

应用特征綫方法数值 解气体动力学一維問題

〔苏联〕A. И. 儒可夫 著

陈敦栋 管楚淦 譯

上海科学技术出版社

应用特征綫方法数值 解气体动力学一維問題

〔苏联〕 A. И. 儒可夫 著

陈敦栋 管楚淦 譯

孙和生 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是根据苏联科学院斯蒂克洛夫数学研究所文集第58卷翻譯的。它系統地叙述应用特征綫方法求解流体和气体动力学中各种間断的問題——一維不定常問題。

书中除包括一些流体和气体动力学方程的基本知識外,討論了对各种强和弱間断的实用計算方法以及断裂現象和誤差的估計、控制等。附录有程序編制等。

本书供大专院校数学、力学系师生参考,亦可供有关研究、工程技術人員参考。

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК
К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ОДНОМЕРНЫХ
ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А. И. ЖУКОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1960

应用特征綫方法数值解气体动力学一維問題

陈敦栋 管楚全 譯 孙和生 校

上海科学技术出版社出版 (上海瑞金二路450号)
上海市书刊出版业营业許可証出093号

商务印书館上海厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 850×1168 1/32 印張 4 30/32 排版字数 117,000
1963年3月第1版 1963年3月第1次印刷 印数 1—3,800

統一書号 13119·498 定价(十四) 0.84 元

序 言

在流体动力学和气体动力学中特征綫方法照理占有重要的地位。然而，关于它作为数值方法那样稍許完整的描述直到最近在我們的文献中还不曾有过。巴諾夫 (Д. Ю. Панов) 的书^①只是提供了关于这个問題的最简单的知識，它不能作为实际解决稍微复杂的问题的指南。

本书试图系統地叙述特征綫数值方法对一类具体問題——气体动力学的一維不定常問題——的应用。在书中包含了一些流体动力学方程的基本知識，然而这些知識無論从哪个角度都不能代替系統的教科书。本书的对象是掌握了偏微分方程理論的基本概念、熟悉流体动力学和气体动力学的基本原理以及掌握了在通常大学課程范围内的数值方法的讀者。在附录 1 中描述了供电子计算机用的程序；这一部分是給熟练的程序工作者参考用的。

这里所述数值方法的基础是十多年前在盖尔芳特 (И. М. Гельфанд) 的参与下由謝明加也夫 (К. А. Семёндяев) 所奠定的；个别部分則是属于本书作者的。

书的手稿曾經過討論；作者对謝明加也夫，戈都諾夫 (С. К. Годунов) 和卡日丹 (Я. М. Каждан) 所提供的許多非常宝貴的意見表示深切感謝。

① Д. Ю. Панов: 拟綫性双曲型偏微分方程組的数值解。М. Гостехиздат, 1957.

目 录

序言

§ 1. 基本方程組	1
§ 2. 特征綫。黎曼不变量	13
§ 3. 方法基础	17
§ 4. 精确度的阶。步长的选择	25
§ 5. 对具体状态方程的計算公式	34
§ 6. 某些实践指南	44
§ 7. 边界条件	53
§ 8. 稀疏波	57
§ 9. 間断 (一般性质)	64
§ 10. 接触間断	71
§ 11. 冲击波	79
§ 12. 任意間断的分解	91
§ 13. 产生冲击波的特別情形	107
§ 14. 断裂	113
§ 15. 积分控制	124
附录 1. 程序設計原理	133
附录 2. 例子	150
校后記	152

§ 1. 基本方程組

我們考虑关于理想可压缩液体(或气体)一維运动的問題。如所周知,如果在每一时刻所有描述介质状态的量在空間的分布仅依赖于一个坐标,那末連續介质的运动被称为是一維的。这个坐标可能是通常的笛卡儿坐标,这样的运动就称为平面一維运动。这个坐标也可能是到某个确定的对称軸的距离,于是运动是柱对称的。最后,唯一主要的坐标可能是到确定的中心的距离,这样的运动就称为是球对称的。現在我們来推导气体一維运动的基本方程。

平面一維运动的典型例子是气体或液体在长的直圆柱管内的运动(图 1)。同时必須假定管壁对管内物质的运动不发生任何影响,并且对任一横截面,运动的所有特征(质点速度、密度、压力等)对这个截面上所有的点是同样的。显然质点的速度应该平行于管軸。



