常微分方程

复旦大学数学系主编

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是1960年出版的复旦大学数学系数学专业革新教材之一"常微分方程"的修訂本。这次修訂是根据一年多以来試用的經驗并参照各方面所提的一些意見改写的，較初版本有了較大的变动，更适合于作为基础課程的教材。此外，新版本中还增加了相当数量的习题。

本书內容仍分五章，包括：一阶常微分方程，常微分方程組，綫性常微分方程組，稳定性，一阶偏微分方程。

常 微 分 方 程

（第 二 版）

复旦大学数学系 主编

金福临 李训经 等编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 18.5 字数 250,000

1960年6月第1版 1962年12月第2版 1978年5月第3次印刷

书号：13119·368 定价：1.20元

第二版序

本书是在复旦大学数学系編著的《常微分方程》試用本的基础上編写的，其目的是使它更适合于作为数学系常微分方程基础課的教材或教学参考书。根据基础課的学习要求和第一版試教的情况，这次編写时在內容上和材料处理上作了較多的补充和改动。与第一版比較，增加了关于解的延展、解对参数和初始值的連續性和可微性的討論，并把后者与解的稳定性放在同一章(第四章)中；加强了綫性方程(組)的部分，并增添周期系数的綫性方程一节；也略去了某些不一定要放在基础課中讲授的內容，如定性理論、运动稳定性理論的某些內容；对于一阶非綫性偏微分方程的部分作了改动，略去关于柯西問題的討論，而介紹在分析力学中有着較多应用的全积分的理論。此外，对第一版过于概括的部分，在証明和說明上作了較多的补充。

本书现分五章。第一章介紹常微分方程的基本概念、簡单的一阶方程的解法和初始值問題的解的存在与唯一性定理；第二章討論高阶微分方程、微分方程組和相空間；第三章讲述綫性微分方程(組)的理論以及常系数綫性方程(組)和某些变系数綫性方程的解法；第四章是解对参数和初始值的連續性和可微性、解的稳定性和极限圈；第五章是一阶偏微分方程的初步知識。除第四章外，在內容上基本符合过去采用的教学大綱的要求，对第四章可以根据情况，斟酌使用。为了帮助讀者牢固地掌握本书內容，在每一节后安排了一定数量的习題，供讀者练习。对于某些較难的或初学时可以略去的內容，书中用小字排印；对一些較难的习題，在題前附以星号“*”。

在編写中，我們主要参考了龐特里雅金著《常微分方程》，史捷班諾夫著《微分方程教程》，彼得罗夫斯基著《常微分方程論讲义》，艾利斯哥尔茲著《微分方程》和馬尔金著《运动稳定性理論》等书。在选取习題时，还参考了 А. Ф. Филиппов 編的《Сборник задач по дифференциальным уравнения》一书。

很多兄弟院校的同志們曾对本书的第一版提出过許多宝貴的意見和建議，对本书的改編工作有很大的帮助。在本书改編过程中，复旦大学数学系微分方程教研組的同志們給我們很多的帮助，侯宗义同志还对原稿詳細校閱。我們在此表示衷心的謝意。

本书第二版的編写是由金福临、李訓經执笔的。李君如参加了部分內容的編写工作，并与須复芬一起編选了习題。

由于我們的水平限制，对于部分內容还缺乏足够的教学实踐，这次一定仍有很多缺点和錯誤，我們除了进一步通过教学实踐来修改、充实、提高外，殷切地期望同志們讀者們随时給予批評和指教。

編者 1962年10月

目　录

第一章　一阶常微分方程

§1 基 本 概 念

本书讲述常微分方程和一阶偏微分方程的求解方法和解的性质。

1. 引　論

我們在代数学中曾討論了求解高次代数方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

和綫性代数方程組

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n
\end{aligned}$$

的問題。其中,未知的量是一个数 x 或一組数 $x_1, \cdots, x_n$. 数学分析中由关系式

$$F(t,\ x)=0 \tag{1}$$

确定隐函数 $x=\varphi(t)$ 的問題, 也可以看成是一个求解函数方程(1)的問題, 这里未知的已經不是一个数或一組数, 而是一个函数 $x=\varphi(t)$.

