弹性动力学

第一卷　有限运动

〔美〕A. C. 艾龙根　〔土耳其〕E. S. 舒胡毕著

石油工业出版社

弹 性 动 力 学

第一卷 有限运动

〔美〕A. C. 艾龙根 〔土耳其〕E. S. 舒胡毕 著

戈 革 译

石 油 工 业 出 版 社

内 容 提 要

《弹性动力学》英文版全书分二卷，第一卷为有限运动，第二卷为线性理论。全书是弹性动力学的一部专著，对波传播理论的数学基础和物理基础作了系统的论述，取材精炼，论证严谨。本书根据英文版的第一卷译出。在第一卷中论述了热弹性动力学的基本理论，论述了奇面的传播，给出了弹性体有限运动的各种问题的解，研究叠加在大的静态形变上的微小运动。

本书可供地球物理学、地质学、应用数学、应用物理学、工程学、力学的师生、研究人员、工程技术人员阅读参考。

A. C. Eringen　E. S. Suhubi
ELASTODYNAMICS
VOLUME 1　Finite Motions
ACADEMIC PRESS New York and London 1974

弹 性 动 力 学

第一卷　有限运动

〔美〕A. C. 艾龙根　〔土耳其〕E. S. 舒胡毕　著
戈 革 译

石油工业出版社出版
（北京安定门外外馆东后街甲36号）
地质出版社印刷厂排版
北京顺义燕华营印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

850×1168毫米 32开本 $11^7/_8$印张 310千字 印 1—5,000
1983年10月北京第1版 1983年10月北京第1次印刷
书号：15037·2418 定价： 1.50 元

序　　言

自从纳维（1821）和科希（1828）开始创立弹性理论时起，弹性动力学问题以及弹性固体中的波的传播这一课题就曾由很多工作者进行过起劲的研究。事实上，已有的文献浩如烟海，以致论述这一课题的任何企图都立即会使一个有先见之明的作者踌躇不前。因为，在任何一卷本或两卷本的一部论著中，是不可能公平地对待所有方面的。也许，将近两个世纪以来在这一重要领域中著作甚少，其一部分原因也正在此。

最近二十年来，动力学问题的研究甚至受到了更大的重视。空间技术中节约材料的要求、工业应用中合成材料的引入、地下爆炸以及地震学和石油工业中的重要问题，曾经刺激了有限形变理论、固体中冲击波的传播、衍射理论、动态胁强集中以及不均匀材料和各向异性材料中波的传播方面的强烈研究。工程科学、力学、应用数学和地球物理学方面的研究生课程中，几乎全都包括着一两门这方面的课。但是，除了少数几种专门论述（大多已经绝版）以外，直到本书完成时却还不存在任何可以用于数学或指导研究的教材或论著。

本书的起源可以上溯到1954年，当时作者之一（艾龙根）担任了线性弹性动力学方面的一门研究生课程。多年以来，也曾编写过一些油印讲义，并曾反复修订，分发给学生和有兴趣的同事们。在1960年，也曾经计划写一本这方面的书，但却发现那书在某种意义上过于庞杂，而且很自然地没有能够包括即将到来的那些主要发展。现在这两本书是重新组织并全部改写过的，为的是包括最近十年来的那些主要发展以及其他较早的发展。希望这两本书能够满足认真学习弹性动力学数学理论的需要。

第一章包括基本方程的发展；除该章以外，每一卷都是可以单独阅读的。曾经学过连续媒质力学初等课程的读者们可以略去

第一章而学习第一卷中的奇面、冲击波、有限幅振动以及已变形和有胁强的弹性固体中波的传播等理论，或是学习第二卷中的线性理论。按照需要之不同，每一卷都可供一学期或两学期的课程之用。我们相信，这两卷书可以适合现时的任一工程学系使用，也适合力学系、地球物理学系、地质学系、应用数学系、应用物理学系以及工程科学学系使用，只要各系有一种严密的课程设置来打好波传播理论的数学基础和物理基础就行。