图 1

当选取了一个确定的截面作为起始面后,我們就完全能够用唯一的坐标 x 給出任何其他的截面。运动介质的任何特征将仅仅依赖于这个坐标 x 和時間 t 。

为了簡化下面的討論,我們假定管的横截面的面积等于 1 (显然,这不失一般性,因为介质的运动,由于沒有管壁的影响而不依赖于横截面的大小)。此外,我們假定处在任何截面 x 左边的物质的总质量在任一瞬时 t 都有确定的有限值 M 。量 M 是两个变量

x 和 t 的函数。我們来求它的全微分。

首先,我們考虑在某个固定时刻 t 物质的状态。若 x 和 $x+dx$ 是两个无限接近的截面,那么,显然地,包含在它們之間的物质质量将等于

$$dM = \rho dx,$$

其中 ρ 是在所考虑的点 x 上的密度。因此,

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \rho.$$

另一方面,我們考虑固定的截面 x , 并且計算在時間間隔 dt 內质量 M 的改变。經過該截面的物质体积将等于 $u dt$, 其中 u 是质点速度。以密度乘这个体积我們就得到质量。因此

$$dM = -\rho u dt.$$

这儿必須取减号的原因是:在速度 u 为正时质点从左向右运动,因此,质量 M 递减。即

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\rho u.$$

最后我們有

$$dM = \rho dx - \rho u dt. \quad (1.1)$$

現在假定由坐标 x 所确定的截面按照某个規律 $x=x(t)$ 运动。这样的运动可以在 x, t 平面上用图形来描繪(图 2)。当此截面从点 A 运动到点 B 时,我們来計算流經此截面的质量流。为此显然地应当沿

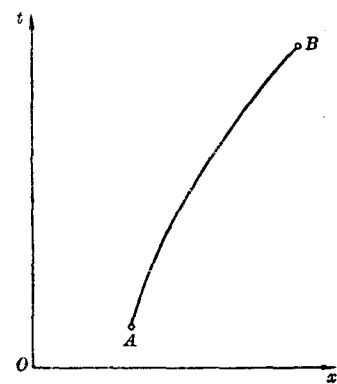


图 2

曲綫 AB 积分 (1.1), 亦即計算积分

$$\int_A^B \rho dx - \rho u dt.$$

不难理解这个积分的值只可能依赖于点 A 和点 B (当物质的

运动已給时), 而与連接这两点的积分途徑无关(这从表达式(1.1)是全微分这一事实已能形式地推出)。特别是, 表达式(1.1)沿 x, t 平面上任何閉圍道的积分应当为零:

$$\oint \rho dx - \rho u dt = 0. \quad (1.2)$$

对所考虑的連續介质的平面一維运动情形, 这个公式是质量守恒物理定律的最一般的数学表达式。应该指出, 方程(1.2)对任何可积函数 $\rho(x, t)$ 和 $u(x, t)$ 是正确的; 特别是, 这些函数也可以是不連續的。

如果函数 ρ 和 u 具有連續的偏微商, 那么方程(1.2)可以写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x},$$

或

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.3)$$

这是质量守恒定律的微分形式。方程(1.3)如大家所知道的称为連續性方程。

对于柱对称和球对称的运动, 不难得到类似的表达式。为确定起見我們限于球对称的情形。这里介质的所有物理特征——密度、压力、质点速度的绝对值等等——在任何时刻在关于中心对称的任何球面上都将是常量。而在每一点上速度的方向都与矢徑方向重合。因此速度給成一个标量 $u = \frac{dr}{dt}$ 。

我們来描述圍繞中心对称、半徑为 r 的球, 并以 $4\pi M$ 表示包含在球內的总的质量(为了方便起見引进因子 4π)。包含在半徑为 r 和 $r+dr$ 的球之間的物质的体积等于 $4\pi r^2 dr$, 而它的质量等于 $4\pi \rho r^2 dr$ 。因此,

$$\frac{\partial M}{\partial r} = \rho r^2.$$

在時間間隔 dt 內，經過半徑為 r 的球面的物質的體積等於這個球面面積 $4\pi r^2$ 和量 $u dt$ 的乘積。由此，再乘以密度，我們得到

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -u\rho r^2$$

(減號是根據上面同樣的考慮來置定的)。因此，

$$dM = \rho r^2 dr - \rho u r^2 dt.$$

由此立刻得到質量守恆定律的積分形式：

$$\oint \rho r^2 dr - \rho u r^2 dt = 0$$

以及它的微分形式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} = -2 \frac{\rho u}{r}$$

(球面的連續性方程)。

在柱面情形類似的討論導出質量的微分表达式：

$$dM = \rho r dr - \rho u r dt$$

(r 是到對稱軸的距離， u 是徑向分速度)。由此，我們有

$$\oint \rho r dr - \rho u r dt = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{\rho u}{r}.$$

