积分的近似计算

华罗庚
王　元　著

科学出版社

积分的近似计算

华罗庚
王　元　著

科学出版社

1961

內 容 簡 介

本书以数論中常用的方法闡述了梯形公式、矩形公式与Simpson公式；改进了地理測量工作者及矿山測量工作者在无曲綫仪及无求积仪的情况下求曲綫长及面积的方法；运用了連分数的某些結果，得到了用单和去逼近二重积分的切实可用的方法等等。

此书可供工程师；地理学、矿冶及地质工作者；高等院校数学系师生参考之用。

积分的近似计算

华罗庚
王　元　著

※

科学出版社 出版（北京朝阳門大街117号）
北京市书刊出版业營业許可証出字第061号
中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

※

1961年11月第一版	书号：2434　字数：66,000
1961年11月第一次印刷	开本：850×1168 1/32
(京) 00001—13,800	印张：2 5/8

定价：0.41元

前言

經过几个月的工作，終于把这本小书完成了．这对作者說来，一方面固然感到輕快；但另一方面，由于要拿出来，又不能不感到徨恐．

由于作者知識的局限性，及在这方面工作与学习的时間很短促，总共也不过一年，中間还不免有些間断，所以，这本书必然不会包括得比較全面，对問題的認識也不会比較深刻，甚至錯誤之处想来也是难免的．由于計算数学这一学科在祖国社会主义建設中日益显示其重要性，在党的正确領导下这一学科正在我国大規模地发展着，作者也愿意在这方面貢献出他們微不足道的力量，所以才把这本小书拿出来了．

在这本书里用了些数論中常用的方法，一开始就用 Euler 求和法来概括一些熟知的經典結果，即梯形公式、矩形公式与 Simpson 公式，当然还可能概括其他的公式．这一方法的优点在于把誤差用已知函数的积分形式表达出来，因此我們就有可能根据被积分函数的特殊性而对誤差項进行細致的处理，因而可能得到較佳的估計．如果用最粗略的处理方法，所得出的結果也就是普通书上所給出的誤差．早在 1940 年左右，华罗庚就有了这一看法，直到 1958 年，在中国科学技术大学执教时，才把它具体整理出来[1)]．

然后又談到了求面积、容积与表面积的实用方法，这些方法都是地理測量及矿藏儲量計算上常用的方法．本书对这些方法进行了一些数学加工与改进．例如，关于在等高綫图上計算矿藏儲量的問題，本书提供了一个双层合算的公式．这个公式的获得首先

1) 最近見到 В. И. Крылов, Приближенное вычисление интегралов, Физматгиз, Москва, 1959. 在这本书里，他亦用了这一方法（作者 1961 年 3 月 26 日註）．

在于书中提出的 Бауман 公式的一个处理方法. 这个方法既簡单而又易于进一步改进. 这个公式的优点在于比 Бауман 公式并不麻煩很多，而又比 Бауман 公式多考虑了一些因素. 同时也比 Соболевский 公式（即通常双层合算的公式）多考虑了一些因素. 我們推荐它以供矿藏計算工作者参考或試用. 关于分层計算矿藏儲量的三个公式，即 Бауман 公式、截錐公式与梯形公式，本书对它們进行了对比，指出了它們之間的关系，并对它們的精确度提出了意見. 又如关于在等高綫图上計算坡地面积所常用的 Бауман 方法与 Волков 方法，本书指出了 Бауман 方法比 Волков 方法精密. 但用这两个方法算出的結果又常比眞正的斜坡面积偏低，仅仅一些十分特殊的曲面才能用这两个方法来无限精密地計算其表面积. 本书也指出了产生偏差的原因及避免較大偏差的計算步驟.

最后談到了 Коробов 的工作，他的工作是基于数論中一致分布的想法，他应用了完整三角和的估計[1]，得到了用单和去逼近多重积分的計算方法（虽然他并沒有达到最好的結果，但这一方法便于实际計算）. 此外本书又談到了他的另一用单和去逼近多重积分的結果. 也許值得一提的是：本书中运用了連分数（或代数数論）的某些結果，得到了用单和去逼近二重积分的切实可用的方法，而且誤差的阶也达到了最优的阶段. 这一想法当然是可以用来处理高維积分的近似計算的，然而是否能够象二維一样彻底解决問題，看来是一个有希望的研究方向，但目前还沒有解决. 作者特别希望同行們能留意解决. 此外，书中用連分数的方法，还得到了用单和逼近多重积分的誤差的下界的新的估計.

本书的 § 1—6，作者曾在中国科学技术大学应用数学系五八級一、二年級时講授过. 其余部分亦只要学过微积分学，就能够閱讀. 因此本书也可以作为大学生的課外閱讀資料或补充教材.

