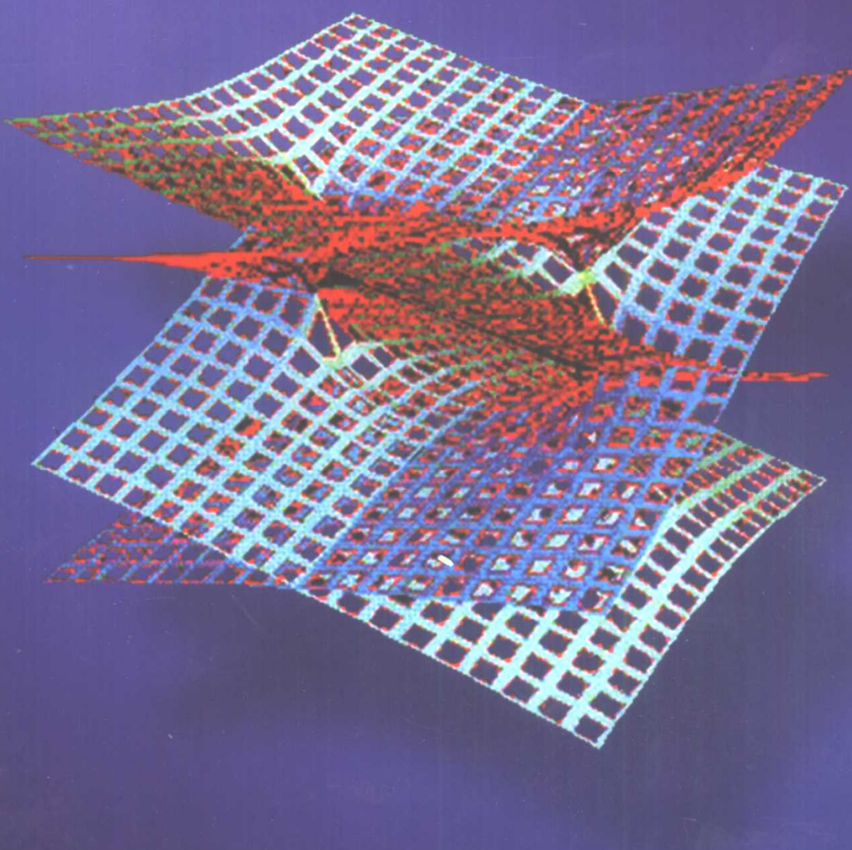
孙庆文　方 影　滕海英　编著

高等数学与数学模型



第二军医大学出版社

高 等 学 校 教 材

高等数学与数学模型

孙庆文　方　影　滕海英　编著

第 二 军 医 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书是作者在近年来为军队卫生事业管理、临床医学等专业的本科生及研究生讲授高等数学、管理数学所用讲义的基础上，经补充、修改编写而成，共分六章：微分学、原函数与微分方程、积分学、概率论、线性代数、数学模型. 全书内容略丰于同类教材，比较系统地讲解了最优化方法并初步介绍了常微分方程的稳定性理论，收入了一些有关生理与医疗、生态与环境、经济与管理、社会与人文等方面的模型案例，讨论了非合作博弈中的若干典型问题.

本书叙述简洁、讨论深入、信息量大，重点落在对数学概念的理解、建模能力培养和知识运用上，可供经济、管理、医学等专业的大学生使用.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学与数学模型/孙庆文，方　影，滕海英编著. 上海：第二军医大学出版社，2001.5

ISBN　7-81060-153-9

Ⅰ. 高...　Ⅱ. ①孙...②方...③滕...　Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材②数学模型—高等学校—教材　Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 10146 号

高等数学与数学模型

编　著　孙庆文　方　影　滕海英

责任编辑　傅淑娟

第二军医大学出版社发行

（上海市翔殷路 818 号　邮政编码 200433）

上海长阳印刷厂印刷

开本：787×1092　1/16　印张：17　字数：421 200

2001 年 6 月第 1 版　2001 年 6 月第 1 次印刷

印数：1～2000 册

ISBN　7-81060-153-9/O·002

定价：29.80 元

前　　言

应教改需要并配合学校 211 工程建设，我们编写了本书. 为将教学重点从解题技巧训练转移到对数学思想方法的理解以及数学建模能力的培养上来，我们对现行高等数学教材的内容和体系进行了一些调整，以突出数学的思想性和应用性.