在数学分析中討論过的不定积分的問題, 也可以用方程的术語表述如下: 設給定了一个自变量 t 的函数 $f(t)$, 試求函数 $x=x(t)$, 滿足方程

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(t). \tag{2}$$

方程(1)和方程(2)相同之处在于未知的都是函数；不同之处是方程(1)中只出現未知函数本身，而在方程(2)中却出現了未知函数的导数，因之方程(2)比方程(1)就更复杂了。方程(2)就是本书所要討論的最簡单的微分方程。

在几何学、力学中也常常遇到微分方程。例如，我們要解决下面的几何問題：在变量 t, x 平面上确定曲綫 $x=x(t)$，使得它具有这样的性质，在曲綫 $x=x(t)$ 上任一点 (t, x) 处曲綫的切綫与坐标原点 O 到这点 (t, x) 的連綫互相垂直（图 1.1）。根据导数的几何意义，我們知道曲綫 $x=x(t)$ 在点 (t, x) 处的切綫斜率是 $\dfrac{dx}{dt}$，又坐标原点 O 到点 (t, x) 的連綫的斜率是 $\dfrac{x}{t}$，按問題的要求，这两个斜率应互为負倒数，即它們适合等式

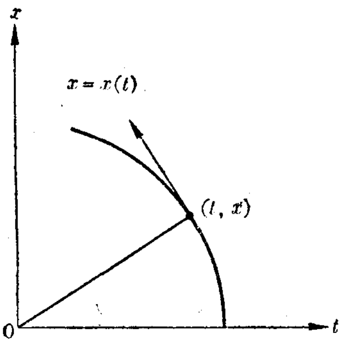

图 1.1

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{t}{x}. \tag{3}$$

这就是說，我們所要求的曲綫 $x=x(t)$ 应满足关系式(3)．关系式(3)和(2)一样，也含有未知函数的导数。

又如，物体在地心引力作用下的自由降落問題也可归結为微分方程的問題。我們如下选取参考坐标系，把物体降落的垂直綫作为坐标軸，它同地面的交点作为坐标原点 O，并規定坐标軸 Ox 的正方向是指向上的（图 1.2）。設物体在时刻 t 的位置的坐标是 $x(t)$．一方面，由二阶导数的力学意义，我們知道量 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ 表示物体沿 Ox 軸方向的加速度；另一方面，由伽利略（Galileo）的实驗，我們知道，物体在地心引力作用下的运动加速度的方向是向下的，

其大小是 g. 于是得到

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-g. \tag{4}$$

等式右端負号的出現是由于加速度方向与 Ox 軸的正方向相反的緣故。在关系式(4)中出現了未知函数的二阶导数。

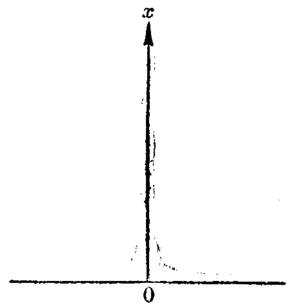

图 1.2

这样，我們看到，一方面，微分方程問題是求不定积分問題的自然发展；另一方面，物理、力学、工程技术以及其他数学分支也常常提出微分方程的問題。这是因为在許多物理現象以及其他数学分支的問題中，往往不容易找到表征这些問題的状态的量之間的明显关系式，但却容易找到这些量及其导数之間的关系式——微分方程。

2. 微分方程和它的解的定义

現在給出微分方程的定义。如果在一个(或者一組)方程中，未知的量是一个(或者一組)函数，并且在方程中含有未知函数的导数，那末就称这方程为**微分方程**(或者**微分方程組**)。

如果在微分方程(微分方程組)中出現的未知函数只依賴于一个自变量，就称这种微分方程(組)为**常微分方程**(組)；如果在微分方程(組)中出現的未知函数依賴于一个以上的自变量，就称这种微分方程(組)为**偏微分方程**(組)。例如，微分方程(2)，(3)和(4)都是常微分方程；而微分方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u \tag{5}$$