---

1) 这一方法导源于堆垒数論. 請参考华罗庚：堆垒素数論，第一章，科学出版社，1957.

此外必須提到，书中所談的求面积、求容积及表面积的方法，都是从我国的地理、矿冶及地質工作者那里学来的，对于他們热情的帮助与有益的建議，作者借此机会向他們致以衷心的感謝．最后作者殷切期望着讀者們給予的批評与指教．

华罗庚　王　元

1961．1．1．于北京

目　　录

§ 1. Euler 求和公式及 Euler 函数

定理 1 (Euler). 命 $\varphi(x)$ 是有限閉区間$[a,b]$內有連續微商的函数，則

$$\sum_{a<n\leqslant b}\varphi(n)=\int_a^b \varphi(x)dx+\int_a^b\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx+$$

$$+\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)-\left(b-[b]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b),$$

此处$[\xi]$代表实数ξ的整数部分.

証. 1) 如果$[a]+1>[b]$，則$[a]=[b]$，这公式变为

$$0=\int_a^b \varphi(x)dx+\int_a^b\left(x-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx+$$

$$+\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)-\left(b-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b),$$

即

$$\int_a^b\left(x-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx=-\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)+$$

$$+\left(b-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b)-\int_a^b\varphi(x)dx,$$

这就是部分积分公式的直接推理.

2) 假定$[a]+1\leqslant[b]$，則

$$\int_a^b[x]\varphi'(x)dx=\int_{[a]+1}^{[b]}[x]\varphi'(x)dx+\int_a^{[a]+1}[x]\varphi'(x)dx+$$

$$+\int_{[b]}^b[x]\varphi'(x)dx=$$

$$=\sum_{n=[a]+1}^{[b]-1}n\int_n^{n+1}\varphi'(x)dx+\int_a^{[a]+1}[a]\varphi'(x)dx+\int_{[b]}^b[b]\varphi'(x)dx=$$

$$= \sum_{n=[a]+1}^{[b]-1} n(\varphi(n+1)-\varphi(n)) + [a](\varphi([a]+1)-\varphi(a)) +$$

$$+ [b](\varphi(b)-\varphi([b])) =$$

$$= - \sum_{n=[a]+1}^{[b]} \varphi(n) - [a]\varphi(a) + [b]\varphi(b).$$

又由部分积分可知

$$\int_a^b \left(x-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx = \left(b-\frac{1}{2}\right)\varphi(b) - \left(a-\frac{1}{2}\right)\varphi(a) -$$

$$- \int_a^b \varphi(x)dx,$$

因此

$$\int_a^b \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx = \sum_{n=[a]+1}^{[b]} \varphi(n) - \int_a^b \varphi(x)dx -$$

$$-\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a) + \left(b-[b]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b),$$

即明所欲証.

我們現在用 Euler 求和公式来研究，当 n 充分大时，$n!$ 的漸近情况.

1）命 $\varphi(x) = \log x$，$a=1$，$b=n$（整数），則得

$$\sum_{1<m\leqslant n} \log m = \int_1^n \log x dx + \int_1^n \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x} +$$

$$+ \frac{1}{2}\log n. \tag{1}$$

由于

$$\left| x-[x]-\frac{1}{2} \right| \leqslant \frac{1}{2}$$

及

$$\int_\xi^{\xi+1} \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)dx = 0 \quad (\xi \text{ 为实数}),$$

故由第二中值公式可知积分

$$\int_1^\infty \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x}$$

收斂，因此由(1)可知

$$\log n! = \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + C + \gamma_n,$$

此处

$$C = 1 + \int_1^\infty \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x},$$

$$\gamma_n = -\int_n^\infty \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{e^{-n}n^{n+1/2}} = e^C = C_1. \tag{2}$$

我們称公式(2)为 Stirling 公式.

2) 現在我們来进一步定出 C. 由 Wallis 公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots(2n)\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

可知

$$\frac{(2^n n!)^4}{(2n)!^2(2n+1)}(1+o(1)) = \frac{\pi}{2}.$$

以(2)式代入得

$$\frac{C_1^4(2^n n^{n+1/2}e^{-n})^4}{C_1^2((2n)^{2n+1/2}e^{-2n})^2(2n+1)}(1+o(1)) = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{C_1^2 n}{2(2n+1)}(1+o(1)) = \frac{\pi}{2}.$$

命 $n\to\infty$ 得

$$C_1 = \sqrt{2\pi}.$$

同时我們也算出了

$$\int_1^\infty \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\log 2\pi - 1.$$

因为經常用到，我們引进符号

$$b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$$

并且用归纳法来定义 Euler 函数 b_l ($l=1, 2, \cdots$).

