来求解非确定现象的。细节请参照文献[1]。

2.2 随机过程的基础

随机过程用 $x(t)$ 表示时，这个 $x(t)$ 是指母集合全体。其抽样函数若取为 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 时，则可表为

$$x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\} \tag{2-1}$$

因此，根据不同情况，随机过程 $x(t)$ 可作如下解释：

1. t 取为变量，把 $x(t)$ 看作是母集合时，$x(t)$ 意味着一组时间函数的集合，即式(2-1)的意义。

2. t 虽为变量，但 $x(t)$ 是 1 个抽样函数时，例如 $x(t) = x_3(t)$ 时，则 $x(t)$ 成为 1 个时间函数。

3. 若 t 固定，则母集合 $x(t)$ 成为随机变数的集合。

4. t 固定，$x(t)$ 表示 1 个抽样时，可以认为 $x(t)$ 表示 1 个变

数。

另外，$x(t)$ 的 t 虽然通常表示时间，但如前述，也可以是空间坐标。

首先，研究一下随机过程 $x(t)$ 在 $t = t_1$ 时的相加平均。

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k(t_1) \tag{2-2}$$

当 n 充分大时，相加平均是随机过程 $x(t)$ 在 t $= t_1$ 时的母集合平均 (ensemble average) 或期望值 (expectation)。若随机变数 $x(t_1)$ 的概率密度函数取为 $f(x_1)$，则 $x(t_1)$ 的期望值由下式给出。

$$E[x(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1) dx_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k(t_1) \tag{2-3}$$

同样地，$x(t_1)$ 的均方值 (mean square value) 由下式给出。

$$E[x^2(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 f(x_1) dx_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2(t_1) \tag{2-4}$$

因而根据式(2-3),(2-4)，$x(t_1)$ 的方差 (variance) 为

$$\mathrm{Var}[x(t_1)] = \sigma_{x1}^2 = E[x^2(t_1)] - E[x(t_1)]^2 \tag{2-5}$$

$x(t)$ 的自相关函数 (autocorrelation function) $R_x(t_1, t_2)$ 用共概率密度函数 $f(x_1, x_2)$ 表为

$$R_x(t_1,t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1,x_2) dx_1 dx_2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k(t_1) x_k(t_2) \tag{2-6}$$

自相关函数通常如上式用 t_1 和 t_2 的函数给出。

协方差函数 (covariance function) 由下式给出。

$$\mathrm{Cov}_x(t_1,t_2) = \kappa_{x_1x_2} = E[\{x(t_1) - E[x(t_1)]\}\{x(t_2) - E[x(t_2)]\}]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{x_1 - E[x(t_1)]\}\{x_2 - E[x(t_2)]\} \times f(x_1 x_2) dx_1 dx_2$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \{x_k(t_1) - E[x(t_1)]\} \cdot \times \{x_k(t_2) - E[x(t_2)]\} \tag{2-7}$$

根据(2-6)、(2-7)

$$\mathrm{Cov}_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) - E[x(t_1)]E[x(t_2)] \tag{2-8}$$

当 $t_1 = t_2 = t$ 时,有如下关系

$$\mathrm{Var}[x(t)] = \mathrm{Cov}_x(t, t) = R_x(t, t) - E[x(t)]^2 \tag{2-9}$$

2.3 平稳随机过程

在前节；学习了随机过程 $x(t)$ 的基本统计量。在随机过程 $x(t)$ 的所有抽样函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 给出时，或者概率密度函数，共概率密度函数给出时，就可以算出这些统计量。当然仅用这些统计量还不能充分说明复杂的随机过程。本节讨论最重要且基本的随机过程——平稳随机过程(stationary random process)。工程领域中,很多受概率支配而发生的现象,往往是作为平稳随机过程模型化的。

随机过程 $x(t)$ 的所有统计量不随时间变化时，称为严格意义(strict sence)上的平稳随机过程。因此，$x(t)$ 和 $x(t+\tau)$ 对于任何 τ 值都具有相同统计量。即，$x(t)$ 的 n 次共概率密度函数应满足 .