数学的思维品质：任何有意义的科学问题都不是天然地呈现在研究者面前，而是有一个被发现的过程，良好的思维品质有助于人们发现问题. 我们相信，数学教育的功能首先在于提升人们的思维品质，例如，数学地理解问题，正确的演绎推理习惯，逆向思维能力，几何思考能力，彻底的理性精神. 一个人不可能指望套用公式来解决所有问题，但却可以一辈子受益于一种有用的思维方式，这恰是数学之大用. 数学只是常识的一种微妙形式，它源于现实又高于现实，其强大正是因为其基本. 本书特别注意体现数学作为一项基本素质训练所应具备的科学内涵和文化底蕴以及贴近生活的朴素和智性：注重对数学原理和方法进行直观且富启发性的诠释；强调合情推理，通过类比、猜想，引出概念，导出原理；写进了较多的证明，证明可以提高人的概括能力、表达能力和推理能力，使人思维缜密、机智、有条理，好的证明体现了发现事物之间相互联系的智慧，应当使人更聪明；穿插了一些数学史、数学思想史、数学哲学与方法论的内容，以启迪思维.

系统性：知识是有助于人们解决问题的一整套经验，因此，不能说会求极限或导数就是有知识，而只有当它们被有机地组合成为一套分析程序并帮助我们去理解，譬如说，一个生理过程的平衡态、稳定性、演化等问题时，才构成为一种知识. 本书对此给予了足够的重视，例如，我们将微分学及其应用处理成为一种“局部近似分析(函数的有限展开)→局部性态→拼凑出整体特征”方法体系，它是一种符合人们认知规律的理解事物的基本模式，但许多学过微积分的人对此却并不了解. 一个合乎逻辑的知识结构可以使人长期受益并有利于进一步扩充知识范围和处理新吸收的信息.

模型与应用：数学建模是一种科学的描述和分析事物的程序，任何学科的理论其实都是关于现实的一种模型.除了专辟一章收入有关生理、生态、经济、管理方面的模型以外，建立和求解模型的例子散见于全书各处.但数学的应用典型地表现为理论与对象之间的互动过程，其间存在着大量的隐秘知识(tacit knowledge)，只有在与具体范例的接触中潜移默化地获得，所以堪称艺术而决不是靠罗列一些半真半假的应用题就可以了事的.真问题和好方法有赖于人们在专业化的边干边学(learning by doing)中提出，教材或课堂教学只能寄希望于列举若干案例或可以启发万一.之所以选用了较多的经济管理模型，一来相对于生物数学模型它们所用的知识较少，二则体现了数学最贴近生活的一面，揣摩这些案例，可以加深对市场经济本质特征的认识，这对我国改革进程中的制度知识积累无疑将大有裨益.

本书的编写工作由孙庆文(第 1 章和第 6 章)、方影(第 4 章和第 5 章)、滕海英(第 2 章和第 3 章)三人合作完成，并自始至终得到了基础部和数理教研室领导及同事的关心与支持，第二军医大学出版社的总编辑李春德教授、副编审傅淑娟、贾敏小姐为本书的出版倾注了大量的心血.此外，编写期间，我们的家人承担了所有的外部成本，在此一并对他们表示衷心的感谢.

由于水平所限，难免有自以为是之处，请读者批评指正.

