代数拓扑学引论

dai shu tuo pu xue yin lun

陈奕培 编著

厦门大学出版社

代数拓扑学引论

陈奕培 编著

本书承福建省自然科学著作出版基金资助出版

厦门大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

代数拓扑学引论/陈奕培编著. -厦门:厦门大学出版社,
1999.12
ISBN 7-5615-1556-1

Ⅰ.代… Ⅱ.陈… Ⅲ.代数拓扑-概论 Ⅳ.O189.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 70542 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门大学 邮编:361005)
三明地质印刷厂印刷
(地址:三明市富兴路 15 号 邮编:365001)
开本:850×1168 1/32 印张:7 插页:4
1999 年 12 月第 1 版 1999 年 12 月第 1 次印刷
字数:200 千字 印数:1—1000 册
定价:15.00 元

内容提要

本书介绍“代数拓扑学”的基本知识，其中第一章基本群、第二章覆盖空间、第三章单纯同调群、第四章同调序列等，是主要内容。至于高维同伦群、奇异同调群、上同调等，则作为补充知识在第五章加以介绍。而本书所必备的、有关交换群方面的代数知识，则作为附录编入，以供参考。

前　言

拓扑学的中心问题是拓扑空间的分类问题，即以同胚的空间归为一类。因此，判别两个空间是否同胚乃基本而且重要的。要证明两个拓扑空间同胚，一个办法是找出两个空间之间的一个同胚映射，一般说来，这是相当困难的。因此从另一方面考虑，即从证明两个空间是不同胚着手。办法是通过某一个拓扑性质来检验。如果某一拓扑空间具有某个拓扑性质，而另一个拓扑空间则不具有该性质，从而判定该两个拓扑空间不同胚。这种以拓扑性质检验两个空间不同胚的方法是很有效的。利用点集拓扑学所引进的拓扑性质的概念，可以作为判别两个空间不同胚的依据。例如直线与平面不同胚，因为前者去掉一点后是一个不连通空间，而后者去掉一点仍然是连通的。又如通过紧致性概念可判定二维欧氏空间 R^2 与二维球面 S^2 不同胚，因为前者非紧致而后者是紧致的。然而即使很简单的空间，例如圆盘和圆环、二维球面和环面；通过点集拓扑所引进的诸多拓扑性质概念，包

括紧致性、连通性、分离性等等，都不足以把它们加以区分。因此需要以不同的方法，对拓扑空间引进新的拓扑不变性概念，用来判定两个拓扑空间的不同胚。这种新的方法是从拓扑空间引进某些代数结构，而且所引进的代数结构具有拓扑不变性。从而利用联系拓扑空间的代数结构的差别，来判定两个拓扑空间的不同胚。代数拓扑学就是研究与拓扑空间相联系的、拓扑不变的代数结构的理论。

本书介绍代数拓扑学中最主要的概念：同伦与同调。内容包括基本群、覆盖空间、单纯同调群、相对同调群与同调序列等基础知识。并把高维同伦群、奇异同调群、上同调等作为补充知识加以介绍。至于有关交换群的代数方面基本知识则作为附录编入，以供参考。

本书的出版，得到厦门大学数学系梁益兴教授和厦门大学出版社副编审吴天祥同志的支持和帮助，作者对他们表示衷心的感谢。

本书是作者多次讲授代数拓扑这门课程的部分讲稿，加以修改整理而成，可作为代数拓扑学的入门教材或参考书，由于水平所限，不妥或错误之处难免，希读者给予批评指正。

陈奕培

一九九七年十月于厦门大学

目　　录

第一章　基本群

代数拓扑中的一个基本概念是同伦,它源自函数论所涉及的问题.设 X 是 R^2 的连通开子空间,两个实函数 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 在 X 中连续而且偏导数也连续.考虑微分形式 $f\mathrm{d}x+g\mathrm{d}y$ 在 X 中从点 P_0 到 P_1 的一条分段光滑曲线 C 上的线性积分 $\int f\mathrm{d}x+g\mathrm{d}y$,一般而言,它不但与端点而且与曲线的选取有关,然而有些微分形式却与曲线的选择无关.后者亦即与沿 X 中任一闭路的积分为零是等价的.一个基本的结论是:$f\mathrm{d}x+g\mathrm{d}y$ 是正合的(即某函数的全微分),其充要条件是该积分与路线的选择无关.注意到 $f\mathrm{d}x+g\mathrm{d}y$ 的正合性,就是存在一个连续且偏导数也连续的函数 $u(x,y)$ 使得 $\mathrm{d}u=f\mathrm{d}x+g\mathrm{d}y$.这时 $u_y=g$, $u_x=f$.因此有关系式 $g_x=f_y$.然而,反过来,若 $f_y=g_x$,并不能保证 $f\mathrm{d}x+g\mathrm{d}y$ 是正合的.