第一卷包括四章正文和两个附录。第一章处理热弹性学的动力学理论基本方程的发展，概括地讨论了有限形变、胁变、转动、它们的不变量、长度改变量、面积改变量、体积改变量、胁变的相容性条件、连续区运动学、总体和局部平衡定律、连续区热力学和本构理论等方面的有关概念，得到了适用于严格的非线性理论以及线性理论和二次理论的场方程。第二章处理奇面的传播。为了研究冲击波和加速度波，得出并应用了几何学条件、运动学条件和动力学条件。在第三章中，我们给出了弹性体有限运动的各种问题的解：圆柱和球的径向振动，并且讨论了简单波理论。第四章致力于研究叠加在大的静态形变上的微小运动，这对稳定性理论是一个带根本性的论题。论述张量分析学和特征线理论的附录A和附录B，为学习第一卷提供了必要的基础。

第二卷对于和线性理论有关的数学问题进行了彻底的研究。在第五章中讨论了各种基本定理（唯一性、倒易性、积分表象、变分原理等等）。第六至八章提供了一维、二维和三维空间中重要问题的很多精确解。在第九章中，我们概略地论述了衍射理论。

本书略去许多重要论题，例如各向异性固体、混合物和热效应，尽管为了将来的目的充分发展了热弹性学的基本问题。书中只提供精确解，这样就省略了大量的近似处理和数字处理。但是我们相信，用本书所提供的基本理论和数学方法装备起来的那些人们，是可以进一步对付近似计算和数字技术的。理论的充分建立和验证既已超过一个半世纪之久，我们也就用不着涉及有关实验工作的任何讨论了。

目　　录

第一章　基本理论

1.1　本章范围

本章致力于推导热弹性固体的基本方程。为此目的，我们研究物体的形变几何学、运动学和平衡定律而不考虑它们的形状和构成，并通过热力学公理和其他的本构公理来建立起一组适用于热弹性固体的本构方程。然后，就将得出适用于线性固体和非线性固体的场方程。

在第 1.2 节和 1.3 节中，我们引用坐标并讨论一般的运动。在第 1.4 节中，引入对一切柔体都很基本的形变梯度以及形变和胁变的量度。通过讨论长度改变量和角度改变量，我们在第 1.5 节中给出胁变张量的几何意义。在第 1.6 节中，提出了各种的胁变不变量并把它们互相联系了起来。我们在第 1.7 节中计算物体在任意形变下的面积改变量和体积改变量，而在第 1.8 节中推导胁变的相容性条件。连续区运动学和变化率量度都在第 1.9 节中给出。总体平衡定律、质量守恒、力矩的平衡、能量守恒和熵公理，是第 1.10 节的课题。它们的局部形式，包括越过一个运动的不连续性面时的跃变条件，都在第 1.11 节中得出。在第 1.12 中，我们得出局部平衡定律在参照系中的表示式，这是一种在研究非线性理论时往往更便于应用的表示式。到此为止，完全没有涉及物体的构成，从而推得的结果是对所有物体都适用的。我们从第 1.13 节开始讨论热弹性固体的本构方程。推导了受到热力学、客观性和材料对称性限制的这些方程的精确形式。在第 1.14 节中，针对各向同性固体给出了本构方程的各种形式。在第 1.15 和 1.16 节中，我们得到了线性近似和二次近似。

热弹性固体的场方程是平衡定律和本构方程相结合的结果。在第 1.17 节中，求出了关于非线性理论和线性理论的这种结合

结果。那里提出了典型的边值-初值问题。在第1.18节中，我们讨论由于物理考虑而出现的可能加在材料模量上的那些限制。在第1.19节中，我们对求解弹性动力学问题所必需的那些关键方程作一小结。本章的最后一节（第1.20节）给出一种可以用来过渡到曲线坐标的方法。针对普遍的正交曲线坐标，特别是柱面坐标系和球面坐标系，给出了平衡定律和场方程的特殊形式。

