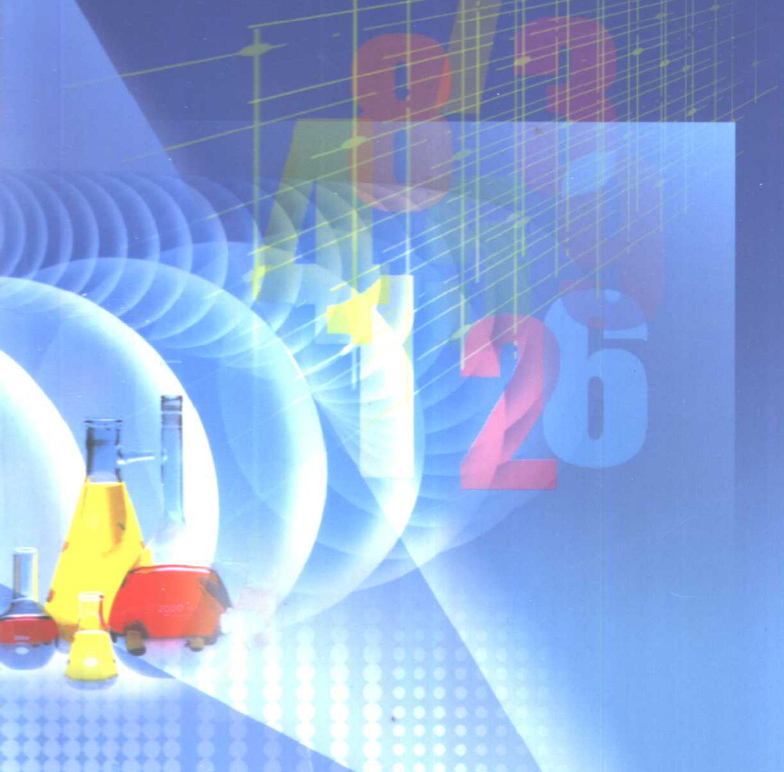
超级高中数理化公式定理

根据最新教学大纲高一～高三课程编写



世界图书出版公司

超级高中数理化公式定理

主编：乔家瑞　国运之　裘大彭

世界图书出版公司

上海·西安·北京·广州

图书在版编目（CIP）数据

超级高中数理化公式定理／乔家瑞，国运之，裘大彭主编. －上海：上海世界图书出版公司，2001. 10
ISBN 7-5062-2737-1

Ⅰ. 超… Ⅱ. ①乔… ②国… ③裘… Ⅲ. ①理科（教育）－公式－高中－教学参考资料 ②理科（教育）－定律－高中－教学参考资料 Ⅳ. G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 63586 号

超级高中数理化公式定理

乔家瑞 国运之 裘大彭 主编

上海 世界图书出版公司 出版发行
上海市武定路 555 号
邮政编码 200040
北京圣彩虹印刷有限公司印刷
各地新华书店经销

开本：787×1092 1/32 印张：12.5 字数：280 000
2001 年 10 月第 1 版 2001 年 10 月第 1 次印刷
印数：1 － 10 000
ISBN 7-5062-2737-1/0.06
定价：28.00 元

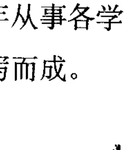
前　言

《超级高中数理化公式定理》是一本具有科学性、综合性、实用性的中学参考用书。可供中学广大师生使用，也可供参加成人高考的考生、师范院校在校大学生使用。

本套丛书是根据最新中学各科教学大纲和教材的内容和要求编写的，收集了教材中的全部知识点。在编写过程中，对较难理解的定义、概念，则从它们的内涵、外延、与其他定义、概念的区别和联系上给予详尽的解释，从而深刻地揭示了概念思维的形式；对重要的定理、公式、法则，则配备了典型的例题，阐述它们的条件、结论特征及使用方法的优化。同时，在编写过程中，还努力做到了准确无误、深入浅出、通俗易懂。

