数理逻辑与集合论

（第二版）

石纯一　王家廞　编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

数理逻辑与集合论是离散数学的主要组成部分，是计算机科学的数学基础.

全书共 12 章. 前 8 章介绍数理逻辑，包括命题和谓词逻辑的基本概念、等值和推理演算、公理系统、模型论和证明论. 后 4 章介绍集合论，包括集合、关系、函数、实数集与基数.

本书可作为大学离散数学的教科书. 也可供从事计算机科学、人工智能等方面的科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

数理逻辑与集合论/石纯一等编著. —2 版. —北京：清华大学出版社，2000
ISBN 7-302-04042-7

Ⅰ. 数…　Ⅱ. 石…　Ⅲ. ①数理逻辑-高等学校-教材②集论-高等学校-教材　Ⅳ. O14

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 51562 号

出版者：清华大学出版社(北京清华大学学研大厦，邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者：北京市丰华印刷厂
发行者：新华书店总店北京发行所
开　本：787×1092 1/16　印张：14.75　字数：352 千字
版　次：2000 年 12 月第 2 版　2000 年 12 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-04042-7/TP・2381
印　数：8001～11000
定　价：18.00 元

再版前言

随着计算技术的发展，数理逻辑与集合论做为计算机科学的一种数学工具，它的作用显得更加重要了. 如果仅限于学会一种程序设计语言，掌握一些编程技巧，不一定要学习基础性知识，甚至有高中水平就可以了. 但对计算机系的大学生来说，应有更高的要求，仅满足于写个简单程序就不够了. 仍拿一种程序设计语言来说，为什么会提出来？它能解决什么问题？好在哪里？存在什么问题？它的语法语义又怎样？要懂得一些深层的基础性知识才能对这些问题做出回答.

《数理逻辑与集合论》一书的第1版发行至今已有十多年了，在教学过程中已感到数理逻辑部分内容浅了些，需增加深层知识，这是本书再版的原因. 为此我们在原书的基础上增加了模型论和证明论两部分，理解这部分内容不甚容易，不求立即直接会用，而是做为基础知识的储备. 这部分内容是请中国科学院软件研究所王驹研究员编写的，在此表示谢意！

石纯一

2000.7 于清华园

前　　言

离散数学是大学计算机系的基础数学课程，它以离散量为研究对象．而数学分析（微积分）以连续函数为主要研究对象，属于连续型数学．

由于计算机的软、硬件都具有离散型结构，从而使离散数学成为计算机科学的基本工具．例如，Turing 对可计算性的研究所建立的 Turing 机是计算机的理论模型，导致了计算机的出现；Boole 的逻辑代数已十分成功地用于计算机的硬件分析和设计；谓词逻辑演算为人工智能学科提供了一种重要的知识表示和推理方法等．

离散数学的原理和方法常常要求在计算机上的可实现性．而一般数学理论有时仅给出存在性讨论，这是不能满足实用要求的．

离散数学包括数理逻辑、集合论、代数结构、图论、形式语言、自动机和计算几何等．

清华大学计算机系把离散数学安排为“数理逻辑与集合论”和“代数结构与图论”两门课程，分两个学期讲授，各占 50 学时．本书是编著者在讲授“数理逻辑与集合论”时所编写的讲义基础上完成的．孙承鑑、陈群秀和赵琦等同志参加了编写工作，在此表示谢意．

离散数学的参考书较多，而且其各部分也有专门的书．本书的编写过程主要参考了王宪钧的《数理逻辑引论》、胡世华和陆钟万的《数理逻辑基础》、陈进元等的《离散数学（上）》和张锦文的《集合论浅说》等书．

由于编著者水平所限，错误和不当之处在所难免，请读者批评指正．

石纯一　王家廞
1988.3 于清华园

目　　录

概述 …… 1

第 1 章　命题逻辑的基本概念 …… 2
　1.1　命题 …… 2
　1.2　命题联结词及真值表 …… 3
　1.3　合式公式 …… 7
　1.4　重言式 …… 8
　1.5　命题形式化 …… 9
　1.6　波兰表达式 …… 11
　习题 1 …… 12

第 2 章　命题逻辑的等值和推理演算 …… 14
　2.1　等值定理 …… 14
　2.2　等值公式 …… 15
　2.3　命题公式与真值表的关系 …… 19
　2.4　联结词的完备集 …… 20
　2.5　对偶式 …… 23
　2.6　范式 …… 24
　2.7　推理形式 …… 29
　2.8　基本的推理公式 …… 31
　2.9　推理演算 …… 33
　2.10　归结推理法 …… 35
　习题 2 …… 37

第 3 章　命题逻辑的公理化 …… 40
　3.1　公理系统的结构 …… 40
　3.2　命题逻辑的公理系统 …… 41
　3.3　公理系统的完备性和演绎定理 …… 44
　3.4　命题逻辑的另一公理系统——王浩算法 …… 45
　3.5　命题逻辑的自然演绎系统 …… 49
　3.6　非标准逻辑 …… 50
　习题 3 …… 53