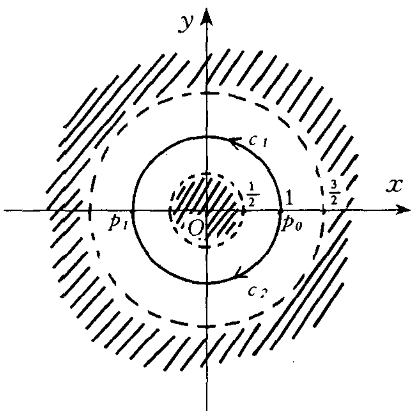

图 1-1

如图 1-1 所示，设 X 为半径分别等于$\frac{1}{2}$和$\frac{3}{2}$的同心圆之间的圆环区域，即

$$X = \left\{(x, y) \in R^2 \mid \frac{1}{2} < (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} < \frac{3}{2}\right\}.$$

考虑微分形式 $f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y$，其中 $f = \frac{y}{x^2 + y^2}$，$g = \frac{x}{x^2 + y^2}$，这时 $f_y = g_x$，但是沿 P_0 到 P_1 的两条线路 C_1 与 C_2 的积分不相等. 因为沿闭路 $C = C_1 - C_2$ 的参数化 $x = \cos t$，$y = \sin t$ ($o \leqslant t \leqslant 2\pi$) 的积分 $\int_c f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y = \int_o^{2\pi}\mathrm{d}t = 2\pi \neq 0$. 这是由于 X 中的闭路 C 包含一个洞. 路线 C_1 不能在 X 中连续地变到 C_2，或是说闭路 C 不能在 X 中缩为一点. 这个要求就是应用 Green 定理于关系式 $\int_c f\mathrm{d}x + \mathrm{d}g = \iint_X (g_x - f_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 时，必须要求闭路 C 及其内部都落在 X 之中. 上面提到的曲线的连续变形就是同伦概念的来源.

§1 道路的同伦

定义 从特殊的拓扑空间：单位闭线段 $I = [0,1]$ 到一般拓扑空间 X 的连续映射 $f: I \to X$ 称为 X 中的一条**道路**. $f(0)$ 与 $f(1)$ 分别称为该道路 f 的**起点**和**终点**；映射 f 称为连接 $f(0)$ 与 $f(1)$ 的一条道路. 而该映射 f 的像 $f([0,1])$ 则称为 X 中的一条曲线.

从给定的道路，可作出新的道路，我们有如下的

引理 1 (1) $f: I \to X$ 是 X 中的一条道路，则 $\bar{f}(t) = f(1-t): I \to X$ 也是一条道路.

(2) 设 f, g 是 X 中的两条道路，且 f 的终点是 g 的起点，则 $f * g: I \to X$ 由

$$f*g(t)=\begin{cases}f(2t),0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ g(2t-1),\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

所决定的映射也是一条道路.

证明： (1)因为 $f:I\to X$ 连续,而 $t\to 1-t(0\leqslant t\leqslant 1)$是 $I\to I$ 的连续映射,因此两个连续映射的复合 $f(1-t):I\to X$ 也是连续的,即$f(1-t)$也是一条道路.

(2)因为 $f(2t)(0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2})$和 $g(2t-1)(\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1)$均连续,而且$f*g(0)=f(2t)|_{t=0}=f(0)$, $f*g(1)=g(2t-1)|_{t=1}=g(1)$都是确定值,并且满足条件 $f(1)=g(0)$,由点集拓扑中的粘合引理,$f*g$ 也是 I 到 X 的道路. ▌

定义 $\bar{f}$ 称为 f 的**逆道路**;$f*g$ 称为道路 f 与 g 的**乘积道路**.

