

高等学校教学用书

微分方程 解析理論讲义

B. B. 戈魯别夫著

高等教育出版社

高等学校教学用书



微分方程解析理論講義

B. B. 戈魯别夫著

路見可 齐民友譯

高等教育出版社



本書系根据苏联國立技術理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的戈魯別夫 (В. В. Голубев) 所著“微分方程解析理論講義” (Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений) 1950 年第二版譯出。原書經苏联高等教育部審定為國立綜合大學教學參考書。

本書由路見可、齊民友兩同志合譯，吳厚心同志曾參加引言及第一章的部分翻譯工作。

微分方程解析理論講義

В. В. 戈魯別夫著

路見可、齊民友譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五〇四號)

商務印書館代印 華南書店經售

書號 13010-98 開本 787×1168 1/32 印張 14 4/16 字數 385,000

一九五六年十月上海第一版

一九五六年十月上海第一次印刷

印數 1—9,000

定價 (8) 洋 1.60

目 錄

原書第二版序	7
原書第一版序	7
引言	9
第一章 存在定理・解的唯一性・奇異點	13
§ 1. 微分方程積分的存在・系數的確定	13
§ 2. 伏函數	17
§ 3. 級數的收斂・歌西定理	21
§ 4. 唯一性定理	24
§ 5. 高階方程積分的存在與唯一性	31
§ 6. 線性方程情況下的伏函數	35
§ 7. 積分的解析延拓・奇異點的分類	38
§ 8. 固定奇異點與流動奇異點	46
§ 9. 流動代數點	49
§ 10. 流動超越點與流動本性奇異點	56
§ 11. 有固定臨界點的方程	61
§ 12. 關於一階方程單值積分的說明	67
第一章習題	70
第一章文獻	71
第二章 一階方程・代數函數論初步	73
§ 1. 代數函數的一些性質	73
§ 2. 有固定臨界點的方程・福赫斯條件	77
§ 3. 班勒衛定理	81
§ 4. 黎曼曲面・虧格	84
§ 5. 黎曼曲面的拓撲學	89
§ 6. 虧格為 0 與 1 的代數函數	97
§ 7. 具有固定臨界點的方程的積分法	104
§ 8. 厄米特定理	114
§ 9. $w^m = R(w)$ 形的方程	120
§ 10. $w^m = P(w)$ 形方程的積分法	125
§ 11. 許瓦茲-克里斯托費爾函數的單值反演	132

§ 12. 超橢圓型方程.....	144
§ 13. 双有理变换.....	147
§ 14. 虧格高於 1 的方程的積分法.....	153
第二章習題	156
第二章文獻	157
第三章 具有固定臨界点的二階方程	159
§ 1. 一般說明.....	159
§ 2. 邦加雷定理.....	161
§ 3. 小参数法.....	169
§ 4. 小参数法的应用.....	172
§ 5. 函数 $A_1(w, z)$ 与函数 $A_2(w, z)$ 形狀的确定	179
§ 6. $A_0(w, z) = 0$ 的情況	192
§ 7. 方程 $w'' = 6w^2 + z$ 与 $w'' = 2w^3 + zw + a$	204
§ 8. 流动極点.....	207
§ 9. 引理.....	210
§ 10. 班勒衛超越函数.....	214
第三章習題	218
第三章文獻	220
第四章 線性方程	221
§ 1. 問題的提出	221
§ 2. 積分在奇異点鄰域中的展开式	223
§ 3. 積分的解析表达式	227
§ 4. 正則奇異点的情況	231
§ 5. 福赫斯类方程.....	238
§ 6. 黎曼方程.....	243
§ 7. 方程形狀的簡化	253
§ 8. 高階方程・方程的羣	258
§ 9. 代換羣	267
§ 10. 單值羣	271
第四章習題	275
第四章文獻	275
第五章 超几何函数・黎曼問題	277
§ 1. 高斯方程・超几何級数	277
§ 2. 黎曼方程羣的确定	281
§ 3. 超几何積分	284
§ 4. 高斯方程羣的确定	289