所有上面三種情形可以把它們統一起來。如果我們約定：第一，對於平面一維運動亦以 r 表示其空間坐標；第二，引入因子 ν ，它在平面情形等於零，在柱面情形等於 1 並在球面情形等於 2。質量的微分寫為

$$dM = \rho r^\nu dr - \rho u r^\nu dt, \quad (1.4)$$

質量守恆定律寫為

$$\oint \rho r^\nu dr - \rho u r^\nu dt = 0, \quad (1.5)$$

連續性方程為

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} = -\nu \frac{\rho u}{r}. \quad (1.6)$$

为避免誤会起見應該指出, 由方程 (1.4) 所定义的量 M 具有量綱 $[ML\nu^{-2}]$, 这个量綱仅在球面情形才和质量的量綱相符。事情是这样的: 在平面問題中, 量 M 是通过管子单位橫截面的物质的质量, 而在柱面情形是在对称軸的单位长度上的质量。对于下面所考虑的动量和能量的量亦必須考虑到类似的說明。

我們再来研究动量守恒定律。在推导这个定律时, 物质理想化的条件是主要的, 即不考虑它的內摩擦。因此压力 p 将是质点之間相互作用的唯一的力。

在平面一維运动情形动量守恒定律的推导不引起特別的困难。我們再次利用气体或液体在管內的模型并以 P 表示处在坐标为 r 的截面左边的物质的总动量。下面我們將假定, 不仅这个动量 P 是有限的, 而且不存在从負无穷来的动量流, 亦即例如在左边某处存在零压力区域 (其实, 最終的結果如以前一样不依赖于这些假定)。

在截面 r 和 $r+dr$ 之間含有质量 ρdr , 为了得到动量, 必須以速度 u 乘它, 于是,

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho u.$$

在時間間隔 dt 內流經給定的 (固定的) 橫截面的质量为 $\rho u dt$; 同时帶走动量 $\rho u^2 dt$ 。此外, 从处在截面右边的物质方面, 压力 p 以冲量 P 作用在物质上 (注意, 橫截面具有单位面积)。所以补充地損失了动量 $p dt$ 。最后有

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -(\rho u^2 + p).$$

因此, 我們有

$$dP = \rho u dr - (\rho u^2 + p) dt. \quad (1.7)$$

由此不难得到动量守恒定律的积分形式和微分形式，然而我們宁愿在更一般的形式之后做出它。

至于讲到柱对称和球对称的情形，这里的问题比較复杂。动量是一个向量值，且不难理解，例如在球对称情形包含在对称中心附近任一球內的物质其总动量总是恒等于零。动量守恒定律成为平淡的且是无内容的。

对于这个困难有如下的办法，我們从整个空間(在球对称的情形)

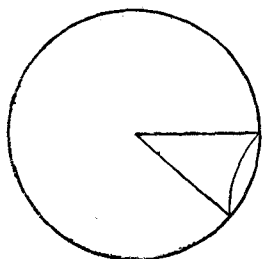


图 3

切去一个顶点在对称中心的圓錐体(图 3)，并且我們將只考虑包含在这个圓錐內和围于半径为 r 的球內的物质的动量。可以认为这个圓錐不是“假想”而是“真实”的；重要的只要它的壁是絕對光滑并对包含在它内部物质的运动不产生影响(如平面情形的管壁一样)。

在这样的圓錐內物质的总动量一般說已經不等于零，并且我們能够設法計算它的全微分。然而在这里还有一个特点。无论这圓錐的壁如何“光滑”，它們总是要給予包含在它内部的物质以压力，并且这里和平面情形不同，这个压力的合力不等于零(不难想象，它的方向朝外)。我們必須考虑这个附加的力；容易理解，关于它的計算必須沿圓錐面对压力进行积分(带有适当的权)。动量的微分已經不能只表示为当地的量；它已含有积分。在柱对称情形，情况完全类似。

我們这里将不引入全部的推导，而立即指出結果。看来，动量的微分有如下形式：

$$dP = \rho u r^2 dr - \left[(\rho u^2 + p) r^2 - \int_0^r \nu r^{\nu-1} p dr \right] dt. \quad (1.8)$$

把它写成下面的形式也是有意义的：

$$dP = \rho u r^v dr - \left[\rho u^2 r^v + \int_0^p r^v dp \right] dt. \quad (1.9)$$