编著者

2000 年 12 月

目　　录

1 微分学

微分学研究变量之间的关系及其特性:变量之间的依赖关系就是函数的概念,发现变量之间的函数关系并透彻了解这种关系的特性是分析现实问题的起点;对函数特性的研究遵循从局部到整体的方法,即,先讨论函数的局部性态,然后将这些局部性态拼凑起来以把握其整体特征;为了得到函数的局部性态,我们采用近似的手法,即局部地以直代曲(例如,在高倍显微镜下若曲线的局部足够平直,则局部地以直线代替曲线)或以不变代变(例如在运动学中局部地以匀速代替变速),这是微分学的一个核心分析方法;局部近似分析是以动态地考察变量的无限变化趋势即极限概念为基础的.

一旦获得了函数关系的特性,我们就有可能为许多现实问题提供科学的见解.例如,人们如何看待风险、在满足个人预算约束的条件下应该怎样合理消费和储蓄(投资)、对可再生资源的开发利用如何才能在获得最佳经济效益的同时保证其可持续发展、传染病蔓延的时间特征是什么、口服给药时血药浓度何时达到最大值,等等,函数的单调性、凹凸性以及极值定理可以帮助我们给出这些问题的答案.

1.1 预备知识

1.1.1 集合

集合与几何学中的点一样,是数学中为数不多的几个难以严格定义的基本概念,但集合概念“独创新意,高瞻远瞩,为数学立了基础”.集合论的奠基人德国数学家 G.Cantor 认为:**集合**是我们的直觉或思维确定的各别对象的汇总,这些各别的对象称为集合的**元素**.经典集合论要求构成集合的元素必须是确定的而不是模糊的,即,任给一个元素 a 以及任给一个集合 A、a 属于 A(记作 $a \in A$)或 a 不属于 A(记作 $a \notin A$)二者必居其一且只居其一.

通常,我们用 N 表示**自然数集**,用 Z 表示**整数集**,用 Q 表示**有理数集**,用 R 表示**实数集**.特别地,规定不含任何元素的集合为**空集**,记作$\varnothing$.

表示集合的方法一般有:(1)**列举法**.列举集合的所有元素(如果可能的话),例如,$N=\{1,2,3,\cdots\}$.(2)**描述法**.用$\{x: x$具有性质$p\}$表示一切具有性质 p 的那些 x 组成的集合,例如,有理数集可以表示为 $\{x: x=q/p, q\in Z, p\in N\}$.

集合之间可以比较“大小”:如果对任意的 $x\in A$ 都有 $x\in B$ 则称集合 A 是 B 的**子集**,记作 $A\subset B$,读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.若 $A\subset B$ 并且 $B\subset A$,则称集合 A 与 B 相等,记作 $A=B$.显然,空集$\varnothing$是任一集合 A 的子集.若 $A\subset B$ 并且 $A\neq B$,则称 A 为 B 的一个**真子集**.

集合之间还可以进行运算.设 A 与 B 均是 M 的子集,则称 $A\bigcup B=\{x: x\in A或x\in B\}$ 为 A 与 B 的**并**.称 $A\bigcap B=\{x: x\in A且x\in B\}$ 为 A 与 B 的**交**.称 $A-B=\{x: x\in A且x\notin B\}$ 为 A 与 B 的**差**.特别地,称 $M-A$ 为 A 在 M 中的**补集**,记为 $\overline{A}$.易知 $A-B=A\bigcap\overline{B}$, $A\bigcap\overline{A}=\varnothing$,

$A \cup \overline{A} = M$.

另一个很重要的运算是集合 A 与 B 的**直积**: $A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$.特别地,若 $A = B$,则记 $A \times B$ 为 A^2 .例如,若 $A = \{1,2\}$,则 $A^2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$.

集合论中曾经出现过许多**悖论**,这些悖论对数学自身的发展和人类思想的进步都产生过重大影响.兹举几例以供思考:

例 1 (Von Neumann 无穷旅馆) 银河系中心有一家旅馆,房间编号为 1,2,3,⋯.某日客满,但又有一名 UFO 驾驶员披星戴月前来投宿,能安排吗?周末,又有 1,2,3,⋯无穷多个宇宙牌香烟推销员前来投宿,能安排吗?