§ 5. 勒雄特耳方程	295
§ 6. 黎曼問題	300
第五章習題	305
第五章文獻	306
第六章 由圓弧圍成的多角形的映射	307
§ 1. 映射函数的微分方程	307
§ 2. 許瓦茲方程的積分	320
§ 3. 三角形的映射	324
§ 4. 多角形的映射	326
§ 5. 兩個線性無窮積分比的反演	332
§ 6. 許瓦茲-克里斯托費爾函数的單值反演	337
§ 7. 許瓦茲函数; 多面体函数	339
§ 8. 許瓦茲函数; $\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} < 1$ 的情況	352
§ 9. 模函数	357
§ 10. 模函数的羣・絕對不變式	364
§ 11. 具有奇異點的不連續完全集的函数	367
第六章習題	376
第六章文獻	377
第七章 自守函数理論初步	378
§ 1. 一般說明	378
§ 2. 分式線性代換的性質	379
§ 3. 自守函数的基本区域	387
§ 4. 真不連續代換羣	390
§ 5. 最簡單的具有限羣的自守函数	391
§ 6. 分式線性代換的有限羣	395
§ 7. 有限羣情況下的自守函数	400
§ 8. 具一个極限點的羣	404
§ 9. 橢圓函数	409
§ 10. 具两个極限點的羣	414
第七章習題	415
第七章文獻	416
第八章 福赫斯与克萊因的自守函数	417
§ 1. 罗巴契夫斯基几何	417
§ 2. 双曲平面上的不連續运动羣	422

§ 3. 正常基本多角形	428
§ 4. 福赫斯函数的概念	433
§ 5. 代数函数的單值化	439
§ 6. 克莱因函数的概念	445
第八章文献	452
中外人名对照表	454

高等学校教学用书



微分方程解析理論講義

B. B. 戈魯别夫著
路見可 齐民友譯

高等教育出版社



本書系根据苏联國立技術理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的戈魯別夫 (В. В. Голубев) 所著“微分方程解析理論講義” (Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений) 1950 年第二版譯出。原書經苏联高等教育部審定為國立綜合大學教學參考書。

本書由路見可、齊民友兩同志合譯，吳厚心同志曾參加引言及第一章的部分翻譯工作。

微分方程解析理論講義

В. В. 戈魯別夫著

路見可——齊民友譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五〇四號)

商務印書館上海廠印刷 新华書店總經售

書號 13010-98 開本 786×1168 1/32 印張 14 4/16 字數 385,000

一九五六年十月上海第一版

一九五六年十月上海第一次印刷

印數 1—9,000

定價 (8) 洋 1.60

目 錄

原書第二版序	7
原書第一版序	7
引言	9
第一章 存在定理・解的唯一性・奇異点	13
§ 1. 微分方程積分的存在・系数的确定	13
§ 2. 优函数	17
§ 3. 級数的收斂・歌西定理	21
§ 4. 唯一性定理	24
§ 5. 高階方程積分的存在与唯一性	31
§ 6. 線性方程情况下的优函数	35
§ 7. 積分的解析延拓・奇異点的分类	38
§ 8. 固定奇異点与流动奇異点	46
§ 9. 流动代数点	49
§ 10. 流动超越点与流动本性奇異点	56
§ 11. 有固定臨界点的方程	61
§ 12. 關於一階方程單值積分的說明	67
第一章習題	70
第一章文献	71
第二章 一階方程・代数函数論初步	73
§ 1. 代数函数的一些性質	73
§ 2. 有固定臨界点的方程・福赫斯条件	77
§ 3. 班勒衛定理	81
§ 4. 黎曼曲面・虧格	84
§ 5. 黎曼曲面的拓扑学	89
§ 6. 虧格为 0 与 1 的代数函数	97
§ 7. 具有固定臨界点的方程的積分法	104
§ 8. 厄米特定理	114
§ 9. $w^m = R(w)$ 形的方程	120
§ 10. $w^m = P(w)$ 形方程的積分法	125
§ 11. 許瓦茲-克里斯托費尔函数的單值反演	132

