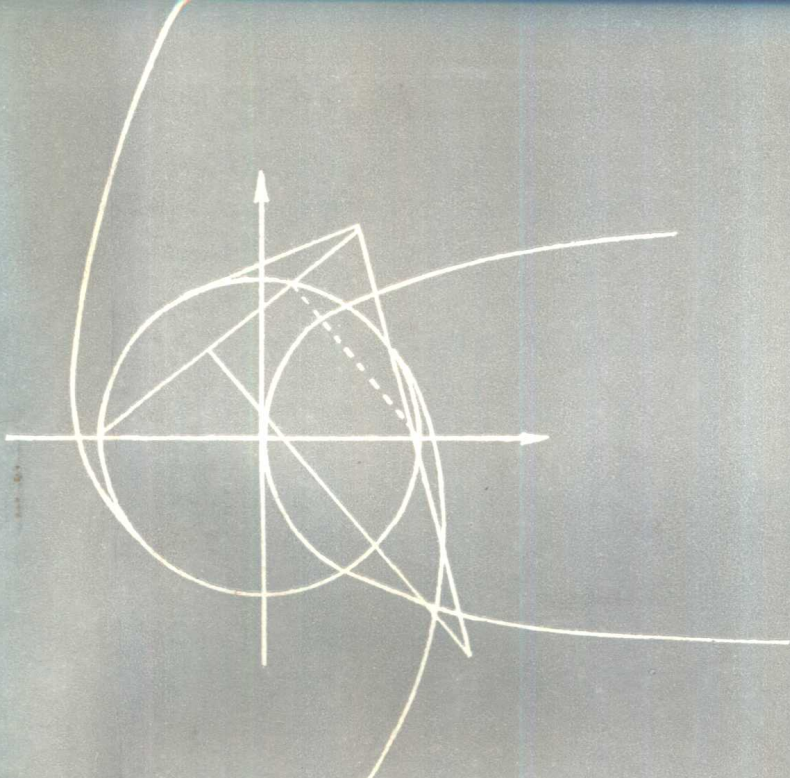
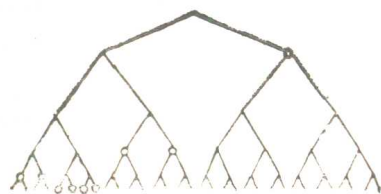




概率与信息



山东科学技术出版社

概 率 与 信 息

陈 力 行

山东科学技术出版社

一九八四年·济南

内 容 简 介

概率与信息的概念和方法在自然科学和社会科学的研究中已得到广泛的应用。本书从最基本的古典概型定义到概率的公理系统、几何概率、独立重复试验、随机变量及其分布都作了研讨，又以极浅近的实例引入了熵和信息的概念，并把通信系统的抗干扰问题和编码问题作为应用加以介绍。

本书叙述比较严谨，简单明晰，清楚易懂，例题生动有趣，富有启发性。本书对不具备高等数学知识的经济管理工作、中学教师、及具有高中知识水平的自学者，是一门很有用的入门书。

概 率 与 信 息

陈 力 行

*

山东科学技术出版社出版

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂德州厂印刷

*

787×1092毫米32开本 3.75印张 142千字

1984年11月第1版 1984年11月第1次印刷

印数：1—5,800

书号 13195·126 定价 1.25元

引 言

概率论是研究偶然现象（或者叫做随机现象）规律性的一个数学分支。早在十七世纪中期，当时的著名数学家巴斯卡尔，费马，惠更斯就对一些偶然现象作了分析研究。在他们的一些通信和著作中，提出了概率、数学期望等一些重要的基本概念。随着近代自然科学的进一步发展，促使概率论逐步引用深刻的数学工具，如数学分析、测度论、抽象空间理论等而得以继续发展。到二十世纪初，当分子学说在物理领域中得到广泛承认之后，概率论的理论和方法在物理学和化学等方面的应用也就越来越广泛，从而使概率论在自然科学中的地位大大地提高了。在最近的数十年间，概率论已经成为数学科学中发展较快，成果累累的学科之一。现在概率论的理论和方法几乎渗透到科学技术的每一个领域，如人口统计、天气预报、地震预报、排队论、通信理论、工业产品质量检查、农业增产试验等，各行各业都在利用概率论作为探索事物内在规律的有效手段之一。