和

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0 \tag{6}$$

都是偏微分方程。

在微分方程中所出現的未知函数的最高阶导数的阶数称为这微分方程的阶。例如，常微分方程(2)和(3)都是一阶的，常微分方程(4)是二阶的；偏微分方程(5)是一阶的，而偏微分方程(6)是二阶的。

因为本书主要是討論常微分方程和常微分方程組，所以为了簡单起見，我們常把它們簡称为微分方程和微分方程組，或更簡称为方程和方程組。

在討論常微分方程时，我們常用 t 代表自变量，用 $x, y, z, \cdots$ 代表未知函数。在未知函数上方加上点“·”表示导微运算，即 $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$，$\ddot{x}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$，等等。如果这样表示不方便时，我們就在 x 的上方或者右上角标上一个带圓括弧的数字来表示导数的阶数，例如 $\overset{(n)}{x}=x^{(n)}=\dfrac{d^nx}{dt^n}$.

微分方程的首要問題是求出其中的未知函数。例如对于方程(2)，設函数 $f(t)$ 在区間 $a<t<b$ 中是連續的，那末函数

$$x(t)=\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau+c \tag{7}$$

就是我們所要求的，其中 t_0 是区間 $a<t<b$ 中的某一定点，t 是在区間 $a<t<b$ 中变动的，c 是任意常数。又对于方程(4)，相继积分两次得到

$$\frac{dx}{dt}=-gt+c_1, \tag{8}$$

$$x(t)=-\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2, \tag{9}$$

其中 c_1 和 c_2 是两个任意常数。在方程(2)和(4)中所要求的未知函数称为方程(2)和(4)的解。

我們現在給出微分方程的解的定义。

假定 $n+2$ 个变量 $t, x, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数 $F(t, x, x_1, \cdots, x_n)$ 在变量 $t, x, x_1, \cdots, x_n$ 的某一区域 G①中有定义，并且它一定依赖于变量 x_n，我們就称关系式

$$F(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(n)})=0 \tag{10}$$

是一个 n 阶**常微分方程**。例如，当

$$F(t, x, x_1)=tx+x_1$$

时，关系式

$$tx+\frac{dx}{dt}=0$$

是一个一阶常微分方程。又如，当 $F(t, x, x_1, x_2)=x_2+g$ 时，得到二阶常微分方程(4)：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+g=0.$$

假設函数 $x=\varphi(t)$ 在区間 $a<t<b$ 中有定义，且有直到 n 阶的連續导数，并且在区間 $a<t<b$ 中滿足恒等式

$$F(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \cdots, \varphi^{(n)}(t))\equiv 0,$$

我們就說函数 $x=\varphi(t)$ 在区間 $a<t<b$ 中是方程(10)的解，称区間 $a<t<b$ 是解 $x=\varphi(t)$ 的定义区間。解 $x=\varphi(t)$ 在变量 t, x 平面上的几何图形是一条曲綫，称为方程(10)的**积分曲綫**。

在上述解的定义中，除要求函数 $\varphi(t)$ 在区間 $a<t<b$ 中是連續的，并且有直到 n 阶連續导数以外，还必須要求点 $(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \cdots, \varphi^{(n)}(t))$ 位在函数 $F(t, x, x_1, \cdots, x_n)$ 的定义区域 G 中。