例 2 (Zeno 悖论) 阿基里斯追不上乌龟.理由是,每当阿基里斯追到乌龟原先的位置时,乌龟总是移动到了一个新的位置,换言之,阿基里斯要想追上乌龟,他必须穿越无数个位置,但这是不可能的.类似地,有"飞矢不动".

例 3 (Russell 悖论) 一位男性理发师的广告牌上写着:我将给且只给那些不给自己刮脸的男人刮脸.那么,他应该给他自己刮脸吗?试用集合的语言描述该悖论.

1.1.2 实数与数轴

在建立和求解数学模型的过程中,我们要分析和处理各类数据,揭示它们之间的关系,并在此基础上作出正确的决策.这些数据往往都是实数,实数是最常见最有用的数学结构之一.

对物品进行计数是人类文明史上最原始的数据处理工作.数是用来反映量的,量无非多寡、长短、大小,是比较出来的,所以"太初有 1,继而有整数,零和分数,⋯".分数又称为有理数,因为分数化为十进制小数以后,或者是有限位小数,或者是无限循环小数,两者貌虽不同,但都只包含有限的信息.

每个有理数都可以在**数轴**(规定了原点和单位长的有向直线)上找到一个点来表示它,这些有理点密密麻麻地散布于整个数轴,任意两个有理数之间必定有另外一个有理数.故称有理数 Q 具有**稠密性**.

毕达哥拉斯(Pythagoras)学派相信"自然数与它们的比支配着宇宙",古希腊人把两个自然数之比叫做"logos"(世界的内在理性结构或本质,赫拉克里特认为只有通过心灵的思考才能认识逻各斯从而内化于人的心灵并外化为普遍主义的非人格化的法律).后来学派内部有人发现勾股均为 1 的直角三角形的斜边之长--$\sqrt{2}$--不是自然数之比(传说希帕索斯由于泄露了这个"逻辑上的丑闻"而被扔进大海葬身鱼腹),这种被认为没有道理的数就称为无理数,若用十进制小数表示,无理数是一个无限不循环小数.圆周长与其直径之比即圆周率 $\pi =$ 3.14159265358979323846⋯是最著名的无理数之一,最近有人用电脑计算出了其小数点后两百多万个数字,化为二进制数列并进行统计分析,发现它像随机数那样具有最大的不确定性,包含着无限的信息,正所谓:天长地久有时尽,此率绵绵无绝期.

因此,密密麻麻的有理数并未充满整个数轴,其中的空隙就由无理数来填补,这些空隙比有理数多得多,有理数只有可数无穷多个,而无理数有不可数无穷多个.有理数与无理数合起来称为**实数**,简称为**数**.实数与数轴上的点是一一对应的,数与形在此得到了统一.

直观上,直线是连绵不断的,而实数填满了整个数轴,故实数也应有某种连续性.这种连续性可以简单地说成是:任意两个有理数之间总有无理数并且任意两个无理数之间总有有理数.**实数的连续性**是整个数学分析的基础.

实数还满足:(1)任意两个实数加、减、乘、除的结果仍是实数,即实数对四则运算是封闭的;(2)乘法和加法满足交换律、结合律、分配律;(3)任意两个不同的实数可以比较大小.这些都是熟知的,本书不详加讨论,仅将它们作为公理看待.

为了叙述方便,下面我们引入几个常用的实数集符号:

设 $a,b\in R, a<b$,记 $[a,b]=\{x:a\le x\le b, x\in R\}$ 称为闭区间,类似地,可以定义开区间 $(a,b)=\{x:a<x<b,x\in R\}$,左开右闭区间 $(a,b]=\{x:a<x\le b,x\in R\}$,左闭右开区间 $[a,b)=\{x:a\le x<b,x\in R\}$ 等,统称为区间.

