现代塑性加工力学

能量法及有限元法在塑性加工中的应用

赵志业　王国栋　编著

东北工学院轧钢教研室

一九八四年五月

绪　论

现代塑性加工力学是金属压力加工专业的专业理论课。

现代塑性加工力学就是用现代的数学一力学方法来解压力加工中的力能参数、变形参数和应力应变在工件内的分布以及与此有关的其它问题。这方面可归结为在给定的初始和边界条件下求解变形力学方程组，也就是解塑性加工力学的边值问题。

现代塑性加工力学的特点是

1）运用塑性力学的基本原理（如最小能原理等）和精确的变形力学方程（运动方程，也就是考虑惯性力的力平衡微分方程、表示应变（或应变速率）与位移（或位移速度）的几何方程、反映应力与应变物理关系的本构方程、精确地还包括热传导方程）。

2）采用较精确的初始和边界条件，其中也包括摩擦条件和温度条件等。

3）考虑实际金属的物理特性采用较精确的变形抗力模型。

4）采用电子计算机求数值解，然后用函数逼近法得到工程实用的简化模型，或为数据库提供通用的计算程序。

塑性加工力学问题中，在给定的初始和边界条件下联解精确的变形力学方程组求出正确解并不是一椿容易的事。因此，现代塑性加工力学多从另一个角度着手。例如可根据塑性力学中的最小能原理来求解。后面将证明，在一切运动许可的位移场（或速度场）中，真实的位移（同时满足静力许可条件的）使全能达到最小值。全能是位移的函数，而位移又是坐标的函数，所以全能是函数的函数，对这种广义的函数称为泛函。可见，全能就是一种泛函。求泛函极大值和极小值的方法称为变分法。对全能泛函求最小值可确定更接近真实的位移（或速度）场。由边界上的位移可确定工件的外形尺寸。由外力功和内力功相等可求出变形功和变形力。

为了简化，常把实际工件材料看做刚塑性的、刚一粘塑性的和弹一塑

性硬化材料等，所假定材料的不同，则最小能原理的具体表达式将有所不同。顺便指出，最小能原理 也是塑性力学变分原理的一种。后者还包括最小余能原理。

塑性加工力学解析中的能量法(有的也叫变分法)和有限元法的基础就是塑性力学的变分原理。

能量法有两类：1) 设定运动许可的位移(或速度)函数(也就是设定运动许可的位移场或速度场)。利用变分原理中的最小能原理，确定更接近真实的位移场或速度场。然后按外力功和内力功相等确定变形功和变形力；2) 设定静力许可的应力函数(也就是设定静力许可的应力场)，利用变分原理中的最小余能原理，确定更接近真实的应力场。从而可求出变形力和变形功。目前用第一类能量法还没有很好解决求工件内的应力分布问题；用第二类能量法难以确定工件内的位移(或速度)和应变(或应变速率)的分布问题。由于第二类能量法在设定静力许可应力场上比第一类能量法在设定运动许可速度场上较困难，所以目前第一类能量法应用较多。

有限元法是把工件假想划分成有限个用结点相连接的单元。以结点上的位移(或速度)作为未知量，利用最小能原理和解相应的方程组确定此未知量，按结点位移(速度)与单元内的应变以及与单元内的应力之间的关系确定各单元的应力和应变的分布。由于对分割的小单元单独处理，故可解温度等不均匀分布的问题(认为每个小单元内物理性质是均匀的)。根据假定的材料不同，应用于塑性加工的有限元法可分为弹一塑性有限元法，刚-塑性有限元法和粘-塑性有限元法。

能量法和有限元法各有其特点，实际应用时，选择哪种方法，视所解决的塑性加工问题的特点和要求的精度而定。

目前，用现代塑性加工力学解析中的能量法和有限元法已能解决许多生产实际问题，见下表。　(此表附在下页)

能量法从五十年代中期，有限元法从七十年初期开始应用解塑性加工力学问题。随着电算技术的突飞猛进，这些解析法目前正在迅速的发展。国外在这方面做了大量的工作。国内在这方面的工作虽然开始较晚，但有迎头赶上之势。