第 4 章　谓词逻辑的基本概念 …… 54
　4.1　谓词和个体词 …… 54

4.2 函数和量词……………………………………………………………………………… 56
4.3 合式公式……………………………………………………………………………… 58
4.4 自然语句的形式化……………………………………………………………………… 59
4.5 有限域下公式$(\forall x)P(x)$、$(\exists x)P(x)$的表示法 …………………………………… 63
4.6 公式的普遍有效性和判定问题……………………………………………………… 65
习题 4 ……………………………………………………………………………………… 66

第 5 章 谓词逻辑的等值和推理演算 ……………………………………………………… 69
5.1 否定型等值式…………………………………………………………………………… 69
5.2 量词分配等值式………………………………………………………………………… 71
5.3 范式……………………………………………………………………………………… 74
5.4 基本的推理公式………………………………………………………………………… 77
5.5 推理演算………………………………………………………………………………… 79
5.6 谓词逻辑的归结推理法………………………………………………………………… 82
习题 5 ……………………………………………………………………………………… 84

第 6 章 谓词逻辑的公理化 ………………………………………………………………… 87
6.1 谓词逻辑的公理系统…………………………………………………………………… 87
6.2 谓词逻辑的自然演绎系统……………………………………………………………… 92
6.3 递归函数………………………………………………………………………………… 94
6.4 相等词和摹状词………………………………………………………………………… 99
习题 6 ……………………………………………………………………………………… 102

第 7 章 一阶形式理论及模型……………………………………………………………… 103
7.1 一阶语言及一阶理论 ………………………………………………………………… 103
7.2 结构、赋值及模型……………………………………………………………………… 104
7.3 理论与模型的基本关系——完全性定理 …………………………………………… 105
7.4 Lowenheim-Skolem 定理及 Herbrand 方法 ………………………………………… 107
7.5 一阶形式理论 Z_1 ……………………………………………………………………… 110
7.6 Gödel 不完全性定理 ………………………………………………………………… 111

第 8 章 证明论中的逻辑系统……………………………………………………………… 114
8.1 λ-演算 ………………………………………………………………………………… 114
8.2 Scott 域………………………………………………………………………………… 116
8.3 Gentzen 串形演算 …………………………………………………………………… 118
8.4 线性逻辑 ……………………………………………………………………………… 124

第 9 章 集合………………………………………………………………………………… 129
9.1 集合的概念和表示方法 ……………………………………………………………… 129

9.2 集合间的关系和特殊集合 …… 131
9.3 集合的运算 …… 133
9.4 集合的图形表示法 …… 137
9.5 集合运算的性质和证明 …… 138
9.6 有限集合的基数 …… 148
9.7 集合论公理系统 …… 150
习题 9 …… 155

第 10 章 关系 …… 160
10.1 二元关系 …… 160
10.2 关系矩阵和关系图 …… 162
10.3 关系的逆、合成、限制和象 …… 163
10.4 关系的性质 …… 168
10.5 关系的闭包 …… 171
10.6 等价关系和划分 …… 179
10.7 相容关系和覆盖 …… 183
10.8 偏序关系 …… 184
习题 10 …… 188

第 11 章 函数 …… 193
11.1 函数和选择公理 …… 193
11.2 函数的合成与函数的逆 …… 197
11.3 函数的性质 …… 201
11.4 开集与闭集 …… 203
11.5 模糊子集 …… 205
习题 11 …… 210

第 12 章 实数集合与集合的基数 …… 213
12.1 实数集合 …… 213
12.2 集合的等势 …… 216
12.3 有限集合与无限集合 …… 218
12.4 集合的基数 …… 219
12.5 基数的算术运算 …… 219
12.6 基数的比较 …… 221
12.7 可数集合与连续统假设 …… 223
习题 12 …… 223

概　　述

数理逻辑是研究推理逻辑规律的一个数学分支,它采用数学符号化的方法,给出推理规则来建立推理体系.进而讨论推理体系的一致性、可靠性和完备(全)性等.

数理逻辑的研究内容是两个演算加四论.具体为命题演算、谓词演算(第1到第6章)、集合论(第9到第12章)、模型论(形式语言语法与语义间的关系)(第7章)、递归论(可计算性可判定性)(第6章)和证明论(数学本身的无矛盾性)(第8章).

数理逻辑是形式逻辑与数学相结合的产物.但数理逻辑研究的是各学科(包括数学)共同遵从的一般性的逻辑规律,而各门学科只研究自身的具体规律.

数理逻辑的创始人是17世纪德国数学家和哲学家Leibniz,他把数学引入形式逻辑.1847年Boole实现了命题演算,1879年Frege建立了第一个谓词演算系统.到20世纪30年代数理逻辑进入了一个新的时期.逻辑学不仅与数学相互渗透与结合,而且与其他科学技术相互渗透与结合,显示了逻辑学的实用意义.1931年Gödel不安全性定理的提出以及递归函数可计算性的引入,导致了1936年Turing机器的出现,它是现代电子计算机的理想的数学模型.10年后1946年第一台电子计算机诞生.数理逻辑与计算机科学、控制论、人工智能的相互渗透推动了数理逻辑的发展.人们正在模糊逻辑、概率逻辑、归纳逻辑、时态逻辑和非单调逻辑等方面进行研究.