§ 12. 超橢圓型方程	144
§ 13. 双有理变换	147
§ 14. 虧格高於 1 的方程的積分法	153
第二章習題	156
第二章文獻	157
第三章 具有固定臨界点的二階方程	159
§ 1. 一般說明	159
§ 2. 邦加雷定理	161
§ 3. 小参数法	169
§ 4. 小参数法的应用	172
§ 5. 函数 $A_1(w, z)$ 与函数 $A_2(w, z)$ 形狀的确定	179
§ 6. $A_0(w, z) = 0$ 的情况	192
§ 7. 方程 $w'' = 6w^2 + z$ 与 $w'' = 2w^3 + zw + a$	204
§ 8. 流动極点	207
§ 9. 引理	210
§ 10. 班勒衛超越函数	214
第三章習題	218
第三章文獻	220
第四章 線性方程	221
§ 1. 問題的提出	221
§ 2. 積分在奇異点鄰域中的展开式	223
§ 3. 積分的解析表达式	227
§ 4. 正则奇異点的情况	231
§ 5. 福赫斯类方程	238
§ 6. 黎曼方程	243
§ 7. 方程形狀的簡化	253
§ 8. 高階方程・方程的羣	258
§ 9. 代換羣	267
§ 10. 單值羣	271
第四章習題	275
第四章文獻	275
第五章 超几何函数・黎曼問題	277
§ 1. 高斯方程・超几何級数	277
§ 2. 黎曼方程羣的确定	281
§ 3. 超几何積分	284
§ 4. 高斯方程羣的确定	289

§ 5. 勒雄特耳方程	295
§ 6. 黎曼問題	300
第五章習題	305
第五章文獻	306
第六章 由圓弧圍成的多角形的映射	307
§ 1. 映射函數的微分方程	307
§ 2. 許瓦茲方程的積分	320
§ 3. 三角形的映射	324
§ 4. 多角形的映射	326
§ 5. 兩個線性無關積分比的反演	332
§ 6. 許瓦茲-克里斯托費爾函數的單值反演	337
§ 7. 許瓦茲函數; 多面體函數	339
§ 8. 許瓦茲函數; $\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} < 1$ 的情況	352
§ 9. 模函數	357
§ 10. 模函數的羣・絕對不變式	364
§ 11. 具有奇異點的不連續完全集的函數	367
第六章習題	376
第六章文獻	377
第七章 自守函數理論初步	378
§ 1. 一般說明	378
§ 2. 分式線性代換的性質	379
§ 3. 自守函數的基本區域	387
§ 4. 真不連續代換羣	390
§ 5. 最簡單的具有有限羣的自守函數	391
§ 6. 分式線性代換的有限羣	395
§ 7. 有限羣情況下的自守函數	400
§ 8. 具一個極限點的羣	404
§ 9. 橢圓函數	409
§ 10. 具兩個極限點的羣	414
第七章習題	415
第七章文獻	416
第八章 福赫斯與克萊因的自守函數	417
§ 1. 羅巴契夫斯基幾何	417
§ 2. 雙曲平面上的不連續運動羣	422

§ 3. 正常基本多角形	428
§ 4. 福赫斯函数的概念	433
§ 5. 代数函数的單值化	439
§ 6. 克莱因函数的概念	445
第八章文献	452
中外人名对照表	454

原書第二版序

本“講義”的第二版主要的是重印了在一九四一年發行的第一版原文。並放進了一些不重要的補充和改正了顯著的誤刊。

我對於我的在科學工作與教學工作中的同志們以及聽我講的同志們，致以深厚的謝忱，因為他們指出了原文中許多應更正的以及應確切說明的地方。

B. B. 戈魯別夫

一九五〇年五月卅一日

原書第一版序

本書所敘述的是著者多年來對莫斯科大学學生及研究生所作講演的內容，並作了若干補充。

課程的任務是要使聽講者熟悉解析函數論中的一些經典問題，而這些問題已超出了解析函數基礎理論課程及教本的內容範圍。

解析函數論課程的內容通常限於一般的定理、它們幾乎全是在單值函數上的應用、存在定理以及保角映射的簡單例子，有時也包括一些屬於畢卡定理及其各種推廣問題和一些屬於單叶函數論的問題。而且完全不談這樣一些基本問題，如：代數函數論、黎曼曲面論、代數函數的虧格概念，以及一般說來與多值函數、其奇異點的性質與分類有關的所有問題；最後，還有多面體函數論、模函數論與自守函數論的基本概念，也就是一方面與運動羣有關另一方面又與保角映射的重要問題有關的一切函數理論的基本概念，這些都沒有觸及。