塑性加工过程	所能解析的问题
轧制	初轧钢锭前后鱼尾，内部缺陷的压合条件；轧边或立轧厚件时轧件的外形，平面板形；简单断面孔型轧制以及四辊孔型轧H型件时，轧制力、力矩前滑、宽展以及孔型的优化设计等；不对称轧制、轧环以及其它特种轧制的力学解析等。
锻压	大锻件内部缺陷的压合条件，内部晶粒组织的分布与细化；锻压力与功；锻模的优化设计等
拉拔与挤压	拉拔力和挤压力；内部开裂条件；最佳模具设计等。

目前的趋势如下：

1）继续深入解决更多的塑性加工生产实际中的力学问题。

2）使摩擦等边界条件和变形抗力模型更加精确化，并把热传导方程包括在求解的方程组中。

3）开发考虑因素更多，计算精度更高，计算工作量力求减少的高效解析法。

可以予测，随着世界新的技术革命的到来，考虑因素更多的塑性加工力学问题，也会在飞速发展的电算技术上得以解决。然而，技术高超的电脑，仍需人们按着过程的物理本质去建立数学表达式才能运算。所以，做为新的技术革命核心之一的计算机工业的发展，将会促进我们去研究考虑因素更多，计算精度更高的解析法。这样，塑性加工力学也将随着世界新的技术革命的到来一定会有新的突破。

本课程没有成熟的教材可循，主要参考国内外有关文献资料，并结合几年来作者的教学和科研实践，仓促写成此讲义以应金属压力加工专业研究生必修课和大学本科生选修课（本讲义第五章以前）缺乏参考书之急。由于作者水平所限，讲义中一定会存在许多缺点和错误，望读者予以批评指正。

作者　1984.3

目　　录

注：1）学过弹性有限元的读者带•号的章节可以不读。

2）本讲义绪论、第四章到第九章由赵志业编写：第一章到第三章以及第八章第五节和第九章第四节由王国栋编写。全讲义由赵志业主编。

主 要 参 考 书

1　钱伟长，变分法及有限元，科学出版社，1980

2　王 仁等，塑性力学基础，科学出版社，1982

3　*Г•Я•Гун, Оснсвы Теории Обработки Металлов Давлением, металлургиздат*, 1980

4　*И•Я•Тарновский* 等，*Теория обработки Металлов давлением, Металлургиздат*, 1963

5　*Е•П•Унксов, Теория Пластических деформации Металлов. Машиностроение* 1983

6　李大潜等，有限元素法续讲，科学出版社，1979

7　谢贻权等，弹性和塑性力学中的有限元法，机械工业出版社，1981

8　*C•S•Deast* INTRODUCTION TO THE FINITE ELEMENT METHOD *Van Nostrand Reinhold co New York* 1972

第一章　变分法

在科学技术上，常常需要确定某一函数 $z=f(x)$ 的极大值或极小值，这种计算分析是微积分里大家所熟知的。但是，我们经常还要去确定一类特殊的量，即所谓泛函的极大值和极小值。这就是变分法所处理的范围。本章将从几个引例出发，介绍有关泛函和变分的基本概念，给出求泛函极值问题的著名的欧拉方程，最后给出求泛函极值的几种近似方法。

第一节　泛函的概念

引例：

例 1：已知 xOy 平面上两点 $A(x_0, y_0)$、$B(x_1, y_1)$，试求连接 A、B 两点的最短弧线（图 1—1）。

设连结 A、B 两点曲线之函数为 $y=y(x)$，则

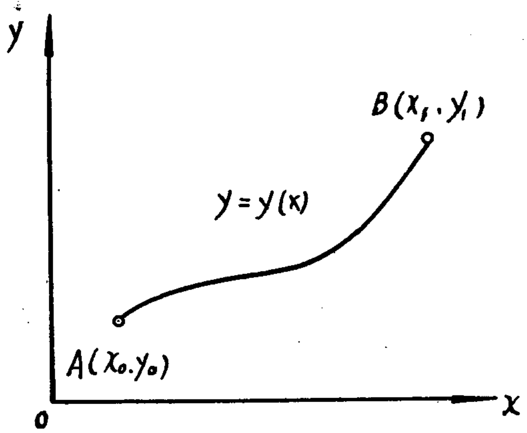

图 1—1　两点间的最短弧线问题

弧长 AB 为

$$\overset{\frown}{AB} = L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+[y'(x)]^2}\, dx \qquad (1\text{—}1)$$