定义 设 f 与 g 是具相同端点的道路,即 $f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)$;如果存在连续映射 $F:I\times I\to X$ 满足 $F(t,0)=f(t)$, $F(t,1)=g(t)$, $t\in I$;而且 $F(0,s)=f(0)=g(0)=x_0\in X$, $F(1,s)=f(1)=g(1)=x_1\in X$, $s\in I$.则称 X 中的道路 f 和 g 是**同伦的**.或称 f 与 g 是等价的.记为 $f\sim g$ 或 $f\underset{F}{\simeq}g$.这时也称 F 是 f 到 g 的一个**同伦**或**伦移**.(参

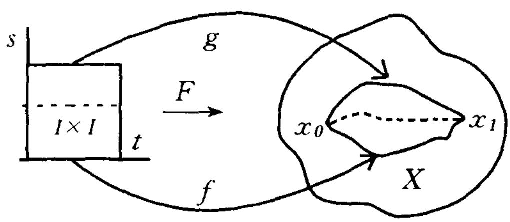

图 1-2

阅图 1－2）

直观意义即在 X 中存在着从曲线 $f(t)$ 到 $g(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的连续变形．

注 有时为了明确同伦的道路在 $t=0,1$ 处具相同的端点，也用记号 $f\underset{F}{\simeq}g\ \mathrm{rel}(0,1)$．或称 f 与 g 相对于端点 0 和 1 是同伦的，注意到这样的同伦 F 满足 $F(0,s)=f(0)$，$F(1,s)=f(1)$．

引理 2 (1) $f\sim f\ \mathrm{rel}(0,1)$；(2)若 $f\sim g\ \mathrm{rel}(0,1)$，则 $g\sim f\ \mathrm{rel}(0,1)$；(3)若 $f\sim g\ \mathrm{rel}(0,1)$，且 $g\sim h\ \mathrm{rel}(0,1)$；则 $f\sim h\ \mathrm{rel}(0,1)$．

证明 (1)设 $f:I\to X$，则 $F(t,s)=f(t)$，$s\in I$ 是从 f 到 f 的一个同伦．

(2) 设 $F:I\times I\to X$ 是 f 与 g 的同伦，则 $\overline{F}(t,s)=F(t,1-s)$，$t\in I$，$s\in I$ 是 g 到 f 的同伦．

(3)设 $f\underset{F}{\simeq}g$，$g\underset{G}{\simeq}h$，定义 $H:I\times I\to X$ 为

$$H(t,s)=\begin{cases}F(t,2s),0\leqslant s\leqslant\dfrac{1}{2}\\ G(t,2s-1),\dfrac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1\end{cases};0\leqslant t\leqslant 1.$$

当 $s=\dfrac{1}{2}$，$F(t,1)=g(t)$，$G(t,0)=g(t)$，根据粘合引理，$H(t,s)$ 连续．而且 $H(t,0)=f(t)$，$H(t,1)=h(t)$，$t\in I$．所以 $H(t,s):I\times I\to X$ 是 f 到 h 的同伦．▌

据此，道路 $f:I\to X$ 的同伦概念是等价性概念．我们称与 f 等价的全部道路为道路 f 的**等价类**（或**同伦类**），记为$[f]$．

一对同伦的道路与另一对同伦的道路的相应乘积道路是否同伦？我们有

引理 3 设 $f_0\sim f_1$，$g_0\sim g_1$；而且 $f_0(1)=g_0(0)$，$f_1(1)=g_1(0)$；则 $f_0*g_0\sim f_1*g_1$．

证明　如图 1－3 所示，设 $f_0 \underset{F}{\simeq} f_1$，$g_0 \underset{G}{\simeq} g_1$；定义 $H: I\times I \to X$ 为 $H(t,s)=\begin{cases} F(2t,s), 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2} \\ G(2t-1,s), 0\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$　$0\leqslant s\leqslant 1$.