有时，不容易求出解的明显表达式 $x=\varphi(t)$，而容易求出由关

---

① 所謂空間 $(t, x, x_1, \cdots, x_n)$ 中的集合 G 是一个区域，是指它滿足下面的两个条件：

1) G 是一个开集，即对于 G 中的每一点，有一个以它为中心的 $n+2$ 維球完全含在 G 中；

2) G 是連通的，即对于 G 中的任何两点，可以作一条連接它們的連續曲綫，这条曲綫完全落在 G 中。

系式 $\psi(t, x)=0$ 确定的变量 t 的隐函数是方程(10)的解；这时称关系式

$$\psi(t, x)=0 \tag{11}$$

是方程(10)的一个**积分**。也称由(11)在变量 t, x 的平面上所确定的曲綫为方程(10)的**积分曲綫**。

例如，容易驗証，函数 $x=\sqrt{c^2-t^2}$ 和 $x=-\sqrt{c^2-t^2}$ 在区間 $-c<t<c$ 中都是方程(3)的解，其中 c 是正的常数。当 c 不同时，这些函数的定义区間是不同的(一般地說，一个微分方程的不同的解的定义区間是可能不同的)。当 c 固定时，方程(3)的这两个解的几何图形分别是以坐标原点为中心，以 c 为半徑的圓周的上半部分(位在 $x>0$ 中)和下半部分(位在 $x<0$ 中)。关系式 $t^2+x^2=c^2$ 是方程(3)的积分，它在 t, x 平面上确定了一个圓周，这圓周就是在前面一段中所提出的几何問題的解。

3. 微分方程的几何解釋——方向場

在这一章里，我們討論一阶常微分方程

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)=0, \tag{12}$$

特别是外表上比較簡单的微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x), \tag{13}$$

这里函数 $f(t, x)$ 定义在变量 t, x 平面上的某一区域 D 中。我們称方程(13)是已解出导数的一阶微分方程。

現在对形状为(13)的微分方程作如下的几何解釋。对于区域 D 中的每一点 (t, x)，我們引一条以 $f(t, x)$ 为斜率的直綫 $l_{t,x}$，就得到了一个方向。这样，在区域 D 的每一点都作出了一个方向后，我們就說得到了方程(13)的**方向場**。根据微分方程(13)的解的几何意义，可以知道，方程(13)的每一个解 $x=\varphi(t)$ 确定变量 t, x 的平面上的一条曲綫，这条曲綫在它的每一点 $(t, \varphi(t))$ 处和

直綫 $l_{t,\varphi(t)}$ 相切；反之，如果 $x=\psi(t)$ 确定变量 t, x 平面上的一条曲綫，这条曲綫在它的每一点 $(t, \psi(t))$ 处的切綫是直綫 $l_{t,\psi(t)}$，那末这条曲綫的切綫（在点 $(t, \psi(t))$ 处）的斜率 $\frac{d\psi(t)}{dt}$ 和直綫 $l_{t,\psi(t)}$ 的斜率 $f(t, \psi(t))$ 相等，即 $\frac{d\psi(t)}{dt}=f(t, \psi(t))$，因此 $x=\psi(t)$ 是方程(13)的解。所以求解方程(13)就是要在区域 D 中找这样的一条曲綫，使它在其上任一点的切綫方向和方向場在这点的方向一致。

根据这样的几何解释，可以从方向場出发近似地画出方程(13)的积分曲綫。

例如，我們討論方程

$$\frac{dx}{dt}=t^2+x^2 \tag{14}$$

的方向場和它的积分曲綫。

为了作出方程(14)的方向場，我們先找出方向場中有相同方向的点的軌迹，这样的曲綫称为等斜（傾）綫，即在等斜綫上由(14)确定的 $\frac{dx}{dt}=t^2+x^2=k^2$，其中 k 是某一常数。因此，$t^2+x^2=k^2$ 是方程(14)的等斜綫，它是以坐标原点为中心，以 k 为半徑的圓周，在这圓周上积分曲綫的切綫斜率等于 k^2。給定常数 k 的某些値后，就能作出(14)的方向場的大致情形