总之，本套丛书完全适应21世纪的新形势、新要求；完全适应中学生的实际情况。本套丛书可以与任何版本的相应中学学科教材配套使用。

本套丛书是由具有丰富教学经验、并多年从事各学科的理论研究的特级教师、高级教师精心编写而成。



乔家瑞 中学数学特级教师、中国数学奥林匹克高级教练员。

多年来从事中学数学教学工作、数学教师培训工作及理论研究工作，曾主编或编写中学数学教材、教学参考、教辅读物、科普读物数十部，并在报纸、杂志上发表文章数十篇。主要著作有《中学生应该怎样学习》、《怎样辅导孩子学数学》、《错题校正》、《解析几何教案选》、《走向清华北大》等。

国运之 1956年毕业于南京航空学院，原为北京教育学院物理系系主任、副教授，曾任中国物理学会教学委员会教育学院分会副主任委员。在中学物理教学研究、教材教法研究有着突出成就，出版著作40余部。其中关于中学物理教学和高考辅导的著述居多。如《名师启迪丛书高中物理学习指要》、《物理高考失分对策》、《新概念题典·高中物理》等都是国内畅销图书。

裘大彭 北京教育学院副教授，曾任北京化学教学研究会理事。全国知名的化学教学与研究权威人士。执教中学化学近30年，后从事中学化学教学法研究。

参加编写北京中学化学课本及《化学基本原理》等几十种图书，主编了《中学化学精要》、《名师启迪丛书·初、高中化学学习指要》、《走向清华北大·初、高中化学》等畅销图书。发表过多篇化学教学论文。

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbo

数学

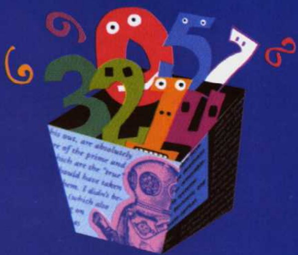
gaozhongshuxue

gaozhongshuxue

GAOZHONGSHUXUE

GAOZHONGSHUXUE

GAOZHONGSHUXUE



1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

目录

目录

1. 集合、简易逻辑

【集合】 把某些指定的对象集中在一起就成为一个集合，简称集、集合中每个对象叫做这个集合的元素.

集合通常用大写拉丁字母 A，B，C，…表示集合，用小写拉丁字母 a，b，c，…表示集合的元素.

【集合的特征】 集合中的元素具有确定性、互异性、无序性.

【集合的类型】

1. 有限集：含有有限个元素的集合叫有限集.
2. 无限集：含有无限个元素的集合叫无限集.
3. 空集：不含任何元素的集合叫做空集，记作 ϕ.

【集合的表示方法】

1. 列举法 把一个集合的元素逐个列举出来，写在大括号内，这一表示法叫做列举法.
2. 特征性质描述法 用该集合所含元素的共有特征性质来描述，这一表示法叫做特征性质描述法，具体作法是：在大括号内先写上表示该集合元素的一般符号及其取值范围，再画一条竖线(或一个冒号或分号)，再写出这一集合中的元素所具有的一个特征性质.

特征性质必须绝对明确，必须是集合中所有元素共有的特征性质.

【元素与集合的从属关系】 如果元素 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A，记作 $a \in A$；如果元素 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于集合 A，记作 $a \notin A$ 或 $a \bar{\in} A$ 或 $a \not\in A$.

【集合与集合的容量关系】 对于两个集合 A，B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集，记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$，读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”.

如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集，记作 $A \subsetneqq B$ 或 $B \supsetneqq A$.

当集合 A 不包含于集合 B，或集合 B 不包含集合 A 时，记作 $A \nsubseteq B$ 或 $B \nsupseteq A$. 有时也记作 $A \not\subset B$ 或 $B \not\supset A$.

显然，空集是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing \subseteq A$，空集是任何非空集合 B 的真子集，即 $\varnothing \subsetneqq B$.

若 $A \subseteq B$，$B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$；

若 $A \subseteq B$，$B \subseteq A$，则 $A=B$.

【常用数集的符号】

N 非负整数集；自然数集.

$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ 正整数集.

Z 整数集.

$\mathbf{Z}_+$ 或 $\mathbf{Z}_-$ 整数集 Z 内排除 0 的集.