又,记 $[a,+\infty)=\{x:x\ge a,x\in R\}$,$(a,+\infty)=\{x:x>a,x\in R\}$,$(-\infty,b]=\{x:x\le b, x\in R\}$,$(-\infty,b)=\{x:x<b,x\in R\}$,$(-\infty,+\infty)=\{x:x\in R\}$,统称为无限区间.其中,$+\infty$(正无穷大)比一切实数都大,$-\infty$(负无穷大)比一切实数都小,并用 ∞(无穷大)表示 $+\infty$ 或 $-\infty$.根据需要,可以将 ∞、$+\infty$、$-\infty$ 视为“实数”(数而能动,是为异数)并参与一般的四则运算.

特别地,称开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 为 x_0 的 δ-邻域,记作 $N_\delta(x_0)$.经常地,我们用“x_0 附近”指称 x_0 的某一 δ-邻域.

1.1.3 有序数组与直角坐标系

可以用单个实数表示的数据称为**标量**,但在自然科学和社会科学研究中还会大量出现另一类数据,例如,在数据库软件中可以用有序三元数组(1,30,4000)表示某企业的一名“男性,年龄 30,月收入 4000 元人民币”的雇员.对这类数据进行分析和研究是科学管理不可或缺的环节.

我们将 n 元**有序数组**(**向量**)的集合记为 $R^n=\{(x_1,\cdots,x_n):x_i\in R, i=1,\cdots,n\}$,特别地,记 $R^2=\{(x,y):x,y\in R\}$,$R^3=\{(x,y,z):x,y,z\in R\}$.为获得几何直观,可将 R^2 对应于笛卡尔**直角坐标平面**,将 R^3 对应于笛卡儿三维**直角坐标空间**.

考察直角坐标平面(图 1.1),x 轴和 y 轴垂直相交,将平面分成四个象限.这个 xy 平面是一个无限点集,平面上一点 P 在 x 轴和 y 轴上的投影坐标可以用有序偶 (x,y) 表示,反过来,R^2 中的元素即有序偶 (x,y) 可以看作是直角坐标平面上投影坐标为 x 和 y 的点 P.所以我们今后用记号 $P(x,y)$ 表示对应于有序偶 (x,y) 的点,即坐标为 (x,y) 的点.

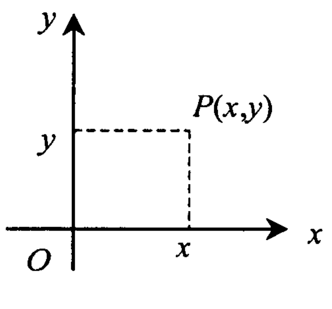


图 1.1

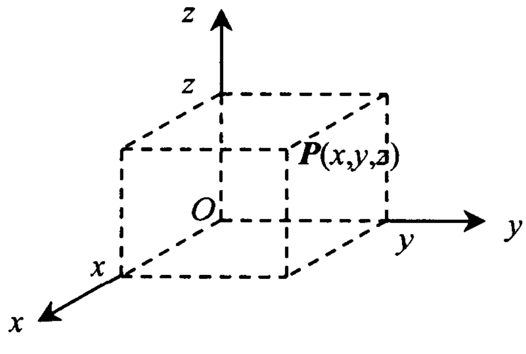


图 1.2

平面上两点 $P_1(x_1,y_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2)$ 之间的距离可以用勾股定理计算:

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

这样一来,以 $P_0(x_0,y_0)$ 为圆心、以 r 为半径的圆就可以表示为集合:

$$\{(x,y):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2,(x,y)\in R^2\},$$

简记为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$,称为**圆的方程**.

中心在 $P_0(x_0,y_0)$,两个半轴分别为 a 和 b 的**椭圆方程**是 $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.

过平面上两点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$ 的**直线方程**为

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},\text{ 或即 } y=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

其中 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 称为该直线的**斜率**,它是直线与 x 轴正向的夹角 α 的正切值,即 $k=\tan\alpha$.所以,经过平面上一点 $P_1(x_1,y_1)$ 并且斜率为 k 的直线方程为

$$y=y_1+k(x-x_1),$$

称为**点斜式方程**.