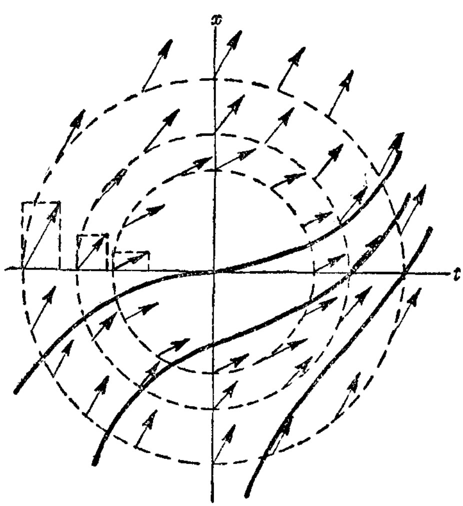

图 1.3

(图1.3)。然后，按照方向場就能描出积分曲綫的近似图形。在工程技术上求解常微分方程时，常利用这个方法。

4. 初始值問題的解的存在性和唯一性定理

对于微分方程和对代数方程或函数方程一样，也要討論它的解在什么情形下是存在的，解的个数有多少以及怎样求出全部的解的問題。

在这一章的以下几节中，我們将介紹一些簡单的一阶方程的求解方法以及方程(13)的初始值問題的解的存在性和唯一性定理。

所謂微分方程(13)的**初始值問題**是这样的：假設在区域D中任意給定一点(t_0, x_0)，求方程(13)的一个解$x=\varphi(t)$，使它滿足条件

$$\varphi(t_0)=x_0. \tag{15}$$

这一問題就称为一阶常微分方程(13)的**初始值問題**。这問題的几何意义是：找方程(13)的过点(t_0, x_0)的积分曲綫。

我們称(t_0, x_0)为**初始值**，称条件(15)为**初始条件**。有时，把解$x=\varphi(t)$滿足条件(15)說成解$x=\varphi(t)$具有初始值(t_0, x_0)。

現在我們叙述下面的基本定理，它的証明放在§3。

定理 給定微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x), \tag{13}$$

假設方程(13)中右端的函数$f(t, x)$在变量t, x平面上的某个区域D中有定义，且适合下面的条件：

1° 函数$f(t, x)$是两个变量t, x的連續函数；

2° 在区域D的每一有界閉子域$\overline{D}_1\subset D$上，函数$f(t, x)$对变量x滿足李普希茲(Lipschitz)条件，即对于$\overline{D}_1$上的任何一对点(t, x)和$(t, \overline{x})$，成立着不等式

$$|f(t, x)-f(t, \bar{x})| \leqslant N|x-\bar{x}|,$$

其中常数 N 只依赖于区域 $\bar{D}_1$，而与变量 $t, x, \bar{x}$ 无关，称 N 为李普希兹常数。

那末存在在某个区間 $a<t<b$ 中有定义的函数 $x=\varphi(t)$，满足方程(13)，并且适合初始条件

$$\varphi(t_0)=x_0.$$

此外，如果函数 $x=\psi(t)$ 在区間 $a'<t<b'$ 中也是方程(13)的解，且适合初始条件

$$\psi(t_0)=x_0,$$

那末函数 $x=\varphi(t)$ 和 $x=\psi(t)$ 在它們有定义的公共区間中是相同的。

这个定理說明，在一定的条件下，过区域 D 的每一点 (t_0, x_0) 有且只有方程(13)的一条积分曲綫。

因为点 (t_0, x_0) 是区域 D 的任一点，因而得到作为微分方程(13)的解的函数可以是很多的，但过一点只有一条积分曲綫。例如，方程(2)的解有无穷多个，但以 (t_0, x_0) 为初始値的解只有一个，就是

$$x=\int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau+x_0.$$

［注］　假如区域 D 关于 x 是凸的，就是說当点 (t, x) 和 $(t, \bar{x})$ 属于 D 时，点 (t, x) 和 $(t, \bar{x})$ 的連綫整个属于 D，那末当函数的偏导数 $\dfrac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ 在 D 的任一有界閉子域 $\bar{D}_1 \subset D$ 上为有界时，卽存在常数 N，当 (t, x) 属于 $\bar{D}_1$ 时成立

$$\left|\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right| \leqslant N, \tag{16}$$

那末 $f(t, x)$ 在閉区域 $\bar{D}_1$ 上关于 x 适合李普希兹条件。

事实上，不妨設 $\bar{D}_1$ 关于 x 也是凸的，根据拉格朗日(Lagrange)