集合论可看作为数理逻辑的一个分支,也是现代数学的一个独立分支,它是各个数学分支的共同语言和基础.

集合论是关于无穷集和超穷集的数学理论.古代数学家就已接触到无穷概念,但对无穷的本质缺乏认识.为微积分寻求严密的基础促使实数集结构的研究,早期的工作都与数集或函数集相关联.

集合论中一直引人注意的一些问题有:选择公理AC(对任意多个两两不相交的非空集合,存在一个集合与这些非空集合中的每一个都有唯一的一个共同元素)、连续统假设CH(Cantor对直线上点的个数问题的猜测)、广义连续统假设GCH(无穷集的幂集基数的猜测).

集合论的创始人是Cantor,他从1871年到1883年发表了关于基数、序数和良序集理论的一系列结果.1909年前后在他创建的集合论中发现了种种悖论.1908年Zermelo给出了集合论的第一个公理系统Z.此后人们又提出ZF和GB等公理系统.1938年Gödel证明了用现有的集合论公理系统不能证明CH是假的.1963年Cohen证明,用现有的集合论公理系统也不能证明CH是真的.应当寻求新的工具和方法来解决这个问题.

集合论已在计算机科学、人工智能学科、逻辑学、经济学、语言学和心理学等方面起着重要的应用.

本书以大体相当的篇幅讲述数理逻辑与集合论的基本内容,鉴于这两部分内容的内在密切联系,我们使用数理逻辑的方法来引入集合论的有关概念并证明有关定理.

第1章　命题逻辑的基本概念

命题逻辑研究的是命题的推理演算.这一章介绍命题逻辑的基本概念,包括引入命题联结词,讨论合式公式、重言式以及自然语句的形式化等内容.

1.1　命　　题

1.1.1　什么是命题

命题是一个非真即假(不可兼)的陈述句.有两层意思,首先命题是一个陈述句,而命令句、疑问句和感叹句都不是命题.其次是说这个陈述句所表达的内容可决定是真还是假,而且不是真的就是假的,不能不真又不假,也不能又真又假.凡与事实相符的陈述句为真语句,而与事实不符的陈述句为假语句.这说是说,一个命题具有两种可能的取值(又称真值),为真或为假,并且只能取其一.通常用大写字母T表示真值为真,用F表示真值为假,有时也可分别用1和0表示它们.因为只有两种取值,所以这样的命题逻辑称为二值逻辑.

举例说明命题概念:

(1)“雪是白的”.是一个陈述句,可决定真值,显然其真值为真,或说为T,所以是一个命题.

(2)“雪是黑的”.是一个陈述句,可决定真值,显然其真值为假,或说为F,所以是一个命题.

(3)“好大的雪啊!”不是陈述句,不是命题.

(4)“一个偶数可表示成两个素数之和”(哥德巴赫猜想).是命题,或为真或为假,只不过当今尚不知其是真命题还是假命题.

(5)“1+101=110”.这是一个数学表达式,相当于一个陈述句,可以叙述为“1加101等于110”,这个句子所表达的内容在十进制范围中真值为假,而在二进制范围中真值为真.可见,这个命题的真值与所讨论问题的范围有关.

1.1.2　命题变项

为了对命题作逻辑演算,采用数学手法将命题符号化(形式化)是十分重要的.我们约定用大写字母表示命题,如以P表示“雪是白的”,Q表示“北京是中国的首都”等.当P表示任一命题时,P就称为命题变项(变元).

命题与命题变项含义是不同的,命题指具体的陈述句,是有确定的真值,而命题变项的真值不定,只当将某个具体命题代入命题变项时,命题变项化为命题,方可确定其真值.命题与命题变项像初等数学中常量与变量的关系一样.如5是一个常量,是一个确定的数字,而x是一个变量,赋给它一个什么值它就代表什么值,即x的值是不定的.初等数学的运算规

则中对常量与变量的处理原则是相同的，同样，在命题逻辑的演算中对命题与命题变项的处理原则也是相同的．因此，除在概念上要区分命题与命题变项外，在逻辑演算中就不再区分它们了．

1.1.3 简单命题和复合命题

简单命题又称原子命题，它是不包含任何的与、或、非一类联结词的命题．如 1.1.1 中所举的命题例子都是简单命题．这样的命题不可再分割，如再分割就不是命题了．而像命题“雪是白的而且 $1+1=2$”，就不是简单命题，它可以分割为“雪是白的”以及“$1+1=2$”两个简单命题，联结词是“而且”．在简单命题中，尽管常有主语和谓语，但我们不去加以分割，是将简单命题作为一个不可分的整体来看待，进而作命题演算．在谓词逻辑里，才对命题中的主谓结构进行深入分析．