信息，被人们认为是人类认识世界和改造世界的知识源泉。信息论作为一个独立学科是从通信科学发展起来的，现在已成为含意十分广泛的信息科学的理论基础。信息科学是一门新兴的边缘学科。它的任务是研究信息的性质、信息的获得、传递、检测、存贮、处理等方面的基本原理、方法和使用。

编写本书的目的,是希望能从一些为人们所熟知的事例中,使读者了解概率与信息的最基本的概念,获得一些这方面的初步知识。为了尽可能少地要求读者在数学和其他方面的预备知识,笔者将放弃一些通常性讲法,而采用一些与其他学科的专门问题无牵扯的特例。这也是本书编写时的努力方向。

三百多年前一场难断的“官司”

在十七世纪的中期,瓦拉·德·梅尔向数学家巴斯加爾(1623—1662)提出了一个问题:甲、乙两人以6元钱打赌而投掷硬币。硬币落下后,带有徽花的一面向上,算是甲赢;带数字的一面向上就算是乙赢。相约谁先赢满3次,谁就赢得全部赌钱。当投完三次时,甲赢了二次,乙赢了一次。之后双方同意不再赌下去了,那么这6元钱应如何分配才算公平合理呢?

这个问题使巴斯加爾费了不少脑筋。有人提出:按已经赢得的次数的比例来分,即甲得4元,乙得2元。但有人反对,其理由是:这种分法完全没有考虑到发展前景。尽管后者讲得有一定道理,可是所谓的“前景”却又是捉摸不定,该怎样考虑呢?

1654年7月29日,巴斯加爾写信给当时的另一位著名数学家费马,提出一个解法和费马商讨。1657年惠更斯在他的一本著作中也提出了一个解法。这些解法都不是仅以已经进行过了的结局来分配,而是纵观全局着眼于甲、乙各自赢得全部赌金的可能性来决定。

巴斯加爾和费马的共同看法是:这场赌博至多再进行两

次就一定可以见分晓了。而在这两次中，可能出现四种不同的结果：

第一种情况：甲赢，甲赢；

第二种情况：甲赢，乙赢；

第三种情况：乙赢，甲赢；

第四种情况：乙赢，乙赢。

在前面已经进行过三次的基础上，前三种情况的任何一种情况出现，甲都赢得全部 6 元赌金，仅在第四种情况出现时，乙才能赢得这 6 元钱。因而虽然后面两次未能进行，但是应分给甲 $6 \times \frac{3}{4} = 4.5$ (元)；给乙 $6 \times \frac{1}{4} = 1.5$ (元)。用概率论的话来说，就是从整局输赢来看，甲赢的概率是 $\frac{3}{4}$ ，乙赢的概率只有 $\frac{1}{4}$ 。所以，只有这样分才公平合理。

后来，巴斯加尔，费马，惠更斯又多次通信、写文章讨论这类问题。惠更斯在他的《论赌博中的计算》(1657)一书中，搜集了当时已解决的同类问题，另外，还提出了一些新的问题。这本书就成为概率理论的肇始。惠更斯这时指出：“在任何场合，我认为如果读者仔细地考察这些研究对象。那末，就会注意到所处理的不只是赌博而已，其中实际上包含着很有趣很深刻的理论基础。”这就是说他们已经预见到这门学科的普遍意义和深刻性。

从宏观世界到微观世界

在物理学中，许多现象的规律性都是由观察和实验总结

而得出来的，由此而发展起来的理论，一般叫做宏观理论。例如：物体受热后温度升高，体积膨胀。反之，则温度降低，体积缩小；冰加热到 0°C 以上变成水，水再加热至 100°C 就变成水蒸气；在室温下十分坚硬的钢铁，在高温下却变成了能够流动的钢水。这些与温度有关的物理性质的变化，就是物理学里的所谓热现象，这都是由观察或实验总结得知的。但是宏观理论不能说明热的本质究竟是什么，热是一种什么运动形式。