1.2 坐标

一个物体的各个物质点，在一个确定时刻 $t=0$ 占据由该物体的体积 V 及表面 S 构成的空间域 B。域B 中一个物质点 P 的位置，可以用一个直角坐标系 X_1、X_2、X_3（或简写为X_K，$K=1, 2, 3$）来标明。另外，这也可以利用从原点 O 画到点 P 的一个矢量$\mathbf{P}$（或者等效地写成$\mathbf{X}$，参阅图1.2.1）来标明。当在时刻 t 发生了形变以后，$V+S$的那些物质点将占据由体积 $\mathscr{V}$ 和曲面$\mathscr{S}$ 构成的一个空间域$\mathscr{B}$。在这一形变状态下，一个物质点可以用它的直角坐标 x_k，$k=1, 2, 3$ 来定位。有时候，认为这两个坐标系并不重合是有好处的。在应用曲线坐标的情况下，选用两个不同的坐标系是特别合适的；这两个坐标系一个用于未变形物体，而另一个则用于已变形物体。例如，当一个长方块变成一个圆柱时，对未变形长方块用直角坐标而对已变形物体用柱面坐标就可能被证实为特别有好处，尤其是在表示边值条件方面。利用两套坐标在澄清许多微妙的运动学问题方面也有另外一些优点。

当需要方程的显式分量时，我们就写出$X_1=X$, $X_2=Y$, $X_3=Z$ 以及 $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$。各坐标 X_K 叫做实体坐标或拉格朗日坐标，而 x_k 则叫做空间坐标或欧勒坐标。

直角基底矢量 $\mathbf{I}_K$ 和 $\mathbf{i}_k$ 分别是沿坐标 X_K 和 x_k 的单位矢量。点 P 和点 p 的位置矢量 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{p}$ 由下式给出

$$\mathbf{P}=X_K\mathbf{I}_K, \qquad \mathbf{p}=x_k\mathbf{i}_k \tag{1.2.1}$$

此处及以后，按重现下标求和的惯例是不言而喻的，例如，

$$\mathbf{P}=X_K\mathbf{I}_K=X_1\mathbf{I}_1+X_2\mathbf{I}_2+X_3\mathbf{I}_3$$

P 处的无穷小微分矢量 $d\mathbf{P}$ 和 p 处的无穷小微分矢量 $d\mathbf{p}$ 由下式

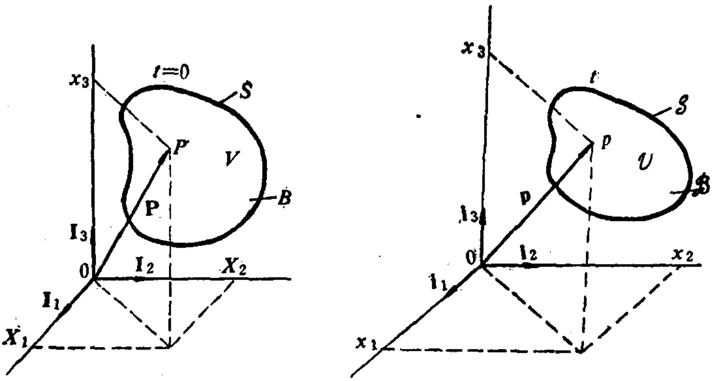

图1.2.1 用于未变形物体 B 和已变形物体 $\mathscr{B}$ 的坐标系

给出

(1.2.2) $$d\mathbf{P}=dX_K\mathbf{I}_K,\qquad d\mathbf{p}=dx_k\mathbf{i}_k$$

于是 B 和 $\mathscr{B}$ 中的弧长平方就分别是

(1.2.3) $$\begin{aligned}dS^2&=d\mathbf{P}\cdot d\mathbf{P}=\delta_{KL}dX_KdX_L=dX_KdX_K\\ ds^2&=d\mathbf{p}\cdot d\mathbf{p}=\delta_{kl}dx_kdx_l=dx_kdx_k\end{aligned}$$

式中

$$\delta_{KL}=\mathbf{I}_K\cdot\mathbf{I}_L,\qquad \delta_{kl}=\mathbf{i}_k\cdot\mathbf{i}_l$$

是克朗内克符号，当两个下标相同时它们等于1，否则等于0。

有时要将附属于 $\mathscr{B}$ 的一个矢量对 B 的直角基底矢量求投影，有时反之。例如，

$$p_K\equiv\mathbf{p}\cdot\mathbf{I}_K=x_k\mathbf{i}_k\cdot\mathbf{I}_K=x_k\delta_{kK}$$