把一个或几个简单命题用联结词(如与、或、非)联结所构成的新的命题称为复合命题，也称为分子命题．复合命题自然也是陈述句，其真值依赖于构成该复合命题的各简单命题的真值以及联结词，从而复合命题有确定的真值．如“张三学英语和李四学日语”就是一个复合命题，由简单命题“张三学英语”“李四学日语”经联结词“和”联结而成，这两个简单命题真值均为真时，该复合命题方为真．如果只限于简单命题的讨论，则除讨论真值外，再没有可研究的内容了．而命题逻辑所讨论的正是多个命题联结而成的复合命题的规律性．

在数理逻辑里，仅仅把命题看成是一个可取真或可取假的陈述句，所关心的并不是这些具体的陈述句的真值究竟为什么或在什么环境下是真还是假，这是有关学科本身研究的问题，而逻辑关心的仅是命题可以被赋予真或假这样的可能性，以及规定了真值后怎样与其他命题发生联系．

1.2 命题联结词及真值表

联结词可将命题联结起来构成复杂的命题，命题逻辑联结词的引入是十分重要的，其作用相当于初等数学里在实数集上定义的＋、－、×、÷等运算符．通过联结词便可定义新的命题，从而使命题逻辑的内容变得丰富起来，我们要讨论的仅只是复合命题的真值，此值可由组成它的简单命题的真值所确定．值得注意的是逻辑联结词与日常自然用语中的有关联结词的共同点和不同点．

下面介绍五个常用的逻辑联结词：

$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$

1.2.1 否定词 $\neg$

否定词“$\neg$”是个一元联结词，亦称否定符号．一个命题 P 加上否定词就形成了一个新的命题，记作 $\neg P$，这个新命题是命题的否定，读作非 P．

否定词的真值规定如下：若命题 P 的真值为真，那么 $\neg P$ 的真值就为假；若 P 的真值为假，那么 $\neg P$ 的真值就为真．$\neg P$ 与 P 间的真值关系，常常使用称作真值表的一种表格来表

示，如图 1.2.1 所示.

也可将图 1.2.1 看作是对$\neg P$ 的定义. 它表明了$\neg P$ 的真值如何依赖于 P 的真值. 真值表描述了命题之间的真值关系、很直观，当命题变项的个数不多时，也很容易建立，真值表是命题逻辑里研究真值关系的重要工具.

P	$\neg P$
T	F
F	T

或

P	$\neg P$
1	0
0	1

图 1.2.1

例 1 “昨天张三去看球赛了”. 该命题以 P 表示，于是“昨天张三没有去看球赛”，该新命题便可用$\neg P$ 表示.

若昨天张三去看球赛了，命题 P 是真的，那么新命题$\neg P$ 必然是假的. 反之，若命题 P 是假的，那么$\neg P$ 就是真的. 这符合图 1.2.1的描述.

例 2 Q：今天是星期三.

$\neg Q$：今天不是星期三.

然而$\neg Q$ 不能理解为“今天是星期四”，因为“今天是星期三”的否定，并不一定必是星期四，还可能是星期五、星期六……在这种情况下，要注意否定词的含义是否定被否定命题的全部，而不是一部分.

1.2.2 合取词$\wedge$

合取词“$\wedge$”是个二元命题联结词，亦称合取符号. 将两个命题 P,Q 联结起来，构成一个新的命题 $P\wedge Q$，读作 P,Q 的合取，也可读作 P 与 Q. 这个新命题的真值与构成它的命题 P,Q 的真值间的关系，由合取词真值表来规定如图 1.2.2.

P	Q	$P\wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

图 1.2.2

图 1.2.2 指出，只有当两个命题变项 $P=\mathrm{T}$, $Q=\mathrm{T}$ 时方有 $P\wedge Q=\mathrm{T}$，而 P,Q 只要有一为 F，则 $P\wedge Q=\mathrm{F}$. 这样看来，$P\wedge Q$可用来表示日常用语 P 与 Q，或 P 并且 Q.

例 3 P：教室里有 10 名女同学.

Q：教室里有 15 名男同学.

不难看出，命题“教室里有 10 名女同学与 15 名男同学”，便可由 $P\wedge Q$ 来描述了.

例 4 A：今天下雨了.

B：教室里有 100 张桌子.

可知 $A\wedge B$ 就是命题“今天下雨了并且教室里有 100 张桌子”.

P,Q,A,B 都是简单命题，通过合取词$\wedge$，得到了复合命题 $P\wedge Q$，$A\wedge B$. 复合命题通过$\wedge$还可得到复合命题的复合命题.

日常自然用语里的联结词“和”、“与”、“并且”，一般是表示两种同类有关事物的并列关系(如例 3). 而在逻辑语言中仅考虑命题与命题之间的形式关系或说是逻辑内容，并不顾及日常自然用语中是否有此说法. 这样，“$\wedge$”同“与”、“并且”又不能等同视之. 例 4 在日常自然用语中是不会出现的语句，因 A，B 毫无联系，然而在数理逻辑中 $A\wedge B$ 是可以讨论的.