定义. (i) $b_l(x)$ 是以 1 为周期的函数，也就是

$$b_l(x+1)=b_l(x).$$

(ii) $$\int_0^x b_l(y)dy=b_{l+1}(x)-b_{l+1}(0).$$

由周期性显然得出

$$\int_0^1 b_l(y)dy=0.$$

我們得先說明一下，这样，函数 $b_l(x)$ 就完全定义了. 由 (ii) 可知如果 $b_l(x)$ 完全定义了，$b_{l+1}(x)$ 仅差一常数，也就完全定义了. 这一常数可由 $b_{l+2}(x)$ 的周期性来决定.

我們現在算出前几个 $b_l(x)$ 来. 周期既然是 1，我們不妨假定 $0<x<1$，由

$$b_2(x)-b_2(0)=\int_0^x\left(t-\frac{1}{2}\right)dt=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2},$$

即

$$b_2(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+b_2(0).$$

由

$$0=\int_0^1 b_2(x)dx=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+b_2(0)x\Big|_0^1=-\frac{1}{12}+b_2(0),$$

即当 $0<x<1$ 时

$$b_2(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{12}.$$

由于 $b_2(x)$ 的周期性，可一般地有

$$b_2(x)=\frac{(x-[x])^2}{2}-\frac{x-[x]}{2}+\frac{1}{12}.$$

同法可以推得

$$b_3(x)=\frac{1}{6}(x-[x])^3-\frac{1}{4}(x-[x])^2+\frac{1}{12}(x-[x]),$$

$$b_4(x)=\frac{1}{24}(x-[x])^4-\frac{1}{12}(x-[x])^3+\frac{1}{24}(x-[x])^2-\frac{1}{720}.$$

讀者可以再算一两个例子以資熟練.

§ 2. 梯形法、矩形法与 Simpson 法

假定 $f(x)$ 是一个在 $[\alpha, \beta]$ 内定义了的函数，以后如果用到几次微商，便假定 $f(x)$ 有几次微商。我們用 Euler 求和公式来推出普通数值积分的梯形法、矩形法与 Simpson 法.

1. 梯　形　法

在 Euler 求和公式中取

$$\varphi(x)=f\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right),\ a=0,\ b=n\ (n\text{ 是自然数}).$$

記

$$y_l=f\left(\alpha+l\frac{\beta-\alpha}{n}\right),$$

如此則得

$$\sum_{0<l\leqslant n}f\left(\alpha+l\frac{\beta-\alpha}{n}\right)=\int_0^n f\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx+\frac{1}{2}f(\beta)-$$
$$-\frac{1}{2}f(\alpha)+\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx.$$

換变数 $\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}=t$，則得

$$\sum_{l=1}^{n-1}y_l+\frac{1}{2}(y_0+y_n)=\frac{n}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(t)\,dt+$$
$$+\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n b_1(x)f'\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx,$$

也就是

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt-\frac{\beta-\alpha}{n}\left(\sum_{l=1}^{n-1}y_l+\frac{1}{2}(y_0+y_n)\right)=$$

$$= -\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_0^n b_1(x)f'\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx. \qquad (1)$$

这个式子說明，求积分的梯形法的誤差是可以用积分形式表出来的，現在把誤差表达得更清楚些，用分部积分可知

$$\int_0^n b_1(x)f'\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx = b_2(x)f'\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\Big|_0^n -$$

$$-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n b_2(x)f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx =$$

$$=\frac{1}{12}(f'(\beta)-f'(\alpha))-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n b_2(x)f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx =$$

$$=\frac{1}{12}\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx -$$

$$-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n b_2(x)f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx =$$

$$= -\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n\left(b_2(x)-\frac{1}{12}\right)f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx,$$

因此得出

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt-\frac{\beta-\alpha}{n}\left(\sum_{l=1}^{n-1}y_l+\frac{1}{2}(y_0+y_n)\right)=$$

$$=\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3\int_0^n\left(b_2(x)-\frac{1}{12}\right)f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx. \qquad (2)$$

梯形法余項(1)須假定 $f(x)$ 有一次微商，而(2)假定了 $f(x)$ 有二次微商，梯形法余項我們用

$$R_t=\int_\alpha^\beta f(t)dt-\frac{\beta-\alpha}{n}\left(\sum_{l=1}^{n-1}y_l+\frac{1}{2}(y_0+y_n)\right)$$

来表它。

定理 1. 如果 $|f''(x)|\leqslant M \quad (\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$，則

$$|R_t|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^3M}{12n^2}.$$

證. 由(2)可知

$$|R_t|\leqslant\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3\int_0^n\left|b_2(x)-\frac{1}{2}\right|\left|f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3 M\int_0^n \left| b_2(x) - \frac{1}{12}\right| dx =$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)^3}{n^2} M\int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{(\beta-\alpha)^3 M}{12n^2}.$$

定理 2. 如果 $f'(x)$ 是单調递減非負函数，則

$$|R_t| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^2}{8n^2} f'(\alpha).$$

証. 由(1)及第二中值公式可知

$$|R_t| = \left|\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2 \int_0^n b_1(x) f'\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right) dx\right| =$$

$$= \left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2 f'(\alpha) \left|\int_0^\xi b_1(x) dx\right|.$$

由

$$\left|\int_0^\xi b_1(x) dx\right| \leqslant \frac{1}{8}$$

可得定理.