自然, 这里的积分应理解为司梯杰斯积分。

为了得到动量守恒定律的积分形式。应该沿 r, t 平面上(任意的)閉圍道积分(1.8)。此时第二項的积分很容易地变换为包含在圍道內的面积积分。这样一来, 守恒定律取下列形式(我們再次略去中間的計算):

$$\oint \rho u r^v dr - (\rho u^2 + p) r^v dt = \int \nu r^{v-1} p dr dt. \quad (1.10)$$

这里左边是沿任意閉圍道的积分; 积分的方向通常是逆时針方向的(图4)。右边是包含在这个圍道內的面积的积分。

現在, 对等式(1.8)右端第一項关于 t 偏微分, 第二項关于 r 偏微分, 然后令其相等, 我們就得到动量守恒定律的微分形式。此时, 第二項中的积分消失, 因此我們得到方程:

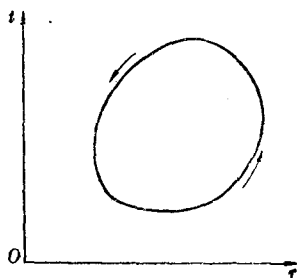


图 4

$$\frac{\partial(\rho u r^v)}{\partial t} = - \frac{\partial[(\rho u^2 + p) r^v]}{\partial r} + \nu r^{v-1} p.$$

这个方程可以变为下列形式:

$$r^v u \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{\rho u}{r} \right) + r^v \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0,$$

把它和連續性方程(1.6)比較之后, 我們确信, 第一个括号恒等于零; 于是得到方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (1.11)$$

它是熟知的一維欧拉方程。应该指出, 无论是在平面情形或者是在柱对称和球对称情形, 它具有完全一样的形式。

我們剩下来要考虑的是能量守恒定律。在推导动量守恒定律时所遇到的困难这里不再发生，因为能量是标量。只是必須再次添加介质理想化的条件，不过这一次它是表达为不存在热傳导的。它使我們能够断言，包含在某个体积內的物质的全部能量，其变化只是由于边界上压力所作的功才发生。

我們引出柱对称情形的推导。我們取两个垂直于对称軸的相隔单位长的平面，并以 $2\pi E$ 表示由这两个平面和圍繞对称軸的半

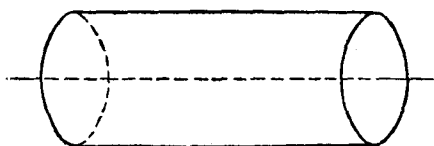


图 5

徑为 r 的圓柱面 (图 5) 所圍物质的全部能量。

如果我們改变圓柱半徑一个值 dr ，那么包含在这个圓柱之內的物质的质量改变 $2\pi\rho r dr$ 。这物质的全部能量由两部分形成——动能和內能 (热力学的能)。以 ε 表示单位质量的內能，我們得到单位质量的全部能量等于 $\varepsilon + \frac{u^2}{2}$ 。因此，由于改变圓柱半徑所发生的物质全部能量的变化等于 $2\pi\rho r \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) dr$ 。所以

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) r.$$

在時間間隔 dt 的过程中，柱面上的质点从柱面前进了距离 $dr = udt$ ，同时由圓柱中流出能量 $2\pi\rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) r u dt$ 。此外这些质点作了 $2\pi r p u dt$ 的功 (圓柱側面积等于 $2\pi r$)。能量总共减少 $2\pi r \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + p \right] u dt$ 。由此得

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -u \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + p \right] r.$$

我們得到下列能量的微分表达式：

$$dE = \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) r dr - u \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + p \right] r dt.$$

在一般的情况下(对一維运动的所有三种类型),它具有形式:

$$dE = \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) r^\nu dr - u \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + p \right] r^\nu dt. \quad (1.12)$$

由此,我們立即得到能量守恒定律的积分形式:

$$\oint \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) r^\nu dr - u \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + p \right] r^\nu dt = 0. \quad (1.13)$$

显見,能量守恒定律的微分形式为:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) r^\nu \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ u \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + p \right] r^\nu \right\} = 0.$$

如果利用热力学恒等式

$$d\varepsilon = T ds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

这里 T 是绝对温度, s 是熵, 那末, 最后的微分方程可以大大地简化。事实上, 拆开該微分方程中所有的括号, 做代換:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = T \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = T \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial r},$$

并考虑到連續性方程(1.6)和欧拉方程(1.11), 我們得到下面的简单的微分方程:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial r} = 0. \quad (1.14)$$