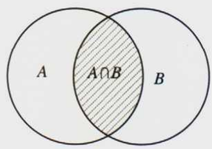
Q 有理数集. $\mathbf{Q}^*$ 或 $\mathbf{Q}_+$ 表示正有理数集.

R 实数集.

C 复数集.

【交集】 由两个集合 A，B 的公共元素所组成的集合，叫做集合 A，B 的交集，记作 $A\cap B$，读作"A 交 B"，即

$A\cap B=\{x\mid x\in A，且\ x\in B\}$.



$A\cap B$ 也可以用图中的阴影部分表示.

对于任何集合 A，B 都有

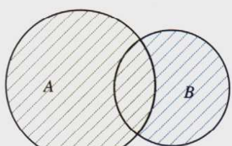
$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，

$A\cap\complement_U A=\varnothing$，$A\cap U=A$，

$A\cap B=B\cap A$.

【并集】 把两个集合 A，B 的所有元素合并起来所组成的集合，叫做集合 A，B 的并集，记作 $A\cup B$，读作"A 并 B"，即

$A\cup B=\{x\mid x\in A\ 或\ x\in B\}$.



$A\cup B$

$A\cup B$ 也可以用图中的阴影部分表示.

对于任何集合 A，B 都有

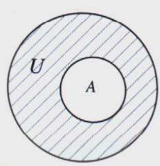
$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，

$A\cup U=U$，$A\cup\complement_U A=U$，

$A\cup B=B\cup A$.

【补集】 在一个研究过程中，如果一个集合含有所要研究的各个集合的全部元素，则这个集合可以看做一个全集，全集通常用 U 来表示.

在全集 U 中，集合 A 是它的一个子集，即 $A\subseteq U$. 由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合叫做 U 中集合 A 的补集. 记作 $\complement_U A$，即 $\complement_U A=\{x\mid x\in U 且\ x\notin A\}$，也可以用图中的阴影部分表示.



下述关系显然成立：

$\complement_U A\cup A=U$；$\complement_U(\complement_U A)=A$；

$(\complement_U A)\cap\varnothing A=$.

【德摩根定律】 对于任意集合 A，B 都有

$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$；

$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbo

这就是著名的德摩根定律. 它可以叙述为

A，B 的交集的补集等于 A，B 的补集的并集;

A，B 的并集的补集等于 A，B 的补集的交集.

例 1 设全集 $I=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$，集合 $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$，$B=\{3,\ 5\}$，则(　　).

(A) $I=A\cup B$　　(B) $I=(\complement_I A)\cup B$

(C) $I=A\cup(\complement_I B)$　　(D) $I=(\complement_I A)\cup(\complement_I B)$

解法 1: $A\cup B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$,

$(\complement_I A)\cup B=\{2,\ 4,\ 6\}\cup\{3,\ 5\}=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$,

$A\cup(\complement_I B)=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}\cup\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 7\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$.

$\therefore$ 应选 C.

解法 2: 利用文氏图.

	B	$\complement_I B$
A	3, 5	1, 7
$\complement_I A$	$\varnothing$	2, 4, 6

$\because$ $A\cap B=\{3,\ 5\}$,

$\therefore$ $A\cap(\complement_I B)=\{1,\ 7\}$,

$(\complement_I A)\cap B=\varnothing$,

$(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=\{2,\ 4,\ 6\}$,

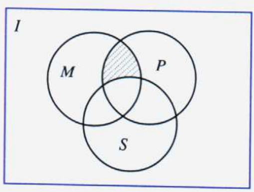
$A\cup(\complement_I B)=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}=I$.

$\therefore$ 应选 C.

例 2 如图，I 是全集，M，P，S 是 I 的 3 个子集，则阴影部分所表示的集合是(　　).

(A) $(M\cap P)\cap S$　　(B) $(M\cap P)\cup S$

(C) $(M\cap P)\cap(\complement_I S)$　　(D) $(M\cap P)\cup(\complement_I S)$



解: 从 4 个选择支可以发现，阴影部分所表示的集合一定与集合 $M\cap P$ 有关，它是 $M\cap P$ 的一个子集，继而考查 $M\cap P$ 与 S 或 $\complement_I S$ 的关系.