日常自然用语中说，“这台机器质量很好，但是很贵”，这句话的含义是说同一台机器质量很好而且很贵. 若用 P 表示“这台机器质量很好”，用 Q 表示“这台机器很贵”，那么这句话的逻辑表示就是 $P\wedge Q$，尽管这句话里出现的联结词是“但是”. 总之，合取词有“与”、“并且”的含义，逻辑联结词是自然用语中联结词的抽象，两者并不等同，这是需注意的.

1.2.3 析取词∨

析取词"∨"是个二元命题联结词，亦称析取符号。将两个命题 P、Q 联结起来，构成一个新的命题 $P\vee Q$，读作 P、Q 的析取，也读作 P 或 Q。这个新命题的真值与构成它的命题 P、Q 的真值间的关系，由析取词真值表来规定，如图 1.2.3 所示。

P	Q	$P\vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

图 1.2.3

图 1.2.3 指出，当 P、Q 有一取值为 T 时，$P\vee Q$ 便为 T。仅当 P、Q 均取 F 值时，$P\vee Q$ 方为 F。这就是析取词的定义。$P\vee Q$ 可用来表示自然用语 P 或 Q。

例 5 P：今天刮风。

Q：今天下雨。

命题"今天刮风或者下雨"便可由 $P\vee Q$ 来描述了。

例 6 A：2 小于 3.

B：雪是黑的。

$A\vee B$ 就是命题"2 小于 3 或者雪是黑的"。由于 2 小于 3 是真的，所以 $A\vee B$ 必取值为真，尽管"雪是黑的"这命题取假。

同样需注意析取词同"或"的异同。

1.2.4 蕴涵词→

蕴涵词"→"也是个二元命题联结词，亦称推断符号。将两个命题 P、Q 联结起来，构成一个新的命题 $P\to Q$，读作如果 P 则 Q，或读作 P 蕴涵 Q，如果 P 那么 Q，其中 P 称前件（前项、条件），Q 称后件（后项、结论）。

规定只有当 P 为 T 而 Q 为 F 时，$P\to Q=\mathrm{F}$。而 $P=\mathrm{F}$、Q 任意，或 $P=\mathrm{T}$、$Q=\mathrm{T}$ 时，$P\to Q$ 均取值为 T。真值表见图 1.2.4。

P	Q	$P\to Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

图 1.2.4

引入→的目的是希望用来描述命题间的推理，表示因果关系。实际上，图 1.2.4 说明了：

$P\to Q=\mathrm{T}$ 下，若 $P=\mathrm{T}$ 必有 $Q=\mathrm{T}$，而不会出现 $Q=\mathrm{F}$，这表明 $P\to Q$ 体现了 P 是 Q 成立的充分条件。

$P\to Q=\mathrm{T}$ 下，若 $P=\mathrm{F}$ 可有 $Q=\mathrm{T}$，这表明 $P\to Q$ 体现了 P 不必是 Q 成立的必要条件。

使用 $P\to Q$ 能描述推理。即 $P\to Q$ 为真时，只要 P 为真必有 Q 真，而不能出现 P 真而 Q 假就够了。至于 P 为假时，Q 取真取假，并不违背 P 为真时 Q 必真。从而仍可规定 P 为假时，$P\to Q$ 取真。这当然只是对 $P\to Q$ 的一种说明，而从逻辑上说，本可按真值表定义 $P\to Q$，可不必涉及具体含义。另外，当 $P=\mathrm{F}$ 时对 $P\to Q$ 真值的不同定义方式将给推理的讨论带来不同的表示形式，也是允许的。

图 1.2.5 是 $\neg P\vee Q$ 的真值表，显然图 1.2.4 同 1.2.5 是相同的，在 P、Q 的所有取值下，$P\to Q$ 同 $\neg P\vee Q$ 都有相同的真值，于是可记作

$$P\to Q=\neg P\vee Q\text{（真值相同的等值命题以等号联结）}$$

这也说明→可由 ¬，∨ 来表示，从逻辑上看“如果 P 则 Q”同“非 P 或 Q”是等同的两个命题.

P	Q	$\neg P \vee Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

图 1.2.5

蕴涵词→与自然用语“如果……那么……”有一致的一面，可表示因果关系. 然而 P,Q 是无关的命题时，逻辑上允许讨论 $P \to Q$. 并且 $P = \mathrm{F}$ 则 $P \to Q = \mathrm{T}$，这在自然用语中是不大使用的.

例 7 P：$n > 3$（n 为整数）

Q：$n^2 > 9$

命题 $P \to Q$ 表示“如果 $n > 3$ 那么 $n^2 > 9$”，分析 $P \to Q$ 的真值.

(1) $P = Q = \mathrm{T}$. 例如，$n = 4 > 3$，有 $n^2 = 16 > 9$，这符合事实 $P \to Q = \mathrm{T}$，正是我们所期望的可用 $P \to Q$ 表示 P,Q 间的因果关系，这时规定 $P \to Q = \mathrm{T}$ 是自然的.