类似地,可以将 R^3 的元素即有序三元组 (x,y,z) 与直角坐标空间中的点 P 一一对应起来(图 1.2).注意其中三个坐标轴的相对位置,它们构成**右手系**.

直角坐标空间中点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离可以定义为:

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

以 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为球心、以 r 为半径的**球面方程**为:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2.$$

中心在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,三个半轴分别为 a ,b ,c 的**椭球面方程**是:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

过点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的**直线方程**为:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

平面方程的一般形式为 $Ax+By+Cz+D=0$.注意到 A,B,C,D 不全为零,故平面方程本质上只有三个参数,若已知该平面经过三个点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$,$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 和 $P_3(x_3,y_3,z_3)$,则由下面三个方程即可解出这三个参数:

$$Ax_i+By_i+Cz_i+D=0,i=1,2,3.$$

1.1.4 数学模型中的变量

模型是为了某种目的而将现实对象即原型的特定信息加以简化、提炼而成的一个原型替代物.**数学模型**是运用数学工具对事物系统的主要特征进行抽象概括而得到的一个模拟性的数学结构.对数学模型进行分析和求解,往往可以对现实对象的性态作出解释,或者预测对象的未来,或者提供最优决策或最优控制.数学模型方法已广泛应用于自然科学和社会科学.参见第 6 章.

例 4 考虑某企业的产量决策问题.由于产量可以取不同的数值,是一个**变量**,所以必须用一个符号,例如 x,而不是特定的数字来表示它.显然,变量 x 有一个变化范围:$x \geq 0$ 或即 $x \in [0,+\infty)$.

假定经过调查研究,得知生产成本与产量之间的关系是 $C = ax^2$,即生产 x 单位的产品必须花费 ax^2 单位的代价用以购买原材料、支付工人的工资、补偿机器的损耗等,其中 a 是给定的**常数**.再假定该企业只是千千万万同类产品生产企业中的一个并且其所占的市场份额很小,因此其产量变化不会影响该产品的市价,即价格对它而言是一个给定的常数(称该企业是一个价格接受者),设为 p.这样,该企业的利润便可以表示为 $\pi = px - ax^2$.于是,产量决策问题的数学模型是:

$$\underset{x\geq 0}{Max}\ \pi = px - ax^2,$$

即,在 $x \geq 0$ 的约束条件下,选择合适的 x 以使目标 $\pi = px - ax^2$ 达到最大值.

由初等数学知,当 $x = \dfrac{p}{2a}$ 时,$px - ax^2$ 取到最大值 $\dfrac{p^2}{4a}$,即,最优产量为 $x^* = \dfrac{p}{2a}$,最大利润为 $\pi^* = \dfrac{p^2}{4a}$.这样,我们通过建立该问题的数学模型并求解该模型便得到了最优决策方案.

数学模型通常包括一组用以描述模型结构的表达式,这些表达式将变量联系在一起,刻画了变量之间的关系,给出了问题的假设和要求.通过对这些表达式进行分析和运算,便得到一系列在逻辑上服从假设的结论.

在上面的模型中,我们解出了变量 x 的值:$x^* = \dfrac{p}{2a}$,这种其值源于模型内部、可以通过模型求解出来的变量称为**内生变量**.模型中还包含一些由外部环境因素所决定的量,例如,p 和 a,其大小被视为给定的数据,这样的量称为模型的**参数**.但参数并非永远不变,只不过其变化是由模型之外的原因引起,故亦称参数为模型的**外生变量**.在模型分析中,(内生)变量与常数(参数或外生变量)是相对而言的.对内生变量和外生变量的不同设定将导致解释同一种现象的不同模型或不同理论.

内生变量的解值依赖于参数,例如,当参数 p 或参数 a 发生变化时,最优产量 $x^* = \dfrac{p}{2a}$ 要相应地进行调整:x^* 随 p 的增大而增大(当某种外部原因导致产品价格上涨时企业应扩大生产),随 a 的增大而减小.实质上,我们是在讨论模型参数(外部环境)的变化怎样影响最优决策,这种分析称为**比较静态分析**.