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_{1+\tau}, x_{2+\tau}, \cdots, x_{n+\tau}) \tag{2-10}$$

式中,x_1 与式(2-3)一样,表示 $x(t_1)$ 的意思。$x_{1+\tau} = x(t_1 + \tau)$。

根据式(2-10),$x(t)$ 的概率密度函数为:

$$f(x_1) = f(x_{1+\tau}) \tag{2-11}$$

由于它对所有的 τ 都成立，所以 $f(x_1)$ 与时间 t 无关。因此可表为

$$f(x_1) = f(x) \tag{2-12}$$

所以根据式(2-3)

$$E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 常数 \tag{2-13}$$

2 次共概率密度函数为

$$f(x_1, x_2) = f(x_{1+\tau}, x_{2+\tau}) \tag{2-14}$$

当取 $\tau = t_2 - t_1$ 时，上式变为

$$f(x_1, x_2) = f(x_{1+\tau}, x_{1+\tau+\tau}) \tag{2-15}$$

可见这仅仅是时间差 τ 的函数。

因此，式(2-6)的自相关函数

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1) = R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] \tag{2-16}$$

是可以只用 τ 的函数表示的。

在工程上，除上述严格意义的平稳性以外，$x(t)$ 仅满足式(2-13)和(2-16)时，称为广义的平稳随机过程。本书中除了特别注明的以外，都是把满足式(2-13)和(2-16)的随机过程 $x(t)$作为平稳随机过程的。

不能满足式(2-13)和(2-16)时，$x(t)$ 则为非平稳随机过程(nonstationary random process)。

平稳随机过程 $x(t)$ 的自相关函数 $R_x(\tau)$ 有几个重要特性。非负号函数 $\{x(0) \pm x(\tau)\}^2$ 的期望值

$$E[\{x(0) \pm x(\tau)\}^2] \geqq 0 \tag{2-17}$$

展开，得

$$E[x^2(0)] \pm 2E[x(0)x(\tau)] + E[x^2(\tau)] \geqq 0 \tag{2-18}$$

由于 $x(t)$ 是平稳随机过程，所以

$$E[x^2(0)] = E[x^2(\tau)] = R_x(0), E[x(0)x(\tau)] = R_x(\tau)$$

因此，式(2-18)为

$$R_x(0) \pm R_x(\tau) \geqq 0$$

即

$$R_x(0) \geqq |R_x(\tau)| \tag{2-19}$$

式(2-19)表示自相关函数的绝对值经常小于均方值。

其次，根据式(2-16)

$$R_x(-\tau) = E[x(t)x(t-\tau)]$$

若把时间平移，$t = t + \tau$，则

$$R_x(-\tau)=E[x(t+\tau)x(t)]=R_x(\tau) \tag{2-20}$$

即自相关函数是 τ 的偶函数。

2.4 随机过程的连续性、微分、积分

在确定论中，一般函数的连续性，微分，积分诸法则利用极限的概念可唯一地得到确定，但随机过程包含有随机变数，因而上述诸法则不能作同样的定义。

在研究随机过程 $x(t)$ 时，由于是想求得包含在 $x(t)$ 的所有抽样函数的集合的连续性、微分、积分，如果各个抽样函数的连续性、微分、积分是可能的，当然不成问题；但即使有一个抽样函数不可能，就需要定义在某种条件下的连续性。

2.4.1 连续性

若随机过程 $x(t)$ 的所有抽样函数都满足

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x(t+\varepsilon)=x(t) \tag{2-21}$$

$x(t)$ 称为在时间 t 以概率等于 1 连续。

若 $x(t)$ 在时间 t

$$\lim_{\tau\to 0} E[\{x(t+\tau)-x(t)\}^2]=0 \tag{2-22}$$

则称 $x(t)$ 在时间 t 在均方意义上连续。

按照式(2-6)的自相关函数 $R_x(t_1,t_2)$ 的定义，由于

$$E[\{x(t+\tau)-x(t)\}^2]=R_x(t+\tau,t+\tau)-2R_x(t,t+\tau)+R_x(t,t) \tag{2-23}$$

若 $R_x(t_1,t_2)$ 在 $t_1=t_2=t$ 连续，当 $\tau\to 0$ 时，由于上式的右侧近于0，故 $x(t)$ 在时间 t 在均方值意义上连续。