(2) $P = \mathrm{T}$，$Q = \mathrm{F}$. 例如，$n > 3$ 而 $n^2 < 9$ 这是不会成立的，也可用 $P \to Q$ 表示 P,Q 间的因果关系是不成立的，自然规定 $P \to Q = \mathrm{F}$.

(3) $P = \mathrm{F}$ 而 $Q = \mathrm{F}$ 或 T. 例如，

$$n = 2 < 3 \quad 有\ n^2 = 4 < 9$$

$$n = -4 < 3 \quad 有\ n^2 = 16 > 9$$

由于前提条件 $n > 3$ 不成立，而 $n^2 > 9$ 成立与否并不重要，都不违反对自然用语“如果 $n > 3$ 那么 $n^2 > 9$”成立的肯定. 于是 $P = \mathrm{F}$ 时可规定 $P \to Q = \mathrm{T}$. 当然在肯定了(1)，(2)的情况下，对 $P = \mathrm{F}$ 时 $P \to Q$ 的值另作规定也是可以的，同样不违反自然语句“如果……那么……”可以用 $P \to Q$ 来描述. 总之，对 $P \to Q$ 的这种说明是可接受的，但也不是说只有这样的解释才是合理的.

例 8 P：$2 + 2 = 5$

Q：雪是黑的

$P \to Q$ 就是命题“如果 $2 + 2 = 5$，那么雪是黑的”. 从蕴涵词的定义看，由于 $2 + 2 = 5$ 是不成立的或说 P 取 F 值，不管 Q 取真取假都有 $P \to Q = \mathrm{T}$.

联结词→，较 ¬、∨、∧ 难于理解，然而它在逻辑中用于表示因果关系，因而又是最有用的.

1.2.5 双条件词↔

双条件词“↔”同样是个二元命题联结词，亦称等价符号. 将两个命题 P,Q 联结起来构成新命题 $P \leftrightarrow Q$，读作 P 当且仅当 Q，或读作 P 等价于 Q. 这个新命题的真值与 P,Q 真值间的关系，由双条件词的真值表来规定，如图 1.2.6 所示.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

图 1.2.6

图 1.2.6 指出，只有当两个命题 P,Q 的真值相同或说 $P = Q$ 时，$P \leftrightarrow Q$ 的真值方为 T. 而当 P,Q 的真值不同时，$P \leftrightarrow Q = \mathrm{F}$.

若建立 $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ 的真值表，就可发现 $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ 和 $P \leftrightarrow Q$ 有相同的真值，于是

$$(P \to Q) \wedge (Q \to P) = P \leftrightarrow Q$$

例 9 P：$\triangle ABC$ 是等腰三角形

Q：$\triangle ABC$ 中有两个角相等

命题 $P \leftrightarrow Q$ 就是"$\triangle ABC$ 是等腰三角形当且仅当$\triangle ABC$ 中有两个角相等". 显然就这个例子而言 $P \leftrightarrow Q = \mathrm{T}$.

1.2.6 总结

由五个联结词所定义的运算是数理逻辑中最基本、最常用的逻辑运算. 一元二元联结词还有多个，此外还有三元以至多元的联结词，因其极少使用，况且又都可由这五个基本联结词表示出来，所以无需一一定义了.

联结词是由命题定义新命题的基本方法.

命题逻辑的许多问题都可化成是计算复合命题的真假值问题，真值表方法是极为有力的工具，是应十分重视和经常使用的.

由联结词构成新命题的真值表中，对仅由两个变元 P,Q 构成的新命题 A 而言，每个变元有 T，F 两种取值，从而 P,Q 共有四种可能的取值，对应于真值表中的四行，每一行下命题 A 都有确定的真值. 对 P,Q 的每组真值组合(如 $P = \mathrm{T}$，$Q = \mathrm{F}$)或说真值指派，都称作命题 A 的一个解释. 一般地说，当命题 A 依赖于命题 $P_1,\cdots,P_n$时，则由 $P_1,\cdots,P_n$ 到 A 的真值表就有 2^n行，每一行对应着 $P_1,\cdots,P_n$的一组真值，在这组真值下，A 的真值随之而定，$P_1,\cdots,P_n$ 的每组真值都称作命题 A 的一个解释. A 有 2^n个解释，命题的解释用符号 I 表示.

由于数理逻辑是采用数学的符号化的方法来研究命题间最一般的真值规律的，而不涉及判断一个命题本身如何取真取假，不顾命题的具体含义，而是抽象地、形式地讨论逻辑关系，这就导致了数理逻辑中所讨论的命题与自然用语的差异.

联结词 $\wedge$、$\vee$、$\neg$ 同构成计算机的与门、或门和非门电路是相对应的. 从而命题逻辑是计算机硬件电路的表示、分析和设计的重要工具. 也正是数理逻辑应用于实际，特别是应用于计算机学科推动了其自身的发展.