思考题:哪些因素将导致外生变量 a 和 p 的值发生变化?

1.2 函数

前面我们多次提到变量之间的关系,分析变量之间的相依关系乃是数学地理解问题即**数学建模**的基础:星移斗转,沧海桑田,宇宙万物无时不在更迭变化之中,变化是相互关联而非孤立的,认识乃至改造世界就在于发现并利用这些关系,通过关系的传递,便可由已知推求未知,以 A 控制 B.函数这一数学概念就是从量的方面对相依变化过程的一种抽象描述.

1.2.1 函数及其表示

定义 1 设实数集 $D \subset R$,如果有一个规则 f,使得对每一个 $x \in D$,都有唯一的一个实数 $y \in R$ 与之对应,则称 f 是定义在 D 上而取值于 R 的**函数**,记作 $f: D \to R$.称 D 为函数 f 的**定义域**,记为 D_f;与 x 对应的 y 称为 f 在 x 点的**函数值**,记为 $y = f(x)$,函数值的全体 $\{y = f(x): x \in D_f\}$ 称为函数的**值域**,记为 R_f.

习惯上,我们将定义在数集 D 上的函数 f 表示为 $f(x), x \in D$ 或 $y = f(x), x \in D$,并说 y 是 x 的函数,x 是**自变量**,y 是**因变量**.这种写法指明了函数的定义域 D 并给出了定义域中每一点 x 处的函数值 $f(x)$,从而完全规定了函数关系 f.

函数又称为**算子**,表示对 x 施以"运算 f"使得到 y,即:$x \to f(\ ) \to y = f(x)$.

注 (1)这里讨论的函数只有一个自变量,称为一元函数.(2) y 是 x 的函数仅表示二者之间有某种数量上的联系,未必契合因果性.(3)变量也称作"哑元",因为 $y = f(x), x \in D$ 与 $s = f(t), t \in D$ 表示的是同一函数关系.(4)函数的定义域应根据实际问题的性质而定.否则,我们就仅从数学上考虑其自然定义域,例如分母不为零、负数不能开偶次方,等等.

例 1 上节的利润函数 $\pi = px - ax^2$ 的定义域是闭区间 $[0, \frac{p}{a}]$.

例 2 温度自动记录仪所记录的某地某天 24 小时气温变化曲线(图 1.3)描述了当天气温 T 随时间 t 的变化规律.T 是 t 的函数:对任一时刻 $t \in [0,24]$,按图中的曲线可以确定对应的气温 $T(t)$.

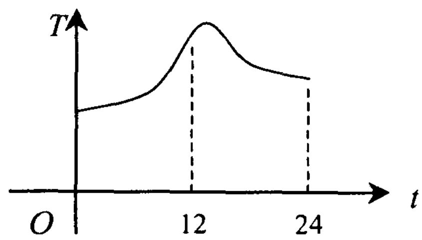


图 1.3

例 3 某医院研究某种代乳粉的营养价值时,用大白鼠作试验,得到了大白鼠的进食量 x(克) 和相应的体重增加量 y(克)的原始数据(如下表):

x	820	780	720	867	690	787	934	679	639	820
y	165	158	130	180	134	167	186	145	120	158

将 x 看作自变量,则体重增加量 y 是进食量 x 的函数.

上面这些例子说明,"算子 f"的表达方式可以是**列表**、**图形**和**公式**.列表法简单、图形法直观、公式法更便于分析和运算.

例 4 **经验公式**.借助观察和实验往往只能得到一组"离散"的经验数据 $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$,虽然它们已经确立了变量间的函数关系(如例 3 中的表格),但为了便于理论研究,常常需要将其转换为代数表达式,即进行**数据拟合**:找一个公式 $y = f(x)$ 使 $y_i \approx f(x_i), i = 1, \cdots, n$.例如,用后面我们将要介绍的**最小二乘法**(见 1.9.1 节例 2),可以找到公式 $y = 0.2219x - 17.36$ 来近似代表例 3 中的函数关系.在一定的误差范围内,这个近似关系式是可靠的.这类经由数据拟合而得到的函数关系称为**经验公式**.