式(2-22)成立时，由于

$$E[\{x(t+\tau)-x(t)\}^2]\geqq E^2[x(t+\tau)-x(t)]$$

$$\lim_{\tau\to 0} E[x(t+\tau)-x(t)]=\lim_{\tau\to 0}\{E[x(t+\tau)]$$

$$-E[x(t)]\}=0$$

所以

$$\lim_{\tau \to 0} E[x(t+\tau)] = E[x(t)] \tag{2-24}$$

即,若在均方值意义上 $x(t)$ 连续,则 $x(t)$ 的期望值也连续。

式(2-24)也可以写成[2]

$$\lim_{\tau \to 0} E[x(t+\tau)] = E[\lim_{\tau \to 0} x(t+\tau)] \tag{2-25}$$

即,期望值 $E[\ ]$ 和极限记号 $\lim\limits_{\tau \to 0}$ 可以互换。

从式(2-23)可知,在 $x(t)$ 为平稳随机过程条件下, $R_x(\tau)$ 在 $\tau=0$连续时,$x(t)$ 为连续。

2.4.2 微分

随机过程 $x(t)$ 的微分由下式定义

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x(t+\varepsilon)-x(t)}{\varepsilon} \tag{2-26}$$

若对于 $x(t)$ 的所有抽样函数上式的极限都存在,则 $\dot{x}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ 有和通常微分相同的意义。若在均方值意义上上述极限存在,则称在均方值意义上 $x(t)$ 可微。

即,若满足

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E\left[\left\{\frac{x(t+\varepsilon)-x(t)}{\varepsilon} - \dot{x}(t)\right\}^2\right] = 0 \tag{2-27}$$

的 $\dot{x}(t)$ 存在,则 $x(t)$ 在均方值意义上可微。

$x(t)$ 在平稳随机过程条件下,若 $R_x(\tau)$ 为二次可微时,则 $x(t)$ 对 t 可微。

根据式(2-26)

$$E[\dot{x}(t)] = E\left[\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x(t+\varepsilon)-x(t)}{\varepsilon}\right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{E[x(t+\varepsilon)-E[x(t)]}{\varepsilon}$$

$$= \frac{dE[x(t)]}{dt} \tag{2-28}$$

从上式可知,$x(t)$ 的导函数的期望值等于 $x(t)$ 的期望值的微分。

$\dot{x}(t)$ 的自相关函数取为

$$R_{\dot{x}}(t_1,t_2) = E[\dot{x}(t_1)\dot{x}(t_2)] \tag{2-29}$$

式中，$\dot{x}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

两个随机过程 $x(t)$ 和 $\dot{x}(t)$ 的互相关函数（cross correlation function）由下式定义(关于互相关函数将在 2.7 节叙述)

$$R_{x\dot{x}}(t_1,t_2) = E[x(t_1)\dot{x}(t_2)] \tag{2-30}$$

由于

$$E\left[x(t_1)\frac{x(t_2+\varepsilon)-x(t_2)}{\varepsilon}\right] = \frac{R_x(t_1, t_2+\varepsilon)-R_x(t_1, t_2)}{\varepsilon}$$

取 $\varepsilon\to 0$，则

$$R_{x\dot{x}}(t_1, t_2) = \frac{\partial R_x(t_1, t_2)}{\partial t_2} \tag{2-31}$$

同样地，由于

$$E\left[\frac{x(t_1+\varepsilon)-x(t_1)}{\varepsilon}\dot{x}(t_2)\right] = \frac{R_{x\dot{x}}(t_1+\varepsilon, t_2)-R_{x\dot{x}}(t_1, t_2)}{\varepsilon}$$

当取 $\varepsilon\to 0$ 时，

$$R_{\dot{x}}(t_1, t_2) = \frac{\partial R_{x\dot{x}}(t_1, t_2)}{\partial t_1} \tag{2-32}$$

根据式(2-31)、(2-32)得

$$R_{\dot{x}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 R_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \tag{2-33}$$

即，$\dot{x}(t)$ 的自相关函数可按 $x(t)$ 的自相关函数对于 t_1, t_2 偏微分得出。

$x(t)$ 为平稳随机过程时，在式(2-30)—(2-33)中取 $t_2-t_1=\tau$，得

$$\left.\begin{aligned} R_{x\dot{x}}(\tau) &= E[x(t)\dot{x}(t+\tau)] = +\frac{dR_x(\tau)}{d\tau} \\ R_{\dot{x}x}(\tau) &= E[\dot{x}(t)x(t+\tau)] = -\frac{dR_x(\tau)}{d\tau} \end{aligned}\right\} \tag{2-34}$$

因此