在十七世纪到十八世纪期间，一些物理学家提出了分子运动论的假设，认为物质是由分子构成的。但是直到大约又过了一个世纪，著名的物理学家克劳修斯，麦克斯韦，玻耳兹曼等人把概率统计方法引进了这个领域，才正确地导出了玻耳兹曼定律，建立了运动自由程的概念，速度分布律等。这样一来，气体分子运动理论就从一些定性的论据，发展成一个系统的定量理论。

微观理论是从组成物质的粒子（分子、原子、电子等）的运动和它们之间的相互作用出发，去研究各种物理现象的规律。例如：从微观上看，热现象是构成物体粒子热运动的结果。热运动是宏观物体内部粒子一种永不停息的无规则的运动，它是由大量的粒子所构成物体的基本运动形式。就单个粒子来看，由于受到其他粒子的复杂作用，其具体运动过程具有很大的偶然性。单个粒子的运动速度的变化是偶然的，它在运动过程中所遵循的路径也是无规则的。统计物理学就利用概率的理论和方法来掌握和描述每个粒子所遵循的力学规律。这样就可以深入现象的本质，而使理论获得更深刻的意义。

同时，由于概率论在物理学、化学方面的广泛使用，也促进了概率论本身的发展。许多物理学家如丹尼，贝努里，麦克斯韦，玻耳兹曼的名字也载入了概率论的发展史中。

测风云的统计预报

自古以来，天气的变化对人类的生存和生活总是密切相关的。风调雨顺就有希望丰衣足食，飓风暴雨或是大旱之年都将给人们带来巨大的灾难。千百年来，人们总希望预知风云的变幻。随着科学技术的发展，愿望慢慢地变成了现实。人们越来越能准确的预报天气的情况了。概率论是气象预报的理论基础之一，特别是中、长期天气预报。单从一次大风或暴雨的出现来看，它是十分偶然的现象。研究者从大量的气象资料来探索这些偶然现象的规律性，主要是依靠概率的理论。根据找到的规律，预知它们的来临，而向航行在天空和海洋的飞机和船舶，向广大从事野外作业的劳动者们作出及时的预报。

类似的，地震是一种自然界的灾害，在城市建设、水利工程（建造水库、水坝）、交通枢纽（建造车站、码头）等方面也都要考虑到如何避免地震的破坏。某一地区的地震将发生在何时、何地、离地面多深的地方呢？或者说，某地在今后多少年内会不会发生破坏性地震呢？这是人们所关心的问题。这些问题中的现象是偶然现象，要回答这些问题就得去研究这些偶然现象的规律性。

又如河流的洪峰，传染病的蔓延，农作物虫灾的发生也是一些人们希望能够得到预报的偶然现象。概率论就为这些

预报工作提供了理论基础。

本书不可能把概率论的发展史和与它有关的问题，一一加以列举。在以后的各节中，将逐步地引进概率与信息的最基本概念和方法。

目 录

引言	1
三百多年前一场难断的“官司”	2
从宏观世界到微观世界	3
测风云的统计预报	5
一、事件和概率	7
一个简单的实例	7
初步推广	9
进一步推广	10
其他例子	13
基本事件空间与事件	15
离散空间事件的概率	17
古典概型	17
二、事件之间的关系与概率的基本性质	19
事件的导致关系与相等	19
相容事件与互不相容事件	21
和事件与概率的加法定理	22
余事件及其概率	25
事件域	29
三、算例	31
占位问题	32
抽球问题	35
四、条件概率和独立性	37
全概率公式	40

事件的独立性	43
五、算例——波利亚模型	49
六、贝叶斯公式及其算例	56
七、几何概率	61
一维情况	61
二维情况	62
八、独立重复试验与概率的统计性质	69
简单独立重复试验	70
最大可能次数	74
无限次独立重复试验	79
概率的统计性质	82
九、随机变量及其分布	86
随机变量	86
概率分布律与分布函数	88
分布的一种直观解释	93
随机变量的独立性与加和	94
均值	97
方差	102
均值和方差的一种直观解释	107
贝努里大数定律	109
十、集合论观点下的概率论	113
事件域	113
概率的公理化定义	116
概率的性质	120
十一、熵	123
熵——试验不肯定性程度的度量	123
熵的基本性质	129
条件熵	139

