概率与信息

〔苏联〕A. M. 雅格洛姆　И. M. 雅格洛姆合著

上海科学技术出版社

內 容 提 要

信息論是近代数学的一个分支，在通訊技术中和其他許多方面如生物、語言等都有应用．本书是关于信息論的通俗讀物，由概率、熵和信息、以及用計算信息来解决某些邏輯問題，談到信息論对沿通訊綫路傳輸消息問題的应用；深入淺出，有很多例題和附录等．

本书可供大专理工科和高中高年級师生閱讀；电訊等工程技术人員可作参考．

ВЕРОЯТНОСТЬ и ИНФОРМАЦИЯ

А. М. Яглом и И. М. Яглом

ФИЗМАТГИЗ 1960

概 率 与 信 息

吳 茂 森 譯

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海市印刷六厂印刷　　新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32　印張 8 18/32　排版字数 212,000

1964 年12月第 1 版　1964 年12月第 1 次印刷

印数 1—7,000

統一书号 13119·602　定价（科六）1.20 元

目　录

第一章 概　率

§1 概率的定义

在实际中經常遇到这种实驗（或者說是試驗，观察，过程），它們可以依我們不知道或不能估計的各种情况而出現不同的結果．例如，在擲骰子（每面分别刻有1到6点的均匀小立方体）时，我們不可能預先知道哪一面朝上．因为这和許多未知的情况有关（擲骰子时手动作的情况，在擲的一瞬間骰子的状态，擲骰子用的桌面的特点等等）．也不可能預計某一年度的中学毕业生有多少人志愿升入某个学院；在一批产品中有多少廢品，或者明年会有多少雨天；不可能知道中学生在即将做的作业中会出現多少錯誤，或者在即将进行的擲硬币游戏中，哪一面朝上；連擲硬币两次是否出現两次正面；射击时能否打中靶心等等．不用說，这类的例子可以举出很多．

利用数学来研究这类現象是凭借下面的事实的：在許多情形中，当在同一条件下多次重复同一个实驗时，所考察結果出現的頻率（即在实驗中这个結果被观察到的次数与所进行的实驗总次数之比）在任何时候大致都保持同一数值，它接近于某一常数 P．例如，大家知道，对于某个射手，在确定的射击条件下击中目标的頻率，照例几乎总是大致相同的，只是偶尔与某个平均数字多少偏离得大一些（当然，过一个时期，这个平均数字可能改变——这时就說射手在射击中有了进步，或者相反，退步了）．同样，擲骰子时出現六点的頻率，或在一定的生产条件下的廢品率，当大批重复相应的"实驗"（擲骰子或生产給定的产品）时，通常都很少发生变化．由此就可断定：在每种情形都存在着一个确定的常数，它客观地表征

了射击、擲骰子、生产产品等等过程本身，在一长串“实驗”中的相应結果(射击目标，出現六点，出現廢品)的平均頻率永远在它附近摆动(不和它偏离太大)．这个常数称为所考虑事件的**概率**．可同样定义属于数学、力学、物理学、技术、生物学等各种不同領域里的一系列其他問題中的概率．研究概率的性质及其应用的科学称为**概率論**．

由上所述，某个事件的概率可以根据一长串实驗的結果来近似地估計．但是，概率的存在性本身，当然一点也不依賴于我們是否进行实驗．由此就会产生很自然的問題：即关于不用事先进行相应的实驗就能找出各种不同事件的概率的方法問題；掌握这些方法后，我們就可以預先作出关于随后的实驗結果的确定推断，这样，就可开辟概率概念对自然科学的应用的更大可能性．我們不在这里考虑这个問題的全部，而只限于一个最簡单的例子，然而对它可以引入关于确定概率的比較广泛的問題❶．

設有某个箱子(或者象經常在这种情形所說的有小洞的箱子)．其中装有充分混匀了的 10 个彼此仅只顏色不同的球：5 个白球，3 个黑球，2 个紅球．我們随便从箱子中摸出一个球；試問它是这种或那种顏色的概率各为多少？十分明显，这里我們在 10 次中有 5 次机会摸到白球，3 次机会摸到黑球，2 次机会摸到紅球；换句話說，摸到白球、黑球和紅球的概率各等于 $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$，$\frac{3}{10}$ 和 $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$．而事实上，假若我們多次进行相应的实驗(每次实驗完成后，把摸出的球重新放回到箱子中，并把所有的球充分混匀)，就会相信，摸出白球大約占全部摸出的球的 50%，黑球占 30%，紅球占 20%．自然，当箱子中装有其他任何个数混合均匀的不同