$\therefore$ 应是 $(M\cap P)\cap(\complement_I S)$，应选 C.

【命题的逻辑联结】

① 且　两个命题 p，q 用逻辑联词“且”联结起来构成一个新命题，记作 $p\wedge q$，读作“p 且 q”，称为联言命题.

$p\wedge q$ 的真值表为

p	q	$p\wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

② 或　两个命题 p，q 用逻辑联词“或”联结起来构成一个新命题，记作 $p\vee q$，读作“p 或 q”．称为选言命题．

$p\vee q$ 的真值表为

p	q	$p\vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

③ 非　对命题 p 加以否定，就得到一个新命题，叫做命题 p 的否定命题，记作，$\neg p$，读作“非 p”．

非 p 的真值表为

显然 $\neg(\neg p)=p$.

p	$\neg p$
1	0
0	1

存在性命题 q： $\exists x\in A$，使 $p(x)$ 成立，它的否定命题是

$\neg q$：$\forall\ x\in A$，有 $\neg p(x)$（使 $p(x)$ 不成立）.

全称命题 p: $\forall x\in A$，有 $p(x)$，它的否定命题是

$\neg q$：$\exists x\in A$，$\neg p(x)$.

④ 如果…，那么…把命题 p，q 用“如果…，那么…”联结起来的新命题，叫做假言命题，记作 $p\rightarrow q$，读作“p 蕴涵 q”或“如果 p，那么 q”或“若 p，则 q”，在 $p\rightarrow q$ 中，p 称为前件，q 称为后件．

$p\rightarrow q$ 的真值表为

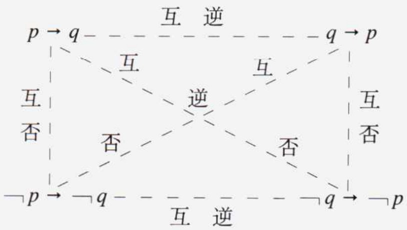
p	q	$p\rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

⑤ 等价　把蕴涵 $p\rightarrow q$ 与 $q\rightarrow p$ 用逻辑联词“且”联结起来，组成的新命题 $(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$ 叫做等价命题，记作 $p\longleftrightarrow q$，读作“p 等价 q”.

等价命题 $p\longleftrightarrow q$ 的真值表为

p	q	$p\longleftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

【命题的四种形式】 如果将命题 $p\rightarrow q$ 看做是原命题，则“$q\rightarrow p$”就是它的逆命题；“$\neg p\rightarrow\neg q$”就是它的否命题，“$\neg q\rightarrow\neg p$”就是它的逆否命题，它们的关系为



四种命题的真值表为

p	q	$p\to q$	$q\to p$	$\neg p\to\neg q$	$\neg q\to\neg p$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1

从真值表可以看出，两个互为逆否的命题是等效的，两个互逆或互否的命题是不等效的.

充要条件

1 如果 $p\Longrightarrow q$，则称 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

2 如果 $p\Longrightarrow q$，且 $q\Longrightarrow p$，则称 P 是 q 的充分且必要条件，简称 p 是 q 的充要条件，记作 $p\Longleftrightarrow q$.

从集合的观点看.

1. 若 $A\subseteq B$，则 A 是 B 的充分条件；
2. 若 $A\supseteq B$，则 A 是 B 的必要条件；
3. 若 $A=B$，则 A 是 B 的充要条件.

例 1 设集合 $M=\{x\mid x>0\}$，$p=\{x\mid x<5\}$，那么“$x\in M$ 或 $x\in P$”是“$x\in M$ 且 $x\in P$”成立的(　　).

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

解：若 $x\in M$ 或 $x\in P$，则 $x\in(M\cup P)$，而 $M\cup P=\mathbf{R}$.

若 $x\in M$ 且 $x\in P$，则 $x\in(M\cap P)$而 $M\cap P=\{x\mid 0<x<5\}$

$\therefore$ $x\in M$ 且 $x\in P$ 成立时，必有 $x\in M$ 或 $x\in P$ 成立，而 $x\in M$ 或 $x\in P$ 成立时，却不一定有 $x\in M$ 且 $x\in P$ 成立.