如果积分的区間較长，这估計比以前的好些.

2. 矩 形 法

取

$$\varphi(x) = f\left(\alpha + \left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right),$$

$$a = -\frac{1}{2}, \ b = n - \frac{1}{2},$$

并記

$$y_{l+\frac{1}{2}} = f\left(\alpha + \left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right),$$

則得

$$\sum_{-\frac{1}{2}<l\leqslant n-\frac{1}{2}} f\left(\alpha + \left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right) =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} f\left(\alpha + \left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right) dx +$$

$$+\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_1(x)f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx.$$

换变数

$$\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}=t,$$

则得

$$\sum_{l=0}^{n-1} y_{l+\frac{1}{2}}=\frac{n}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_1(x)\times$$

$$\times f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx.$$

命

$$R_r=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt-\frac{\beta-\alpha}{n}\sum_{l=0}^{n=1} y_{l+\frac{1}{2}}$$

代表矩形法的余項，则

$$R_r=-\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_1(x)f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx. \quad (3)$$

部分积分得

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_1(x)f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=b_2(x)f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}-$$

$$-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_2(x)f''\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{24}\left(f'(\beta)-f'(\alpha)\right)-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_2(x)\times$$

$$\times f''\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\left(b_2(x)+\frac{1}{24}\right)f''\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx,$$

即

$$R_r=\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\left(b_2(x)+\frac{1}{24}\right)\times$$

$$\times f''\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx. \tag{4}$$

定理 3. 如果 $|f''(x)|\leqslant M \quad (\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$，則

$$|R_r|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^3M}{24n^2}.$$

証. 由(4)可知

$$|R_r|\leqslant\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3 M\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\left|b_2(x)+\frac{1}{24}\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3 Mn\int_0^1\left|b_2(x)+\frac{1}{24}\right|dx=$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^3}{n^2}M\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\right)dx=$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^3}{24n^2}M.$$

定理 4. 如果 $f'(x)$ 是单調递減非負函数，則

$$|R_r|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^2f'(\alpha)}{8n^2}.$$

証. 于(3)上用第二中値公式可知

$$|R_r|=\frac{(\beta-\alpha)^2f'(\alpha)}{n^2}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\xi}b_1(x)dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^2f'(\alpha)}{8n^2}.$$

3. Simpson 法

命

$$R_s=\frac{1}{3}R_t+\frac{2}{3}R_r,$$

則得

$$R_s=\int_\alpha^\beta f(t)dt-\frac{\beta-\alpha}{6n}\left(y_0+y_n+2\sum_{i=1}^{n-1}y_i+4\sum_{i=0}^{n-1}y_{i+\frac{1}{2}}\right);$$

而且 Simpson 公式的余項[由(2)与(4)]为

$$R_s=\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3\int_0^n\left(\frac{b_2(x)}{3}-\frac{1}{36}+\frac{2b_2(x-\frac{1}{2})}{3}+\frac{1}{36}\right)\times$$

$$\times f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3\int_0^n\left(b_2(x)+2b_2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx.$$

如果 $f^{\mathrm{IV}}(x)\quad(\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$ 存在，由分部积分可得

$$\int_0^n\left(b_2(x)+2b_2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n\left(b_3(x)+2b_3\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f'''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx$$

$\left(\text{此处用了}\quad b_3(0)=0,\ b_3\left(\frac{1}{2}\right)=0\right)$

$$=-\frac{\beta-\alpha}{n}\left(b_4(x)+2b_4\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f'''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\Big|_0^n+$$

$$+\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_0^n\left(b_4(x)+2b_4\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f^{\mathrm{IV}}\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=-\frac{\beta-\alpha}{n}\frac{1}{960}(f'''(\alpha)-f'''(\beta))+$$

$$+\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_0^n\left(b_4(x)+2b_4\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f^{\mathrm{IV}}\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_0^n\left(b_4(x)+2b_4\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{960}\right)f^{\mathrm{IV}}\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx,$$

即

$$R_s=\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^5\int_0^n\left(b_4(x)+2b_4\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{960}\right)\times$$

$$\times f^{\mathrm{IV}}\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx.$$

定理 5. 如果 $|f^{\mathrm{IV}}(x)|\leqslant M\quad(\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$，则

$$|R_s|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^5M}{180\cdot 2^4\cdot n^4}.$$

证. 由于