算例	148
十二、信息	160
十三、最少称量次数	168
十四、通讯系统与编码问题	182
通讯系统	182
通讯系统模型	185
编码、均匀编码	186
不均匀编码与最优编码	193
抗扰编码	205
结束语	210

引 言

概率论是研究偶然现象（或者叫做随机现象）规律性的一个数学分支。早在十七世纪中期，当时的著名数学家巴斯卡尔，费马，惠更斯就对一些偶然现象作了分析研究。在他们的一些通信和著作中，提出了概率、数学期望等一些重要的基本概念。随着近代自然科学的进一步发展，促使概率论逐步引用深刻的数学工具，如数学分析、测度论、抽象空间理论等而得以继续发展。到二十世纪初，当分子学说在物理领域中得到广泛承认之后，概率论的理论和方法在物理学和化学等方面的应用也就越来越广泛，从而使概率论在自然科学中的地位大大地提高了。在最近的数十年间，概率论已经成为数学科学中发展较快，成果累累的学科之一。现在概率论的理论和方法几乎渗透到科学技术的每一个领域，如人口统计、天气预报、地震预报、排队论、通信理论、工业产品质量检查、农业增产试验等，各行各业都在利用概率论作为探索事物内在规律的有效手段之一。

信息，被人们认为是人类认识世界和改造世界的知识源泉。信息论作为一个独立学科是从通信科学发展起来的，现在已成为含意十分广泛的信息科学的理论基础。信息科学是一门新兴的边缘学科。它的任务是研究信息的性质、信息的获得、传递、检测、存贮、处理等方面的基本原理、方法和使用。

编写本书的目的,是希望能从一些为人们所熟知的事例中,使读者了解概率与信息的最基本的概念,获得一些这方面的初步知识。为了尽可能少地要求读者在数学和其他方面的预备知识,笔者将放弃一些通常性讲法,而采用一些与其他学科的专门问题无牵扯的特例。这也是本书编写时的努力方向。

三百多年前一场难断的“官司”

在十七世纪的中期,瓦拉·德·梅尔向数学家巴斯加(1623—1662)提出了一个问题:甲、乙两人以6元钱打赌而投掷硬币。硬币落下后,带有徽花的一面向上,算是甲赢;带数字的一面向上就算是乙赢。相约谁先赢满3次,谁就赢得全部赌钱。当投完三次时,甲赢了二次,乙赢了一次。之后双方同意不再赌下去了,那么这6元钱应如何分配才算公平合理呢?

这个问题使巴斯加费了不少脑筋。有人提出:按已经赢得的次数的比例来分,即甲得4元,乙得2元。但有人反对,其理由是:这种分法完全没有考虑到发展前景。尽管后者讲得有一定道理,可是所谓的“前景”却又是捉摸不定,该怎样考虑呢?

1654年7月29日,巴斯加写信给当时的另一位著名数学家费马,提出一个解法和费马商讨。1657年惠更斯在他的一本著作中也提出了一个解法。这些解法都不是仅以已经进行过的结局来分配,而是纵观全局着眼于甲、乙各自赢得全部赌金的可能性来决定。

巴斯加和费马的共同看法是:这场赌博至多再进行两

次就一定可以见分晓了。而在这两次中，可能出现四种不同的结果：

第一种情况：甲赢，甲赢；

第二种情况：甲赢，乙赢；

第三种情况：乙赢，甲赢；

第四种情况：乙赢，乙赢。

在前面已经进行过三次的基础上，前三种情况的任何一种情况出现，甲都赢得全部 6 元赌金，仅在第四种情况出现时，乙才能赢得这 6 元钱。因而虽然后面两次未能进行，但是应分给甲 $6 \times \frac{3}{4} = 4.5$ (元)；给乙 $6 \times \frac{1}{4} = 1.5$ (元)。用概率论的话来说，就是从整局输赢来看，甲赢的概率是 $\frac{3}{4}$ ，乙赢的概率只有 $\frac{1}{4}$ 。所以，只有这样分才公平合理。