$\therefore$ 应选 B.

例 2 已知 $h>0$，设命题甲为两个实数 a，b 满足 $|a-b|<2h$，命题乙为两个实数 a，b 满足 $|a-1|<h$ 且 $|b-1|<h$，那么(　　).

(A) 甲是乙的充分非必要条件

(B) 甲是乙的必要非充分条件

(C) 甲是乙的充要条件

(D) 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

解：当 $|a-b|<2h$ 成立时，设 $a=1+3h$，$b=1+\frac{5}{2}h(h>0)$，则 $|a-1|=3h>h$.

∴ 命题甲不是命题乙的充分条件.

反之，当 $|a-1|<h$ 且 $|b-1|<h$ 时.

∵ $|a-b|=|(a-1)-(b-1)|\leqslant|a-1|+|b-1|<2h$.

∴ 命题甲是命题乙的必要条件.

∴ 应选 B.

2. 函 数

【映射】 设 A，B 是两个非空集合，如果根据某个确定的对应法则 f，使得对 A 中的每一个元素 a，B 中都有且仅有一个元素 b 与它对应，那么这个对应叫做集合 A 到集合 B 的映射，记作 f: $A\rightarrow B$. b 叫做 a(在 f 作用下)的像，记作 $b=f(a)$，a 叫做 b(在 f 作用下)的原像.

【函数】 以 x 为自变量的函数 $y=f(x)$ 就是集合 A 到集合 B 的映射，其中 A，B 都是非空的数的集合，自变量 x 取值的集合 A 就是函数 $f(x)$ 的定义域，和 x 对应的 y 值就是函数值，函数值的集合 C 就是函数 $f(x)$ 的值域($C\subseteq B$).

定义域、对应法则和值域称为函数概念的三大要素，而其中的值域是由定义域和对应法则决定的，所以也可以说定义域和对应法则是函数概念的两大要素.

【函数的单调性】

■ 增函数：如果对于给定区间上的函数 $f(x)$，对于属于这个区间的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，即么就说 $f(x)$ 在这个区间上是增函数.

■ 减函数：如果对于给定区间上的函数 $f(x)$，对于属于这个区间的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是减函数.

如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间上是增函数或减函数，就说 $f(x)$ 在这个区间上具有(严格的)单调性，这一区间叫做 $f(x)$ 的单调区间.

说明

① 单调区间 D 不一定是函数的定义域，即 D 可能是定义域的一个子集，由此可知函数的单调性一般说是函数的局部性质.

② 函数的单调性反映在它的图象上的特征是：如果函数 $f(x)$ 是区间 D 上的增(减)函数，则图象在 D 上的部分从左到右是上升(下降)的.

【函数的奇偶性】

奇函数：如果函数 $f(x)$ 对于定义域内任意一个 x，都有 $f(x)=-f(-x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数. 奇函数的图象关于原点成中心对称图形.

偶函数：如果函数 $f(x)$ 对于定义域内任意一个 x，都有 $f(x)=f(-x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数. 偶函数的图象关于 y 轴成轴对称图形.

说明

① 函数的奇偶性是函数在定义域上的整体性质. 因此往往被某些特殊情况所破坏. 同时从奇偶性定义知，如果一个函数具有奇偶性，那么它的定义域一定关于原点对称，反之，一个函数的定义域关于原点对称，这个函数不一定具有奇偶性.