我們注意, 这个方程的左端是沿方向 $dr = u dt$ 所取的微商 $\frac{ds}{dt}$ 。但是 $dr = u dt$ 是物质的质点运动規律。因此方程(1.14)表明, 每个质点的熵保持不变。讓我們提醒注意, 这个結論仅在微分的守恒定律可应用的条件下, 亦即当 u, ρ, p, ε 等在那里至少都是連續的条件下才是正确的。于是每个已給质点所经历的热力学过程可以认为是可逆的。热傳导的不存在使它成为絕热状态; 所

以方程 (1.14) 可以立即写出。应该注意,上面所写的热力学恒等式仅在过程的可逆性条件下是适用的。

沿方向 $dr = udt$ 不仅熵 s 保持常量,而且表达式 (1.4) 表明了沿这个方向 M 也不改变。而这就表明了量 M 和 s 函数相关:

$$s = s(M).$$

这个事实在今后起着十分重要的作用。但是这里取其他的具有长度量綱的量代替 M 是方便的。它称为拉格朗日坐标。

設 $\rho_0 = \rho_0(M)$ 是具有密度量綱的关于量 M 的任意函数。我們用关系式

$$R^\nu dR = \frac{dM}{\rho_0} \quad (1.15)$$

引进拉格朗日坐标 R 。这样一来,当給定函数 $\rho_0(M)$ 时,量 R 就准确到一个常数而被确定:

$$R^{\nu+1} = R_0^{\nu+1} + \int_0^{(r,t)} \frac{\nu+1}{\rho_0} dM.$$

积分可以沿任何路徑施行。

量 R 是 M 的函数,因此有

$$s = s(R). \quad (1.16)$$

将 (1.4) 中的 dM 代入 (1.15) 中,于是得到拉格朗日坐标的微分

$$R^\nu dR = \frac{\rho}{\rho_0} r^\nu (dr - udt). \quad (1.17)$$

我們將本节中所得到的基本方程汇集在一起。

质量、动量和能量的全微分表达式 [参看 (1.4), (1.8), (1.12)]:

$$\left. \begin{aligned} dM &= \rho r^\nu dr - \rho u r^\nu dt, \\ dP &= \rho u r^\nu dr - \left[(\rho u^2 + p) r^\nu - \int_0^r \nu r^{\nu-1} p dr \right] dt, \\ dE &= \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) r^\nu dr - u \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + p \right] r^\nu dt. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

守恒定律的积分形式[参看(1.5), (1.10), (1.13)]:

$$\left. \begin{aligned} \oint \rho r^v dr - \rho u r^v dt &= 0, \\ \oint \rho u r^v dr - (\rho u^2 + p) r^v dt &= \int \nu r^{v-1} p dr dt, \\ \oint \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) r^v dr - u \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + p \right] r^v dt &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

运动微分方程[参看(1.6), (1.11), (1.14)]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{\nu \rho u}{r}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

注意,如果微分形式(1.18)和守恒定律(1.19)用拉格朗日坐标写出来,那末看起来更为简单。其实,从(1.17)可得:

$$r^v dr = \frac{\rho_0}{\rho} R^v dR + r^v u dt, \quad (1.21)$$

把它代入(1.18),于是得到:

$$\left. \begin{aligned} dM &= \rho_0 R^v dR, \\ dP &= \rho_0 u R^v dR - \left(p r^v - \int_0^r \nu r^{v-1} p dr \right) dt, \\ dE &= \rho_0 \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) R^v dR - u p r^v dt. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

类似地也可变换表达式(1.19)。这些关系式便于用来把微分方程(1.20)变为拉格朗日坐标。

最后,我們作如下的附注。在微分方程的經典理論中,柯西問題是对微分方程提的;在我們的情形微分方程也就是方程(1.20)。然而,正如推导这些方程所表明的,对于我們的问题应该认为积分方程(1.19)是基本的,它們直接表示了物理的守恒定律。这也就

是說对它們應該提柯西問題并解决随即发生的关于解的存在和唯一性問題等等。这种观点只是在最近几年才得到了发展，但还没有多少完全的結果。

特別，已查明(1.19)形的积分方程还不能保証解的唯一性，这里必須附加条件。在我們的情形下这条件为热力学第二定律所給出，从这定律导出每个质点的熵不可能减少。戈都諾夫^①在此条件下并添加某些限制成功地証明了方程(1.19)的柯西問題解的唯一性。

今后，我們將照例使用运动微分方程，仅当微分方程显现不适用时才用积分方程(例如，当研究和計算間断解时)。

① С. К. Годунов: 关于流体动力学方程解的唯一性。Матем. сб. 40 (82), вып. 4, 1956, 467—478.