例 5 以单价 a 元购进数量为 x 单位的时鲜商品,以单价 $b(b > a)$ 元卖出;若当天卖不完,第二天以单价 $c(c < a)$ 元贱卖.求利润函数.

解 设当天的需求量为 x_0,则利润 π 是进货量 x 的函数:

$$\pi(x)=\begin{cases}(b-a)x & 0\le x\le x_0\\ (b-a)x_0+(c-a)(x-x_0) & x>x_0\end{cases}.$$

注 这种在定义域内的不同部分对应规则并不相同的函数称为**分段函数**.

例 6 圆的标准方程 $x^2+y^2=R^2$ 反映了变量 x 与 y 之间的特定关系.由于当 $x\in(-R,R)$ 时,对应的 y 不能唯一地确定,所以不能说 y 是 x 的函数.但如果限定 $y\ge 0$,即,只考虑上半圆周,y 就成为 x 的函数:$y=\sqrt{R^2-x^2}$,$x\in[-R,R]$.它与 $x^2+y^2=R^2$,$y\ge 0$ 是同一个函数关系的两种等价的表述,我们将前者称为函数的**显式表示**,后者称为函数的**隐式表示**.

例 7 由方程 $x^2+y^2=R^2$,$y\ge 0$ 确定的 x 和 y 之间的关系也可以通过第三个变量例如 t 间接地表示:$\begin{cases}x=R\cos t,\\ y=R\sin t,\end{cases}$ $t\in[0,\pi]$,这种方法称为函数的**参数表示**.

直角坐标系中的曲线可以用来表示函数(例 2),反过来,将一个由公式表达的函数转换为图形往往可以从直观上启发我们对函数特性的研究.

定义 2 设 $f:D\to R$ 是一个一元函数,在平面直角坐标系中,称点集 $G_f=\{(x,f(x)):x\in D\}$ 为函数 f 的**图像**或**图形**.即,f 的图像是动点 $(x,f(x))$ 在直角坐标平面中的轨迹.

思考题:设 $g(x)=f(2x),h(x)=f(x-2)$,试说明 f,g,h 的图像之间的关系.

定义 3 称幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数为**基本初等函数**.

我们在中学已经详细讨论过这些函数的特性,请读者回忆它们的图像.之所以称其为基本初等函数,是因为它们乃是分析一般函数关系的基本构件.例如,在一定的条件下,可以用幂函数组成的多项式函数来"**逼近**" $f(x)$:

$$f(x)\approx a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n,\ (x\approx x_0),$$

并用它来对函数 f 在点 x_0 附近的局部性态进行近似分析.这是微分学的一个核心结论和分析方法,称为函数的**有限展开**.

思考题:设函数 f 在其定义域内任意一点 x_0 附近均有

$$f(x)\approx f(x_0)+A(x_0)(x-x_0)+B(x_0)(x-x_0)^2\ \ (x\approx x_0),$$

其中 $B(x_0)>0$.则 $y=f(x)$ 的图像大致是什么样子的?

1.2.2 复合函数与反函数

实际中经常出现一个变量经由某一中介变量与另一个变量间接相关的情形,反映在数学上就是复合函数的概念:$x\to g(\ )\to u\to f(\ )\to y$.

定义 4 设 $y=f(u),u\in U$,$u=g(x),x\in X$,且 g 的值域是 f 的定义域 U 的一个子集,则称 $y=f(g(x)),x\in X$ 为 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的**复合函数**,称 u 为**中间变量**.

类似地,可以将有限多个函数通过层层嵌套构成复合函数.

例 8 函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 可以复合成函数 $y=\sqrt{1-x^2}$,$x\in[-1,1]$.