---

❶ 对希望更切实地了解概率論和它应用到自然科学的途徑的讀者，可以推荐下列几本书：Б. В. 格涅堅科 (Гнеденко) 和 А. Я. 辛欽 (Хинчин) [11]．Е. Б. 邓肯 (Дынкин) 和 В. А. 烏斯平斯基 (Успенский) 的书[12] 第三章和 А. М. 雅格洛姆和 И. М. 雅格洛姆的书[13]第一章的第六节是讲的概率論的个别問題．

颜色的球时，求概率的問題也可同样簡单地解决.

現在我們再来考虑几个問題，其概率的确定可归結到同样的“关于箱子問題”.

問題 1 当任意擲硬币时，“正面”朝上的概率是多少？

显然，这个問題等价于下面的問題. 設有装有两个球的箱子，其中一个球上写有“甲”字，而第二个球上写有“乙”字（当然，可分别用两个不同顏色的球，例如白球和黑球，来代替写甲和乙的球）. 当从箱子中随意摸出一个球时，它是有“甲”字的球的概率是多少？显然，这里所求的概率等于 $\frac{1}{2}$.

問題 2 擲骰子时出現能被 3 除尽的点数的概率是多少？

不用擲骰子，我們可以說从装有分别写着数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 的六个球的箱子中摸出一个球. 現在假使把第 3 个球和第 6 个球涂成黑的，剩下的球是白的，那么我們就归結到摸出黑球的概率問題（3 和 6 两个数能用 3 除尽，而其余的不能被除尽）. 显然，这里所求的概率等于 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

問題 3 已知在大学生的联欢晚会中，第一所大学有二百名学生参加，第二所大学有二百五十名参加，第三所大学有三百名参加. 試問：你偶然和他談話的大学生是第二所大学的学生的概率等于多少？

显然，这个問題等价于下面的問題. 設有装有 750 个球的箱子；其中 200 个是白的，250 个是黑的，300 个是紅的. 当随意从箱子中摸出一个球时，它是黑球的概率等于多少？显然，这个概率等于 $\frac{250}{750}=\frac{1}{3}$.

現在，我們要力求找到解决这些問題的一般原则. 在上述三个問題之前的例子中，把箱子中各球充分混匀，而不用眼看随意地摸取，这种条件意味着我們有相等的根据可以希望摸出箱子中任何一个球，或者换句話說，摸出所有的球是**等概的**. 因为在这个例

子里有 10 个球,那么我們自然认为,对于每个球,摸出它的概率都等于 $\frac{1}{10}$. 进而,因有 5 个白球,所以摸出白球的概率等于 $\frac{5}{10}$.

完全同样的討論也可得到上述每一个問題的答案. 例如,在擲骰子的情形,我們曾认为立方体的六面出現任何一面是等概的;正因为如此,我們可以用从装有 6 个球的箱子中摸一个球的問題来代替擲骰子的問題. 但是六面中恰恰有两面满足問題的条件;这两面中不管哪一面出現,其概率等于 $\frac{2}{6}$.

若假定所考慮的**实驗**(从箱子中摸取球,擲硬币或擲骰子,同参加大学生晚会的某一个大学生談話等等)可以有 n 个等概的**結局**,那么这些結局中每一个的概率应认为都等于 $\frac{1}{n}$. 現在我們来考慮由实驗結果所决定的任何事件(从箱子中取白球,擲硬币时出現"正面"或擲骰子时出現偶数点,同第二所大学的大学生談話等等). 若这事件在 n 个可能的等概实驗結局中有 m 次出現,而在其余的 $n-m$ 个結局中不出現,那么它的概率就取作 $\frac{m}{n}$. 換句話說,某个事件的概率等于有利于該事件的等概結局数与等概結局总数之比. 这个加了重点的命題可以作为概率概念的定义;这时各个結局的等概性,应該在叙述所进行的实驗时預先說明(使擲的骰子有严整的立方体形式,并用均匀的材料制造,或使球混匀,且除了顏色外沒有任何区別,都正是为了这个目的). 虽然这样的定义沒有包括計算概率的某些重要情况(例如参看 Б. В. 格涅坚科和 А. Я. 辛欽的书 [11] 或 А. М. 雅格洛姆和 И. М. 雅格洛姆的书 [13],也可以参看本章用小号字印的 § 4),但这对我們已是足够了.