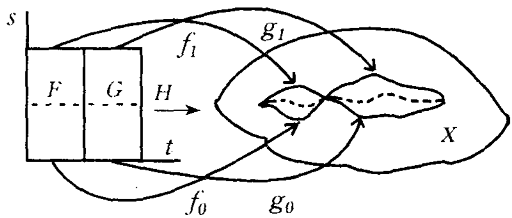

图 1－3

因为当 $t=\frac{1}{2}$，$F(1,s)=f_0(1)$，$G(0,s)=g_0(0)$，由粘合引理，H 连续．此处，

$$H(t,0)=\left\{\begin{array}{l} F(2t,0)=f_0(2t), 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2} \\ G(2t-1,0)=g_0(2t-1), \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1 \end{array}\right\}=f_0 * g_0(t),$$

$$H(t,1)=\left\{\begin{array}{l} F(2t,1)=f_1(2t), 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2} \\ G(2t-1,1)=g_1(2t-1), \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1 \end{array}\right\}=f_1 * g_1(t).$$

因此 $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$，即相应的乘积道路属于同一个等价类 $[f*g]$. ▎

定义　道路等价类 $[f]$ 与 $[g]$ 的乘积属于同一个等价类

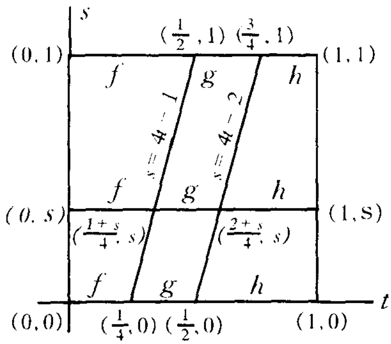

图 1－4

$[f*g]$.

一般而言，$(f*g)*h \neq f*(g*h)$，即道路的乘积不满足结合律，然而我们有

引理 4 设 f、g、h 是 X 中的三条道路，而且 $f(1)=g(0)$，$g(1)=h(0)$，则 $(f*g)*h \sim f*(g*h)$.

因此 $([f][g])[h]=[f]([g][h])$，即道路的等价类的乘积满足结合律.

证明 根据乘积道路的定义，我们有如下的乘积道路：

$$(f*g)*h(t)=\begin{cases} f(4t), & t\in[0,\frac{1}{4}] \\ g(4t-1), & t\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}] \\ h(2t-1), & t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

$$f*(g*h)(t)=\begin{cases} f(2t), & t\in[0,\frac{1}{2}] \\ g(4t-2), & t\in[\frac{1}{2},\frac{3}{4}] \\ h(4t-3), & t\in[\frac{3}{4},1] \end{cases}$$

如图 1－4 所示，按照分段线性变换作出一个同伦 $F: I\times I\to X$，由下式所决定：

$$F(t,s)=\begin{cases} f(\frac{4t}{1+s}), 0\leqslant t\leqslant \frac{s+1}{4} \\ g(4t-s-1), \frac{s+1}{4}\leqslant t\leqslant \frac{s+2}{4} \\ h(\frac{4t-s-2}{2-s}), \frac{s+2}{4}\leqslant t\leqslant 1, \end{cases}$$

它由满足条件 $F(t,0)=(f*g)*h(t)$, $F(t,1)=f*(g*h)(t)$所决定. ▌

引理 5　设 f 是 X 中从 x 到 y 的道路,则 $e_x*f\sim f$ 而且 $f*e_y\sim f$,此中 e_x 与 e_y 分别是常值道路 x 与 y. 因此$[e_x][f]=[f][e_y]$.

证明　如图 1-5 所示,作出一个同伦 $F:I\times I\to X$ 由下式所决定:

$$F(t,s)=\begin{cases} e_x, 0\leqslant t\leqslant \frac{1-s}{2} \\ f(\frac{2t-1+s}{1+s}), \frac{1-s}{2}\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

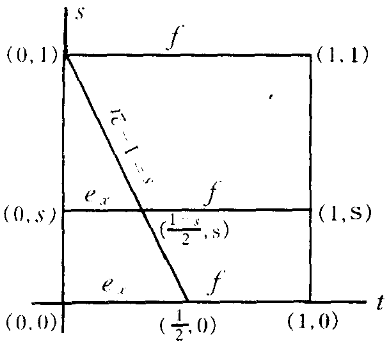

图 1-5

它满足条件 $F(t,0)=e_x*f$, $F(t,1)=f(t)$;而且 $F(0,s)=e_x=f(0)$, $F(1,s)=f(1)$. 因此 $e_x*f\sim f$, 即$[e_x][f]=[f]$. 同理可证明$[f][e_y]=[f]$. ▌

引理 6　设 f 是 X 中以 x 为起点, y 为终点的道路, 则 $f\bar{f}\sim e_x$ 且 $\bar{f}f\sim e_y$. 因此$[f][\bar{f}]=[e_x]$, $[\bar{f}][f]=[e_y]$.