1.3 合式公式

命题公式是命题逻辑讨论的对象，而由命题变项使用联结词可构成任意多的复合命题，如 $\neg P \wedge Q$，$P \wedge Q \vee R$，$P \rightarrow \neg Q$ 等. 它们是否都有意义呢？只有一个联结词的命题 $\neg P$，$P \wedge Q$，$P \rightarrow Q$ 当然是有意义的. 由两个联结词构成的命题 $P \wedge Q \vee R$ 至少意义不明确，是先作 $P \wedge Q$ 再对 R 作 $\vee$，还是先作 $Q \vee R$ 再对 P 作 $\wedge$ 呢？$\neg P \wedge Q$ 也有同样的问题. 解决运算次序是容易的，可像初等代数那样使用括号的办法，在逻辑运算中也常使用圆括号来区分运算的先后次序. 这样由命题变项、命题联结词和圆括号便组成了命题逻辑的全部符号. 进一步的问题是建立一般的原则以便生成所有的合法的命题公式，并能识别什么样的符号串是合法的(有意义的)？

合式公式(简记为 Wff)的定义：

(1) 简单命题是合式公式.

(2) 如果 A 是合式公式，那么 $\neg A$ 也是合式公式.

(3) 如果 A,B 是合式公式，那么$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$和$(A \leftrightarrow B)$是合式公式.

(4) 当且仅当经过有限次地使用(1),(2),(3)所组成的符号串才是合式公式.

这个定义给出了建立合式公式的一般原则,也给出了识别一个符号串是否是合式公式的原则.

这是递归(归纳)的定义. 在定义中使用了所要定义的概念,如在(2)和(3)中都出现了所要定义的合式公式字样;其次是定义中规定了初始情形,如(1)中指明了已知的简单命题是合式公式.

条件(4)说明了哪些不是合式公式,而(1),(2),(3)说明不了这一点.

依定义,若判断一个公式是否为合式公式,必然要层层解脱回归到简单命题方可判定.

$\neg(P\wedge Q)$, $(P\rightarrow(P\wedge Q))$, $(((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R))\leftrightarrow(P\rightarrow R))$都是合式公式. 而 $\neg P\vee Q\vee$, $((P\rightarrow Q)\rightarrow(\ \wedge Q))$, $(P\rightarrow Q$ 都不是合式公式,因为没有意义, 我们不讨论.

在实际使用中,为了减少圆括号的数量,可以引入一些约定,如规定联结词优先级的办法,可按 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$的排列次序安排优先的级别,多个同一联结词按从左到右的优先次序. 这样,在书写合式公式时,可以省去部分或全部圆括号. 通常采用省略一部分又保留一部分括号的办法,这样选择就给公式的阅读带来方便. 如

$(P\rightarrow(Q\vee R))$可写成 $P\rightarrow(Q\vee R)$或 $P\rightarrow Q\vee R$.

$(P\rightarrow(P\rightarrow R))$可写成 $P\rightarrow(P\rightarrow R)$.

命题演算中只讨论合式公式, 为方便起见, 将合式公式就称作公式.

1.4 重 言 式

1.4.1 定义

命题公式中有一类重言式. 如果一个公式,对于它的任一解释 I 下其真值都为真,就称为重言式(永真式). 如 $P\vee\neg P$ 是一个重言式.

显然由 $\vee$、$\wedge$、$\rightarrow$和$\leftrightarrow$联结的重言式仍是重言式.

一个公式,如有某个解释 I_0, 在 I_0下该公式真值为真, 则称这公式是可满足的. 如 $P\vee Q$ 当取 $I_0=(\mathrm{T},\mathrm{F})$即 $P=\mathrm{T}$, $Q=\mathrm{F}$ 时便有 $P\vee Q=\mathrm{T}$, 所以是可满足的. 重言式当然是可满足的.

另一类公式是矛盾式(永假式或不可满足的). 如果一个公式,对于它的任一解释 I 下真值都是假,便称是矛盾式. 如 $P\wedge\neg P$ 就是矛盾式.

不难看出这三类公式间有如下关系:

(1) 公式 A 永真, 当且仅当 $\neg A$ 永假.

(2) 公式 A 可满足, 当且仅当 $\neg A$ 非永真.

(3) 不是可满足的公式必永假.

(4) 不是永假的公式必可满足.

1.4.2 代入规则

A 是一个公式, 对 A 使用代入规则得公式 B, 若 A 是重言式, 则 B 也是重言式.

为保证重言式经代入规则仍得到保持，要求：

(1) 公式中被代换的只能是命题变元(原子命题)，而不能是复合命题.

如可用$(R\wedge S)$来代换某公式中的P，记作$\dfrac{P}{(R\wedge S)}$，而不能反过来将公式中的$(R\wedge S)$以P代之.

这一要求可以代数的例子来说明，如对

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

可用$a=cd$代入，仍会保持等式成立. 而若将$a+b$用cd代入，结果左端得$(cd)^2$，而右端无法代入cd，不能保持等式成立了.