后来，巴斯加尔，费马，惠更斯又多次通信、写文章讨论这类问题。惠更斯在他的《论赌博中的计算》(1657) 一书中，搜集了当时已解决的同类问题，另外，还提出了一些新的问题。这本书就成为概率理论的肇始。惠更斯这时指出：“在任何场合，我认为如果读者仔细地考察这些研究对象。那末，就会注意到所处理的不只是赌博而已，其中实际上包含着很有趣很深刻的理论基础。”这就是说他们已经预见到这门学科的普遍意义和深刻性。

从宏观世界到微观世界

在物理学中，许多现象的规律性都是由观察和实验总结

而得出来的，由此而发展起来的理论，一般叫做宏观理论。例如：物体受热后温度升高，体积膨胀。反之，则温度降低，体积缩小；冰加热到 0°C 以上变成水，水再加热至 100°C 就变成水蒸气；在室温下十分坚硬的钢铁，在高温下却变成了能够流动的钢水。这些与温度有关的物理性质的变化，就是物理学里的所谓热现象，这都是由观察或实验总结得知的。但是宏观理论不能说明热的本质究竟是什么，热是一种什么运动形式。

在十七世纪到十八世纪期间，一些物理学家提出了分子运动论的假设，认为物质是由分子构成的。但是直到大约又过了一个世纪，著名的物理学家克劳修斯，麦克斯韦，玻耳兹曼等人把概率统计方法引进了这个领域，才正确地导出了玻耳兹曼定律，建立了运动自由程的概念，速度分布律等。这样一来，气体分子运动理论就从一些定性的论据，发展成一个系统的定量理论。

微观理论是从组成物质的粒子（分子、原子、电子等）的运动和它们之间的相互作用出发，去研究各种物理现象的规律。例如：从微观上看，热现象是构成物体粒子热运动的结果。热运动是宏观物体内部粒子一种永不停息的无规则的运动，它是由大量的粒子所构成物体的基本运动形式。就单个粒子来看，由于受到其他粒子的复杂作用，其具体运动过程具有很大的偶然性。单个粒子的运动速度的变化是偶然的，它在运动过程中所遵循的路径也是无规则的。统计物理学就利用概率的理论和方法来掌握和描述每个粒子所遵循的力学规律。这样就可以深入现象的本质，而使理论获得更深刻的意义。

同时，由于概率论在物理学、化学方面的广泛使用，也促进了概率论本身的发展。许多物理学家如丹尼，贝努里，麦克斯韦，玻耳兹曼的名字也载入了概率论的发展史中。

测风云的统计预报

自古以来，天气的变化对人类的生存和生活总是密切相关的。风调雨顺就有希望丰衣足食，飓风暴雨或是大旱之年都将给人们带来巨大的灾难。千百年来，人们总希望预知风云的变幻。随着科学技术的发展，愿望慢慢地变成了现实。人们越来越能准确的预报天气的情况了。概率论是气象预报的理论基础之一，特别是中、长期天气预报。单从一次大风或暴雨的出现来看，它是十分偶然的现象。研究者从大量的气象资料来探索这些偶然现象的规律性，主要是依靠概率的理论。根据找到的规律，预知它们的来临，而向航行在天空和海洋的飞机和船舶，向广大从事野外作业的劳动者们作出及时的预报。

类似的，地震是一种自然界的灾害，在城市建设、水利工程（建造水库、水坝）、交通枢纽（建造车站、码头）等方面也都要考虑到如何避免地震的破坏。某一地区的地震将发生在何时、何地、离地面多深的地方呢？或者说，某地在今后多少年内会不会发生破坏性地震呢？这是人们所关心的问题。这些问题中的现象是偶然现象，要回答这些问题就得去研究这些偶然现象的规律性。

又如河流的洪峰，传染病的蔓延，农作物虫灾的发生也是一些人们希望能够得到预报的偶然现象。概率论就为这些