证明　我们只证明 $f\bar{f}\sim e_x$; 同理可证明 $\bar{f}f\sim e_y$.

因为

$$f * \bar{f}(t) = \begin{cases} f(2t), 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \bar{f}(2t-1) = f(2-2t), \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

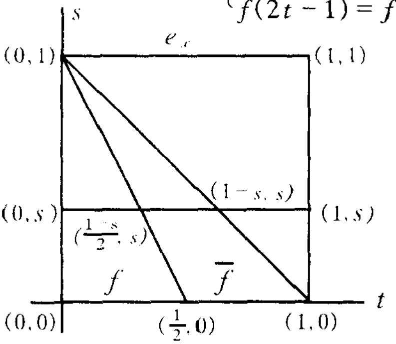

图 1－6

$$e_x(t) = x, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

我们作出一个同伦

$$F(t,s) = \begin{cases} f(\frac{2t}{1-s}), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1-s}{2} \\ \bar{f}(\frac{2t-1+s}{1-s}), & \frac{1-s}{2} \leqslant t \leqslant 1-s \\ e_x, & 1-s \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

它满足条件 $F(t,0) = f * \bar{f}(t)$，

$F(t,1) = e_x(t)$. ▌

§2 基本群

一般的道路，由于起点与终点不同，情况较复杂，现在考虑一种特殊的道路.

定义 道路 $f: I \to X$，当它满足 $f(0) = f(1) = x_0 \in X$，即起点与终点重合，这时称 f 是 X 中以 x_0 为基点的**闭路（或回路）**.

从上节得知，每条闭路 f 决定一个闭路等价类 $[f]$，我们将 X 中以 x_0 为基点的闭路等价类集合记为 $\pi_1(X, x_0)$.

上节中有关道路等价类的性质，对闭路等价类当然也成立. 因此，对 $[f],[g],[h] \in \pi_1(X, x_0)$，由上节引理 4、引理 5 和引理 6，则下列三个结论成立：

(1)它们的乘积是可结合的,即$([f][g])[h]=[f]([g][h])$.

(2)每个闭路等价类的左(右)逆元相等;即$[f][\overline{f}]=[\overline{f}][f]=[e_{x_0}]$,此中$e_{x_0}$是以$x_0$为基点的常值闭路.

(3)以x_0为基点的闭路等价类具唯一的恒等元$[e_{x_0}]$;即$[e_{x_0}][f]=[f][e_{x_0}]=[f]$.

从此得出

定理　$\pi_1(X,x_0)$关于闭路等价类的乘积构成一个群.

定义　群$\pi_1(X,x_0)$称为X中以x_0为基点的**基本群**,或Poincaré **群**,**或一维同伦群**.

定理　设$x,y\in X$,若存在X中从x到y的一条道路,则$\pi_1(X,x)$与$\pi_1(X,y)$同构.

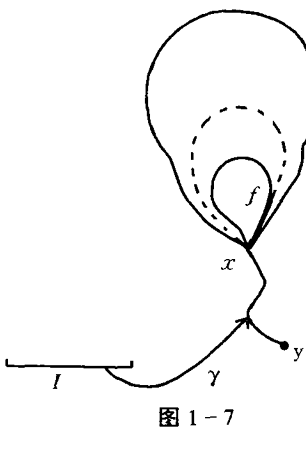

图1-7

证明　设存在X中从x到y的一条道路$\gamma:I\to X$,满足$\gamma(0)=x$,$\gamma(1)=y$;则$\overline{\gamma}$是X中从y到x的一条道路.如图1-7所示,对于基点在x处的任一闭路f,对应着以y为基点的闭路$\overline{\gamma}*f*\gamma$,而且当以$x$为基点的两条闭路$f$与$g$是同伦的,即$f\sim g$;则相应地有$\overline{\gamma}*f*\gamma\sim\overline{\gamma}*g*\gamma$,因此$[f]$与$[\overline{\gamma}*f*\gamma]$的对应是完全确定的,与$[f]$的代表选择无关.我们把这样的对应记为$\gamma_*$,即

$$\gamma_*:[f]\to[\overline{\gamma}*f*\gamma].$$

因为$\gamma_*([f_1][f_2])=[\overline{\gamma}*f_1*\gamma*\overline{\gamma}*f_2*\gamma]$