現在我們来規定一些今后要用到的术語. 在所进行的实驗結果中可以出現或不出現的事件,称为**随机事件**;我們也将在同样的意义下談到給定的实驗的結局. 我們总是用大写拉丁字母表示随机事件,而用字母 p 表示随机事件(或实驗的确定結局)的概率;事

件 A 的概率常常写作 $p(A)$. 可以有几个不同結局的实驗将起着重大作用；这时我們就用带有不同下标的同一个字母来表示全部結局(而实驗本身經常总是用希腊字母表示).

每一个这种实驗都对应于一个确定的**概率表**:

实驗結局	A_1	A_2	…	A_k
概　　率	$p(A_1)$	$p(A_2)$	…	$p(A_k)$

例如,第 2 頁上所考虑过的例子中的实驗对应于下表:

A_1	A_2	A_3
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

(这里, A_1 是摸出白球, A_2 是摸出黑球, A_3 是摸出紅球), 而在問題 1 中所考虑过的实驗对应于如下簡单的表:

B_1	B_2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(其中 B_1 是出現"正面"而 B_2 是出現"反面"); 擲骰子具有下面的概率表:

出現的点数	1	2	3	4	5	6
概　　率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

等等.

应該指出,最后这个表和前两个表有本质的不同. 在这里,实驗的各个結果都可以用确定的数 (1, 2, 3, 4, 5 和 6) 表出, 而在前两个例子中就沒有这种可能性. 在这种情形, 我們就可以說擲骰子时出現的点数是**随机变量**,它可以依不同情况(卽依賴于无法估計的情况)为轉移而取六个数值之一. 随机变量的其他例子有: 一批(每批一百件)产品中的廢品数,一年中某个城市的降雨天数,

在一定的射击条件下，用同一武器的任何一个射手所得的分数（图1画出了表示击中每一环时所得分数的靶子）等等❶.

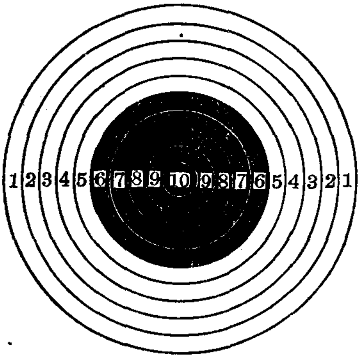

图 1

“随机变量”这个名称本身就责成我們怎样来估計它的值．不难了解这应該怎样作．例如考慮上面所列举的第一个随机变量（一批产品的廢品数）；設在一定的生产条件下，廢品数不超过6，并且对应的概率表有如下形式：

廢品数	0	1	2	3	4	5	6
概　率	0.1	0.15	0.2	0.25	0.15	0.1	0.05

在这种情形，N 批产品中（N 是很大的数）大約有 $0.1N$ 批不包含廢品，$0.15N$ 批只包含一件廢品，$0.2N$ 批包含两件廢品，$0.25N$ 批含三件廢品，$0.15N$ 批含四件廢品，$0.1N$ 批含五件廢品，$0.05N$ 批含六件廢品，因而，当 N 很大时，廢品的总数可以认为等于

$$a=0.1N\cdot 0+0.15N\cdot 1+0.2N\cdot 2+0.25N\cdot 3$$
$$+0.15N\cdot 4+0.1N\cdot 5+0.05N\cdot 6,$$

这意味着，一批产品中廢品数的**平均值**（廢品的平均百分比）等于

$$\frac{a}{N}=0.1\times 0+0.15\times 1+0.2\times 2+0.25\times 3$$
$$+0.15\times 4+0.1\times 5+0.05\times 6=2.7.$$

一般地，若对随机变量 α 有概率表

❶ 随机变量的概念不是本书的主要問題，但在概率論中它是一个中心概念．关于这点，例如可以參看 Б. В. 格涅堅科和 А. Я. 辛欽的书［11］的第二部分．

随机变量的值	α_1	α_2	α_3	$\cdots$	α_k
概　　率	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_k

那么，这个变量的平均值就由下式确定：

$$\text{平均值 } \alpha=p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+p_3\alpha_3+\cdots+p_k\alpha_k.$$

問題 4 設对两个射手甲和乙，表明命中靶子頻率的概率表有如下形式：

对于射手甲：

分数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
概率	0.02	0.03	0.05	0.1	0.15	0.2	0.2	0.1	0.07	0.05	0.03

对射手乙：

分数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
概率	0.01	0.01	0.04	0.1	0.25	0.3	0.18	0.05	0.03	0.02	0.01

試問应该认为哪一个射手射得准确些?