就是 $\mathbf{p}$ 在 $\mathbf{I}_K$ 上的平行投影，此处

(1.2.4) $$\delta_{kK}=\delta_{Kk}\equiv\mathbf{i}_k\cdot\mathbf{I}_K$$

不是一个克朗内克符号，除非 $\mathbf{I}_K$ 和 $\mathbf{i}_k$ 相重合。由（1.2.4）式定义的这种量叫做转系符（*shifters*）。它们在把一个坐标系中的矢量用另一个坐标系中的投影表示出来时起着重要的作用。很显然，（1.2.4）不是别的，而正是两个坐标系 x_k 和 X_K 间的方向余弦。

同样，对于任一矢量，我们可以写出

$$\mathbf{v}=v_k\mathbf{i}_k=V_K\mathbf{I}_K \tag{1.2.5}$$

通过将此式和 $\mathbf{I}_L$ 或 $\mathbf{i}_l$ 求标积，我们得到 v 在 X_K 中的分量 V_K 或 $\mathbf{v}$ 在 x_k 中的分量 v_k

$$V_K=\delta_{Kk}v_k, \quad v_k=\delta_{kK}V_K \tag{1.2.6}$$

将一式代入另一式，就得到

$$\delta_{Kk}\delta_{kL}=\delta_{KL}, \qquad \delta_{kK}\delta_{Kl}=\delta_{kl} \tag{1.2.7}$$

注意，我们用大写字母和大写下标来表示 $\mathbf{v}$ 在实体坐标系中的分量，用小写字母和小写下标来表示它在空间坐标系中的分量。这一惯例将在全书中应用到底。

1.3 形变，运动

在外加负荷的影响下，物体B将运动和变形。运动将使 B的各个物质点达到新的空间位置。这种情况可以用一族单参量的映象来表示，即

$$x_k=x_k\ (X_1, X_2, X_3, t) \quad \text{或} \tag{1.3.1}$$

$$x_k=x_k\ (X_K, t), \qquad k=1, 2, 3$$

或者反过来，也可以用下列映象来表示：

$$X_K=X_K\ (x_1, x_2, x_3, t) \quad \text{或} \tag{1.3.2}$$

$$X_K=X_K\ (x_k, t), \qquad K=1, 2, 3$$

为了简单，我们也可以把上列二式写成

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \qquad \mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \tag{1.3.3}$$

方程（1.3.1）表明，在时刻 t, B 的一个物质点X_K占据了$\mathscr{B}$中的空间位置 x_k 。逆运动（1.3.2）表示了相反的现象，即在时刻 t 占据着空间位置 x_k 的物质点可以追溯到原位置 X_K。

我们假设，（1.3.2）是（1.3.1）在 X_K 的邻域中的唯一逆变换，而相反地，（1.3.1）是（1.3.2）在与此相对应的 x_k 邻域中的唯一逆变换。这一点可由著名的隐函数定理（参阅Widder〔1947，第 47 页〕）来保证的。

定理 （隐函数定理）**对于一个确定时刻 t，如果各函数 x_k（X_K, t） 是连续的并在点 P 的一个邻域$|X_K^1-X_K|<\Delta$中对**

X_K有连续的一级偏导数，而且雅各比行列式

$$(1.3.4)\qquad J\equiv\det\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_K}\right)=\begin{vmatrix}\partial x_1/\partial X_1 & \partial x_1/\partial X_2 & \partial x_1/\partial X_3\\ \partial x_2/\partial X_1 & \partial x_2/\partial X_2 & \partial x_2/\partial X_3\\ \partial x_3/\partial X_1 & \partial x_3/\partial X_2 & \partial x_3/\partial X_3\end{vmatrix}$$

在该邻域中不为零，则在点 p 的一个邻域$|x_k^1-x_k|<\delta$ 中存在形如（1.3.2）的唯一的逆函数。

今后我们将假设，（1.3.1）和（1.3.2）互为唯一逆函数的这些条件，除了在某些可能存在的奇面、奇线和奇点上以外，在物体在一切时刻所占据的整个区域中都是满足的。事实上，我们假设（1.3.3）是单值的、连续的并且对其宗量具有任何所需级次的连续偏导数。每当存在某一奇异子流形，在那里这一假设不成立时，我们都将作出单独的讨论。