② 可以变形使用奇、偶函数的定义进行判断：

$$f(x)+f(-x)=0,\qquad \frac{f(x)}{f(-x)}=-1\quad (f(-x)\neq 0);$$

$$f(x)-f(-x)=0,\qquad \frac{f(x)}{f(-x)}=1\quad (f(-x)\neq 0).$$

③ 函数按奇偶性分类如下：

$$\text{函数}\begin{cases}\text{只是奇函数(如 } y=x,\ y=\dfrac{1}{x}\text{);}\\ \text{只是偶函数(如 } y=x^2,\ y=\dfrac{1}{x^4}\text{);}\\ \text{既是奇函数又是偶函数(如 } y=0\text{);}\\ \text{既不是奇函数又不是偶函数(如 } y=x+1,\ y=x^2+3x-2\text{).}\end{cases}$$

【反函数】 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 A，值域是 $f(a)$，如果 $f(A)\to A$ 也是一个映射，那么就称它为映射 f 的逆映射，记作 f^{-1}：$f(x)\to A$，由它所确定的函数叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，它的定义域为 $f(A)$，值域是 A，可见，函数 $y=f(x)$ 与函数 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数. 由于习惯上常用 x 表示自变量，y 表示函数，因而在函数 $x=f^{-1}(y)$ 的表达式中，一般都还要对调字母 x 和 y，把它改写成 $y=f^{-1}(x)$.

【反函数的单调性】 函数 $y=f(x)$ 在单调(增或减)区间上必存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，而且函数 $y=f^{-1}(x)$ 与函数 $y=f(x)$ 具有相同的单调

性(增或减).

【互为反函数的函数图象间的关系】 互为反函数的两个函数 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

【n 次方根】 如果一个数的 n 次方等于 a ($n>1$ 且 $n\in \mathbf{N}_+$), 那么这个数叫做 a 的 n 次方根. 即如果 $x^n=a$, 那么 x 叫做 a 的 n 次方根, 其中 $n>1$ 且 $n\in \mathbf{N}_+$.

当 n 是奇数时, 正数的 n 次方根是一个正数, 负数的 n 次方根是一个负数;

当 n 是偶数时, 正数的 n 次方根有 2 个, 它们互为相反数.

0 的任何次方根都是 0.

【根式】 式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式, 其中 n 叫做根指数, a 叫做被开方数.

当 n 为奇数时, $\sqrt[n]{a^n}=a$;

当 n 为偶数时, $\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases} a(a\geqslant 0); \\ -a(a<0). \end{cases}$

【分数指数幂】 规定 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ ($a>0$, m, $n\in \mathbf{N}_+$, 且 $n>1$);

$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$ ($a>0$, m, $n\in \mathbf{N}_+$, 且 $n>1$).

0 的正分数指数幂等于 0, 0 的负分数指数幂没有意义.

【有理指数幂的运算性质】 规定了分数指数幂的意义之后, 指数概念就从整数指数推广到有理数指数. 整数指数幂的运算性质, 对于有理指数幂同样适用:

① $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$ ($a>0$, r, $s\in \mathbf{Q}$);

② $(a^r)^s=a^{rs}$ ($a>0$, r, $s\in \mathbf{Q}$);

③ $(ab)^r=a^rb^r$ ($a>0$, $b>0$, $r\in \mathbf{Q}$).

上述运算法则对于无理指数幂 a^p ($a>0$, p 是一个无理数)也适用.

例 1 求值: $16^{\frac{3}{4}}$, $1000^{-\frac{2}{3}}$, $(3\frac{3}{8})^{-\frac{1}{3}}$.

解: $16^{\frac{3}{4}}=(2^4)^{\frac{3}{4}}=2^{4\times\frac{3}{4}}=2^3=8$;

$1000^{-\frac{2}{3}}=(10^3)^{-\frac{2}{3}}=10^{3\times(-\frac{2}{3})}=10^{-2}=\dfrac{1}{10^2}=\dfrac{1}{100}$;

$(3\frac{3}{8})^{-\frac{1}{3}}=(\dfrac{27}{8})^{-\frac{1}{3}}=[(\dfrac{3}{2})^3]^{-\frac{1}{3}}=(\dfrac{3}{2})^{3\times(-\frac{1}{3})}=(\dfrac{3}{2})^{-1}=\dfrac{2}{3}$.

例 2 化简 $\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}$.

解: $\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}=\dfrac{a\cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{11}{12}}}=a^{\frac{3}{2}-\frac{11}{12}}=a^{\frac{7}{12}}=\sqrt[12]{a^7}$.

试读结束：需要全本PDF请购买 www.ertongbo