(2) 对公式中某命题变项施以代入，必须对该公式中出现的所有同一命题变项代换同一公式.

一般地说，公式A经代入规则可得任一公式，而仅当A是重言式时，代入后方得保持. 如 $A=P\vee\neg P$，作代入$\dfrac{P}{\neg Q}$ 得 $B=\neg Q\vee\neg\neg Q$ 仍是重言式. 若将$\neg P$以Q代之得$B=P\vee Q$(这不是代入，违反了规定(2))不是重言式了.

在第3章公理系统中，代入规则视作重要的推理规则经常使用.

可使用代入规则证明重言式.

例 1 判断$(R\vee S)\vee\neg(R\vee S)$为重言式.

因$P\vee\neg P$为重言式，作代入$\dfrac{P}{(R\vee S)}$，便得$(R\vee S)\vee\neg(R\vee S)$. 依据代入规则，这公式必是重言式.

例 2 判断$((R\vee S)\wedge((R\vee S)\rightarrow(P\vee Q)))\rightarrow(P\vee Q)$为重言式.

不难验证$(A\wedge(A\rightarrow B))\rightarrow B$是重言式，作代入$\dfrac{A}{(R\vee S)}$，$\dfrac{B}{(P\vee Q)}$，便知

$$((R\vee S)\wedge((R\vee S)\rightarrow(P\vee Q)))\rightarrow(P\vee Q)$$

是重言式.

1.5 命题形式化

前面所介绍的五个联结词及其与自然用语的联系和区别，为自然语句的形式化作了准备. 一些推理问题的描述，常是以自然语句来表示的，需首先把自然语句形式化成逻辑语言，即以符号表示的逻辑公式，然后根据逻辑演算规律进行推理演算. 这一节讨论自然语句的形式化.

形式化过程. 先要引入一些命题符号$P,Q,\cdots$用来表示自然语句中所出现的简单命题，进而依自然语句通过联结词将这些命题符号联结起来，以形成表示自然语句的合式公式. 这个过程要注意自然语句中某些联结词的逻辑含义.

1.5.1 简单自然语句的形式化

(1) 北京不是村庄.

令P表示“北京是村庄”，于是(1)可表示为$\neg P$.

(2) 李明既聪明又用功.

令 P 表示"李明聪明",Q 表示"李明用功",于是(2)可表示为 $P \wedge Q$.

(3) $\sqrt{2}$ 是有理数的话,$2\sqrt{2}$ 也是有理数.

令 P 表示"$\sqrt{2}$ 是有理数",Q 表示"$2\sqrt{2}$ 是有理数",于是(3)可表示为 $P \rightarrow Q$.

1.5.2 较复杂自然语句的形式化

需注意的是逻辑联结词是从自然语句中提炼抽象出来的,它仅保留了逻辑内容,而把自然语句所表达的主观因素、心理因素以及文艺修辞方面的因素全部撇开了,从而命题联结词只表达了自然语句的一种客观性质.又由于自然语句本身并不严谨,常有二义性,自然会出现同一自然语句的不等价的逻辑描述,其根由在于人们对同一自然语句的不同理解.

例 1 张三与李四是表兄弟.

这是普通的自然用语,它是一个命题,令以 R 表示,若形式地规定:

P:张三是表兄弟.

Q:李四是表兄弟.

那么 $R = P \wedge Q$.

显然,这样的形式化是错误的.原因很简单."张三是表兄弟","李四是表兄弟"都不是命题.实际上"张三与李四是表兄弟"才是一个命题,而且是一个简单命题.这例子说明自然语句中的"与"不一定都能用合取词来表达.

例 2 张三或李四都能做这件事.

这句话中的"或"不一定就用析取词来表示,应允许有的人把这命题的内容理解为:张三能做这件事而且李四也能做这件事,这样,这句话便可用 $P \wedge Q$ 的形式表示了.

例 3 给了三个命题

A:今晚我在家里看电视.

B:今晚我去体育场看球赛.

C:今晚我在家里看电视或去体育场看球赛.

问题是 C 与 $A \vee B$ 是否表达的是同一命题呢?回答是否定的.因为 C 同 A,B 的真值关系应由图 1.5.1 给出.

这表的前 3 行很容易理解,而第 4 行是说今晚我在家看电视,又去体育场看球赛.显然对同一个人来说这是不可能的,从而这时 C 的真值为 F.这就说明了 C 与 $A \vee B$ 逻辑上是不相等的.即 C 中出现的"或"不能以"$\vee$"来表示.

由图 1.5.1 给出的 C 同 A,B 的逻辑关系,常称为异或(不可兼或),以 $\overline{\vee}$ 表示,有

$$C = A \overline{\vee} B$$

不难验证

$$C = (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$

若以 A,B 分别表示一位二进制数字,则 C 就表示了 A 与 B 的和(不考虑进位).

A	B	C
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

图 1.5.1

例 4 今天我上班,除非今天我病了.