上面这一假设叫做连续性公理。它反映了一种想法即物质是不可消灭的。物质的任何一部分正的、有限的体积都不会变成零或无穷大。而且，物质也是不可入的，就是说，运动使每一个区域变到另一个区域，每一个曲面变到另一个曲面，每一条曲线变到另一条曲线。任何一部分物质都不能透入另一部分物质中去。在实际上，也有一些违反这一公理的例子。例如，材料可以断裂，也可以传输冲击波或其他类型的不连续性。对于这些事例，必须给予特别的注意。

给定了物体的初始形状，如果确定了函数 $x_k(\mathbf{X},t)$，我们就能得出物体中一切物质点在时刻t的位置。这就使我们能够计算任意二点之间的长度改变量和任意二方向之间的夹角改变量。理论的最终目标是将这些改变量和外加负荷（外力、外力矩、热变化等等）联系起来。有了这种知识，人们就可以适当地设计机器和建筑物或分析已有的结构，以求不但避免事故，而且高效率地利用材料。这样，理论的最终目标就是要在外加效应和物体的初值条件、边值条件为已知时定出（1.3.1）。

1.4 形变梯度、形变张量和胁变张量

对于固定的时刻，我们由（1.3.1）和（1.3.2）就得到

(1.4.1) $$dx_k = x_{k,K} dX_K, \qquad dX_K = X_{K,k} dx_k$$
这里当逗点后面的下标是大写字母时就表示对 X_K 求偏导数，当它是小写字母时就表示对 x_k 求偏导数；就是说，

(1.4.2) $$x_{k,K} \equiv \partial x_k / \partial X_K, \qquad X_{K,k} \equiv \partial X_K / \partial x_k$$
由（1.4.2）定义的这一组量叫做形变梯度。根据求导数的连锁法则，我们有

(1.4.3) $$x_{k,K} X_{K,l} = \delta_{kl}, \qquad X_{K,k} x_{k,L} = \delta_{KL}$$
这两组中的每一组，都包括适用于九个未知量 $x_{k,K}$ 或 $X_{K,k}$ 的九个线性方程。既然雅各比行列式被假设为不等于零，唯一解就是存在的，而且按照行列式的克拉莫（Cramer）法则，该解由下式确定

(1.4.4) $$X_{K,k} = \frac{1}{j} \text{cofactor}(x_{k,K}) = \frac{1}{2j} e_{KLM} e_{klm} x_{l,L} x_{m,M}$$
式中 e_{KLM} 和 e_{klm} 是排列符号，而且

(1.4.5) $$j \equiv \det(x_{k,K}) = \frac{1}{3!} e_{KLM} e_{klm} x_{k,K} x_{l,L} x_{m,M}$$
通过求（1.4.4）和（1.4.5）的导数，我们得到两个重要的恒等式

(1.4.6) $$(jX_{K,k})_{,K} = 0, \quad \partial j / \partial x_{k,K} = \text{cofactor}(x_{k,K}) = jX_{K,k}$$
后一恒等式被认为是雅各比的贡献。

将（1.4.1）代入（1.2.3）中，我们就得到

(1.4.7) $$dS^2 = c_{kl} dx_k dx_l, \qquad ds^2 = C_{KL} dX_K dX_L$$
式中

(1.4.8) $$c_{kl}(\mathbf{x}, t) \equiv \delta_{KL} X_{K,k} X_{L,l}, \qquad C_{KL}(\mathbf{X}, t) = \delta_{kl} x_{k,K} x_{l,L}$$
分别是科希形变张量和格林形变张量。另外两个同样重要的张量是反商张量 $\overset{-1}{c}_{kl}$ 和 $\overset{-1}{C}_{KL}$（分别叫做芬格形变张量和佩奥拉形变张量），其定义是

(1.4.9) $$\overset{-1}{c}_{kl}(\mathbf{x}, t) \equiv \delta_{KL} x_{k,K} x_{l,L}, \quad \overset{-1}{C}_{KL}(\mathbf{X}, t) \equiv \delta_{kl} X_{K,k} X_{L,l}$$
通过将（1.4.8）和（1.4.9）简单地代入，就可以证明各张量满足下式

(1.4.10) $\overset{-1}{c}_{kl}c_{lm}=\delta_{km}$, $\overset{-1}{C}_{KL}C_{LM}=\delta_{KM}$