微分方程解析理論，除了其本身固有的任务与方法外，提供了非常適當的材料以便熟諳上面所列举的問題。

本書就是在这种观点下寫出的。著者在寫本書時採納了在講演中听講者所提的許多意見。我特別廣泛地使用了工農紅軍的軍事航空大學副教授符·斯·布加切夫所作的听課筆記。為了使我得以使用這些筆記並在寫作本書許多節時得到他的幫助，我謹在此對他表示衷心的感謝。

B. B. 戈魯別夫

引 言

微分方程的積分法問題是数学分析中的一个古典的和最为重要的問題。

力学、数学物理、工程科学和其他各种知識領域中为数極多的問題都可化为微分方程積分法的問題。在这些方程的求積中所遇到的数学上的困难时常阻碍着应用問題的解决。著名的三体問題就是一个例子；由於沒有方法來積出像這一問題中所遇到的那一类型方程，由於不可能澈底地研究它們的積分，就使這個問題的澈底解决完全成为不可能。

在研究微分方程的積分方面的每一進展，立刻就能促進一系列应用問題的解决。斯·弗·柯瓦列夫斯卡婭所發現的、並且澈底研究过的剛体运动的情況就是一个經典性的例子。她本想找出剛体运动的那些情況，使其对应方程的積分具有某种解析性質，这样她就發現了上面这一種情況。

微分方程理論的發展，對於数学分析本身的發展，也有同等重要的意义。在近代函数論的各种一般方法所導出的無限多种多样的函数中，当然並不是全体都有同等的研究价值；多数情況下，具有某些特殊的函数性質（例如週期性、加法性定理等等）的函数类，或者滿足一些特別簡單类型微分方程的函数类，才有特殊的价值。微分方程理論是供給数学分析以各种新的函数类的泉源。微分方程理論中的問題導出了橢圓函数論、阿倍尔函数論、自守函数論以及各种所謂特殊函数（勒雄特兒函数、貝塞尔函数、拉梅函数等等）的理論。

在微分方程理論的最初研究中，自然是力圖將方程的積分用已知

函数表示出來，或者將方程的求積問題化為求已知函数的積分。在這個方向下，十八世紀的數學家們——歐拉、貝奴里、克萊洛等人——得到了許多基本的結果。這些結果現時都敘述在關於微分方程求積法的初級教本中。

但是在这个方向下，只有在特別簡單的微分方程的情況下問題才能解決。在絕大多數情況下，尋求積分的問題並不導致計算已知函数的積分，而且積分本身也不能表為已知函数的有限組合。這一情況提出了直接從微分方程本身來研究積分性質的問題。這種研究可以在不同的方向下進行。

一方面，例如可以從這樣的見解出發：即從幾何觀點看來，方程的積分是某種曲線——積分曲線，可以研究這些積分曲線的一般性質、它們的奇異點、它們的一般分佈等等。從這一觀點出發，微分方程的研究引向所謂微分方程的定性理論。

也可以從另一觀點來研究微分方程的積分。早在歌西即已指出，在關於微分方程性質的極為廣泛的假定下，它的積分是復變數的解析函數。因此，可以用尋常的復變函數論的方法來研究這些積分。從這個觀點出發，微分方程積分的研究導向微分方程的解析理論。因而微分方程的解析理論是復變函數普遍理論的一部分，其中應用了一般的方法來研究不同類型微分方程的積分，來找出這樣的微分方程的類型，使其積分具有某種從復變函數論觀點看來特別有意義的性質（單值性、奇異點的性質等等）。

作為復變函數論普遍理論的一部分，微分方程的解析理論與普遍理論平行地發展起來了。它的發展的起點奠定於歌西的著作中^①，歌西對於很廣泛的一類微分方程證明了作為復變數解析函数的積分的存在。歌西的結果帶着局部的特征，只是在初始值所確定的鄰域中研究

^① Cauchy A., “C. R.”, 卷 9, 10, 11, 14, 15 及 23 (1839—1849) (一些短文)。Oeuvres, 卷 4—7, 卷 10 第一部分。