这里发射一次所得的平均分数，对于射手甲等于

$$0.02\times0+0.03\times1+0.05\times2+0.1\times3+0.15\times4+0.2\times5$$
$$+0.2\times6+0.1\times7+0.07\times8+0.05\times9+0.03\times10=5.24,$$

而对于射手乙，它較小：

$$0.01\times0+0.01\times1+0.04\times2+0.1\times3+0.25\times4$$
$$+0.3\times5+0.18\times6+0.05\times7+0.03\times8$$
$$+0.02\times9+0.01\times10=4.84<5.24.$$

所以应该认为射手甲射得較准确.

§2 概率的性质．事件的加法和乘法．不相容事件和独立事件

从上节所讲的概率定义可知：任何事件 A 的概率 $p(A)$ 都是真分数：

$$0\leqslant p(A)\leqslant1.$$

概率可以等于1：这意味着事件A在所考察的实验的任何結局下都实現，卽事件A是**必然事件**(例如从只装有白球的箱子中摸出白球的概率就等于1)．概率也可以等于0：这意味着事件在实驗的不管怎样的結局下都不能实現，卽它是**不可能事件**(从只装有白球的箱子中摸出黑球的概率就等于0)．

現在假設所考察的实驗只有两个彼此互相排斥的結局A和B．这时我們称事件B是和事件A**对立的事件**，并用$\overline{A}$表示它(这个記号可以讀作"非A")．若事件A在实驗的n个等概結局中有m次实現，那么事件$\overline{A}$就在其余的$n-m$个結局中实現；所以，$p(A)=\frac{m}{n}$，$p(\overline{A})=\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}$，因而

$$p(\overline{A})=1-p(A).$$

由此可見，对于只有两个結局的实驗的概率表，有如下的簡单形式：

A	$\overline{A}$
$p(A)$	$1-p(A)$

現在来考虑这样的两个事件A和A_1，卽事件A的实現必然引起事件A_1的实現(例如A是擲骰子时出現六点，A_1是出現能被3除尽的点数)．在这种情形，事件A_1在事件A实現的所有結局下，显然应該实現；所以事件A_1的概率不可能小于事件A的概率．A实現就引起A_1实現，这种情况我們写成$A\subset A_1$(讀为"A引起A_1")．这样一来，我們有下面的概率的重要性质：

$$若\ A\subset A_1,\ 則\ p(A)\leqslant p(A_1).$$

其次，考虑由任意两个事件A和B中至少一个实現所組成的事件；这个事件，我們称为A和B二事件之**和**，并用$A+B$表示．这时可以有两种本质上不同的情况．若二事件A和B**不相容**，卽它們两个不可能同时发生，那么，实驗的n个等概的結局中有某m_1次事件A实現，而在另外的m_2个結局下B实現；这时，

$$p(A)=\frac{m_1}{n},\quad p(B)=\frac{m_2}{n},$$

且
$$p(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n},$$

即
$$p(A+B)=p(A)+p(B)$$

(**概率的加法法則**)．例如在第 2 頁所考慮的例子中，摸出白球或黑球的概率，根据加法法則，应等于

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{10}=\frac{4}{5}.$$

加法法則所表示的概率性质，可以用如下的方式加以推广．設我們有 k 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$，其中任意两个都彼此不相容；用 $A_1+A_2+\cdots+A_k$ 表示所考虑的 k 个事件中至少有一个实現所組成的事件．这时显然可得：

$$p(A_1+A_2+\cdots+A_k)=p(A_1)+p(A_2)+\cdots+p(A_k);$$

这个更一般的結果，有时也称为概率的加法法則．特别地，若实驗可以有 k 个(且仅有 k 个)彼此互斥的不同結局，那么，与它对应的概率表就是：

A_1	A_2	$\cdots$	A_k
$p(A_1)$	$p(A_2)$	$\cdots$	$p(A_k)$

其中，下面一行各数之和等于 1：

$$p(A_1)+p(A_2)+\cdots+p(A_k)=1;$$

这是由于：$p(A_1)+p(A_2)+\cdots+p(A_k)=p(A_1+A_2+\cdots+A_k)$，而事件 $A_1+A_2+\cdots+A_k$ 是必然事件(因为实驗必須出現某一个結局)．