拉格朗日肋变张量和欧勒肋变张量分别由下式定义

(1.4.11) $E_{KL}\equiv\frac{1}{2}(C_{KL}-\delta_{KL})$, $e_{kl}\equiv\frac{1}{2}(\delta_{kl}-\overset{-1}{c}_{kl})$

将这里的 C_{KL} 和 c_{kl} 代入（1.4.7）中，我们得到

(1.4.12) $ds^2-dS^2=2E_{KL}dX_KdX_L=2e_{kl}dx_kdx_l$

由此也可以得到

(1.4.13) $E_{KL}=e_{kl}x_{k,K}x_{l,L}$, $e_{kl}=E_{KL}X_{K,k}X_{L,l}$

这就表明了一件事实，即 E_{KL} 和 e_{kl} 都是二级的绝对张量。

当物体只经历一个刚性位移时，就不存在微分长度的改变量；在这种情况下，由(1.4.12) 给出的差式 ds^2-dS^2就等于零。如果这对一切方向 dX_K 和 dx_k 都成立，则 E_{KL} 和 e_{kl} 也等于零。因此，这些张量就代表物体形变的一种量度。

我们可以用位移矢量 $\mathbf{u}$ 将各个肋变张量表示出来；该矢量是从未变形物体上的一个物质点 P 画到该点在时刻 t 的空间位置 p 的（图1.4.1）：

(1.4.14) $\mathbf{u}\equiv\mathbf{p}-\mathbf{P}+\mathbf{b}=x_l\mathbf{i}_l-X_L\mathbf{I}_L+\mathbf{b}$

位移矢量可以用它的拉格朗日分量 U_K 和它的欧勒分量 u_k 表示成

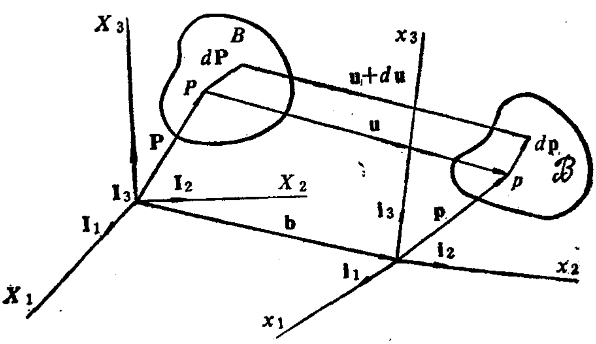

图 1.4.1 位移矢量

$$\mathbf{u}=U_L\mathbf{I}_L=u_l\mathbf{i}_l$$

将（1.4.14）的两端分别和 $\mathbf{i}_k$、$\mathbf{I}_K$ 求标积，我们就得到

$$u_k=x_k-\delta_{kL}X_L+b_k,\quad U_K=\delta_{Kl}x_l-X_K+B_K \tag{1.4.15}$$

式中 $b_k\equiv\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}_k$ 和 $B_K=\mathbf{b}\cdot\mathbf{I}_K$ 是 $\mathbf{b}$ 的分量。我们由（1.4.15）得到

$$\begin{aligned} dx_k&=(\delta_{MK}+U_{M,K})\delta_{Mk}dX_K,\\ dX_K&=(\delta_{mk}-u_{m,k})\delta_{mK}dx_k \end{aligned} \tag{1.4.16}$$

当把这里得到的 $x_{k,K}$ 和 $X_{K,k}$ 代入（1.4.8）中以后，就得到

$$\begin{aligned} c_{kl}&=\delta_{kl}-2e_{kl}=\delta_{kl}-u_{k,l}-u_{l,k}+u_{m,k}u_{m,l}\\ C_{KL}&=\delta_{KL}+2E_{KL}=\delta_{KL}+U_{K,L}+U_{L,K}+U_{M,K}U_{M,L} \end{aligned} \tag{1.4.17}$$

这就给出了用位移梯度表示的胁变张量。

胁变张量，同样还有形变张量，是一些对称张量，就是说

$$\begin{aligned} e_{kl}&=e_{lk}, &\qquad E_{KL}&=E_{LK}\\ c_{kl}&=c_{lk}, &\qquad C_{KL}&=C_{LK} \end{aligned} \tag{1.4.18}$$

这些张量可以排成矩阵的形式，例如

$$\|E_{KL}\|=\begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13}\\ E_{21} & E_{22} & E_{23}\\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix} \tag{1.4.19}$$

这个矩阵对于它的主对角线是对称的。排在（1.4.19）的主对角线上的各元 E_{11}、E_{22} 和 E_{33} 叫做法向胁变❶；其他各元叫做剪切胁变。

最后，为了表明现在这种符号制度的优越性，我们将 e_{kl} 的各个分量的显式写出来

$$2e_{xx}=1-c_{xx}=2\frac{\partial u}{\partial x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

$$2e_{yy}=1-c_{yy}=2\frac{\partial v}{\partial y}-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

$$2e_{zz}=1-c_{zz}=2\frac{\partial w}{\partial z}-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

---

❶ 将 normal strain 译作“正胁变”容易引起误会（误认或混淆为正负之“正”），今改译为“法向胁变”；余类推——译者注。

$$2e_{xy}=-c_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$$

(1.4.20)
$$2e_{yz}=-c_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$2e_{zx}=-c_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}$$

这里我们写了 $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, $u_1=u$, $u_2=v$, $u_3=w$, 并且将e_{11}、e_{12}…… 写成了 e_{xx}、e_{xy} …… 将 c_{11}、c_{12} …… 写成了 c_{xx}、c_{xy} ……。

在连续区线性理论中时常用到的是由下式定义的无穷小胁变张量 $\tilde{E}_{KL}$、$\tilde{e}_{kl}$ 和无穷小转动张量 $\tilde{R}_{KL}$、$\tilde{r}_{kl}$

(1.4.21)
$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{KL}&\equiv\tfrac{1}{2}(U_{K,L}+U_{L,K})\equiv U_{(K,L)},\\
\tilde{e}_{kl}&\equiv\tfrac{1}{2}(u_{k,l}+u_{l,k})\equiv u_{(k,l)}\\
\tilde{R}_{KL}&\equiv\tfrac{1}{2}(U_{K,L}-U_{L,K})\equiv U_{[K,L]},\\
\tilde{r}_{kl}&=\tfrac{1}{2}(u_{k,l}-u_{l,k})\equiv u_{[k,l]}
\end{aligned}$$

式中下标外面的圆括号表示各该量的对称部分，而方括号则表示其反对称部分。我们由（1.4.21）得到

(1.4.22) $$U_{K,L}=\tilde{E}_{KL}+\tilde{R}_{KL},\qquad u_{k,l}=\tilde{e}_{kl}+\tilde{r}_{kl}$$

将这些代入（1.4.17）中，就得到

(1.4.23)
$$\begin{aligned}
c_{kl}&=\delta_{kl}-2e_{kl}=\delta_{kl}-2\tilde{e}_{kl}+(\tilde{e}_{mk}+\tilde{r}_{mk})(\tilde{e}_{ml}+\tilde{r}_{ml})\\
C_{KL}&=\delta_{KL}+2E_{KL}=\delta_{KL}+2\tilde{E}_{KL}+(\tilde{E}_{MK}\\
&\quad+\tilde{R}_{MK})(\tilde{E}_{ML}+\tilde{R}_{ML})
\end{aligned}$$

在各种的物理情况下，通过略去各种乘积的组合，可以由此式得到一些近似表示式。例如，当 $\tilde{E}_{KL}\ll 1$ 时，和其他各项相比，我们可以略去 $\tilde{E}_{KM}\tilde{E}_{ML}$。当 $\tilde{R}_{KL}$ 和 $\tilde{E}_{KL}$ 相比也很小时，我们就得到 $E_{KL}=\tilde{E}_{KL}$ 和 $e_{kl}=\tilde{e}_{kl}$。在这种情况下，（1.4.13）和（1.4.16）经过线性化也就给出：

(1.4.24) $$\tilde{E}_{KL}=\tilde{e}_{kl}\delta_{kK}\delta_{lL},\qquad \tilde{e}_{kl}=\tilde{E}_{KL}\delta_{Kk}\delta_{Ll}$$

现在这里的 $\delta_{Kk}=\delta_{kK}$ 真是克朗内克符号了。于是，在线性理论