現在假設：二事件 A 和 B 是**相容的**，即可以同时实現．这时就不能断定 $p(A+B)=p(A)+p(B)$．事实上，設事件 A 在实驗的 n 个等概結局中的 m_1 个結局下实現，而 B 在这 n 个結局中的 m_2 个結局下实現．若第一批 m_1 个結局中某一个或第二批 m_2 个結

局中某一个发生，則事件 $A+B$ 实現；但是，因为这些結局不必全部是不同的，則它們的总数就可能比 m_1+m_2 小．这样，我們就只可以断言：

$$p(A+B)\leqslant p(A)+p(B)$$

(但 $p(A+B)\geqslant p(A)$，$p(A+B)\geqslant p(B)$，因为根据事件之和的定义，$A\subset A+B$，$B\subset A+B$)。

我們可以使最后这个不等式更精确一些．两个事件 A 和 B 都实現所組成的事件，称为 A 和 B 之积；用 AB 表示．我們来考察实現事件 A 的 m_1 个等概的实驗結局和实現事件 B 的 m_2 个等概結局．假設正好有 l 个結局，既在第一批的 m_1 个結局之中，又在第二批的 m_2 个結局之中．显然，若这 l 个結局中有一个发生（且只在这种情形！），那么，两个事件 A 和 B 就同时实現，所以，$p(AB)=\frac{l}{n}$；另一方面，若前 m_1 个結局和后 m_2 个結局中恰恰有 l 个是相同的，那么我們总共就只有 m_1+m_2-l 个結局（在和数 m_1+m_2 个中有 l 个結局計算了两次）．这样就有

$$p(A+B)=\frac{m_1+m_2-l}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}-\frac{l}{n},$$

因而，

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB).$$

由此我們看到：确定事件 A 和 B 之和 $A+B$ 的概率問題，归結到求这两个事件之积 AB 的概率．最后这个問題，在一般情况下不太簡单，我們将在下节談到，然而，有一个特别情形，这时求事件 AB 的概率是不困难的．这就是二事件 A 和 B 是**独立的**（即无关的）情形，即与事件 A 的实現或不实現相关联的实驗結果，无論如何也不会影响到其結果与事件 B 相关联的实驗的条件．例如，从装有白球和黑球的两个不同的箱子中摸取黑球所組成的两个事件就是独立的，但从同一个箱子中相继两次摸取黑球（不把取出的球放回箱子中）却不是独立事件（因为第一次摸取的結果便减少了剩

在箱子中的球的数目，因而便影响了第二个实验的条件）．

設事件 A 在第一个实驗的 n_1 个等概結局中有 m_1 个实現，而与它无关的事件 B 在第二个实驗的 n_2 个等概結局中有 m_2 个实現；这时，事件 A 的概率等于 $\frac{m_1}{n_1}$，而 B 的概率等于 $\frac{m_2}{n_2}$．現在考察两个实驗都进行所組成的**复合实驗**．显然，这个复合实驗可以有 n_1n_2 个不同的等概結局，因为第一个实驗的 n_1 个結局中的每一个，都可以配合第二个实驗的 n_2 个不同結局．这 n_1n_2 个等概結局中，有利于事件 AB 的有 m_1m_2 个結局，它們是由組合第一个实驗中有利于事件 A 的 m_1 个結局，和第二个实驗中有利于 B 的 m_2 个結局而得到的．因此，事件 AB 的概率就等于

$$\frac{m_1m_2}{n_1n_2}=\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2},$$

这就表示：

$$p(AB)=p(A)p(B)$$

（**概率的乘法法則**）．

这个法則可以用下面的方式推广．設 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是 k 个任意的相互独立的事件，即其中随便哪一个事件的实現所关联的实驗条件，絲毫也不依賴于其余事件的实現或不实現．这时，

$$p(A_1A_2\cdots A_k)=p(A_1)p(A_2)\cdots p(A_k).$$

这个关系的証明完全和推导它的特殊情形 $p(AB)=p(A)p(B)$ 这个公式类似．

若二事件 A 和 B 不是独立的，那么，乘法法則

$$p(AB)=p(A)p(B)$$

就不一定成立；例如，若 $B\subset A$（比如說，A 是擲骰子时出現偶数点，而 B 是出現两点），那么，事件 AB 与事件 B 重合，因而，$p(AB)=p(B)$．暫时我們只可以断定 $p(AB)\leqslant p(A)$ 和 $p(AB)\leqslant p(B)$（因为从二事件之积的定义可推出 $AB\subset B$ 和 $AB\subset A$）．关于二事件之积的概率問題的更詳細討論，我們留到下节进行．

为了說明上述最簡单的概率性质的应用，我們来考虑几个問題.

問題 5 两次擲硬币时,“正面”两次都朝上的概率是多少?

这里要求事件 AB 的概率,其中 A 是第一次擲时出現“正面”,而 B 是第二次擲时出現“正面”. 显然,事件 A 和 B 是独立的,所以,

$$p(AB)=p(A)\cdot p(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

(参看第 3 頁的問題 1).

問題 6 随意取出的一个不超过 1000 的正整数是另外某一整数的整次幂(大于 1 的指数)的概率等于多少?

“随意”这两个字在这个問題的条件下意味着: 我們认为出現从 1 至 1000 的任意数是等概的. 其次,因为

$$\begin{aligned}&2^9<1000<2^{10}, \quad 3^6<1000<3^7,\\ &5^4<1000<5^5, \quad 6^3<1000<6^4,\\ &7^3<1000<7^4, \quad 10^3=1000<10^4,\\ &11^2<1000<11^3, \quad 12^2<1000<12^3, \ \cdots,\\ &31^2<1000<31^3, \quad 32^2>1000,\end{aligned}$$

那么,是 2 的整次幂的数的概率等于 $\frac{8}{1000}$ (从 1 到 1000 的 1000 个数中,有 8 个 2 的幂: $2^2=4$, $2^3=8$, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8 和 2^9);同样取出的数是 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 29, 30, 31 的整次幂的数的概率分别等于

$$\frac{5}{1000}, \frac{3}{1000}, \frac{2}{1000}, \frac{2}{1000}, \frac{2}{1000}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{1000}, \cdots, \frac{1}{1000}$$

(若取出的数是 4, 8, 9, 16, 25 或 27 的整次幂，那么，它同时也是較小的数的整次幂; 所以，在討論中我們除去了这些情形). 因为对应的事件两两不相容,那么,所求的概率就等于

$$\frac{8}{1000}+\frac{5}{1000}+\frac{3}{1000}+\frac{2}{1000}+\frac{2}{1000}+\frac{2}{1000}$$
$$+\underbrace{\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000}+\cdots+\frac{1}{1000}}_{18\text{項}}=\frac{40}{1000}=\frac{1}{25}.$$

問題 7 全副扑克牌有 52 張，把四样花色中的某一样作为“主牌”．随意取出的一張牌为“爱司”牌(即 A 牌)或主牌的概率是多少？

設事件 A 是取出的一張牌为“爱司”，而事件 B 是取出主牌；这时，事件 AB 就表示取出的这張牌是主牌的“爱司”，而 $p(A)=\frac{1}{13}$（每样花色有 13 張牌，叫做二，三，…，“爱司”），$p(B)=\frac{1}{4}$，$p(AB)=\frac{1}{52}$．由此推得，所求的概率等于

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB)$$
$$=\frac{1}{13}+\frac{1}{4}-\frac{1}{52}=\frac{4}{13}.$$

問題 8 六个猎人都看見了一只狐狸，并且同时向它射击．設每个猎人在这种距离通常有三分之一的情况能击中并打死狐狸．試問打死这只狐狸的概率是多少？

設事件 $A_1, A_2, \cdots, A_6$ 分别表示第一个，第二个，…，第六个猎人打中狐狸．問題的条件表明：$p(A_1)=p(A_2)=\cdots=p(A_6)=\frac{1}{3}$；需要求 $p(S)$，其中 $S=A_1+A_2+\cdots+A_6$．显然，事件 $A_1, A_2, \cdots, A_6$ 是独立的；这給出了解这个問題时利用下式的可能性：

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB)=p(A)+p(B)-p(A)\cdot p(B)$$

(参看用小号字印的下文)．然而，这种解法不是很簡单的，因为表示并非是不相容的多个事件之和的概率公式相当复杂．

这个問題的另一种解法較方便．先求狐狸还活着的概率 $p(\bar{S})$．第一个，第二个，…，第六个猎人沒有击中的各事件自然分