可见 L 随函数 $y=y(x)$ 的选取而变，它就是一个泛函。利用求泛函极值的变分法可以确定使 L 最短的函数曲线即极值曲线为

$$y=c_1x+c_2$$

其中常数 c_1、c_2可由边界点A、B的坐标（即边界条件）确定。

例 2：求通过两点$A(x_0, y_0)$、$B(x_1, y_1)$且长度l为一定值的函数曲线 $y=y(x)$，使图 1—2中所示曲边梯形$ABCD$的面积A_s达到最大。

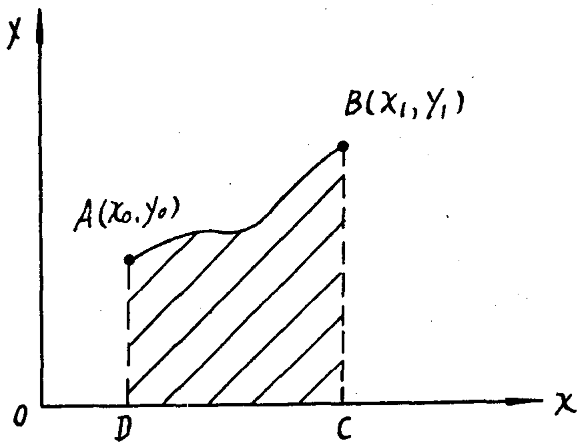

图 1—2　曲边梯形的面积

曲边梯形$ABCD$的面积

$$A_s=\int_{x_0}^{x_1} y\,dx \tag{1—2}$$

A_s依y的选取而定，它也是一个泛函，但在这个问题中还有一个约束条件，即AB长度

$$l=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+[y'(x)]^2}\;dx=const \tag{1—3}$$

这是一个带约束条件的泛函极值的问题。

由变分法可以确定，泛函A_s的极值曲线为

$$(x-c_2)^2+(y-c_1)^2=r^2$$

其中常数 c_1、c_2、r 可由条件 $y(x_0)=y_0$，$y(x_1)=y_1$及$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx=l$ 来确定。

例 3：由最小势能原理知，变形体全能ϕ随所选取的三个位移函数 u_i ($i=x, y, z$) 而变，ϕ也是一个函数，且它必须满足体积不变条件

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \tag{1—4}$$

所以问题归结为在约束条件（1—4）下求使泛函ϕ达到最小值的位移函数。

由上面三个例题可知，L、A_s、ϕ这些特殊的量随一个函数或几个函数的选取而变，它们都是泛函。常用一个统一的符号ϕ或J表示，记作$\phi[y(x)]$或$\phi(u_g)$等。我们定义：

凡变量的值是由一个或几个函数的选取而确定者，这个变量就叫做泛函。

最简单的泛函为：

$$\phi=\int_{x_0}^{x_1}F(x, y, y')dx \tag{1—5}$$

变分法就是研究求泛函极大值和极小值的方法。凡有关泛函极大值和极小值的问题都叫做变分问题。

第二节　变分及其特性

1．泛函的自变量函数的变分

由微积分可知，一般函数$y=y(x)$自变量为x，它的增量$\triangle x=x-x_0$，当增量$\triangle x$无限小时，$\triangle x=dx$，dx为自变量x的微分。相似地，泛函$\phi[y(x)]$的自变量函数为$y(x)$，当$y(x)$的变化量无限小时，称其为自变量函数的变分，用$\delta y(x)$（或简写为δy）来表示。δy是指函数$y(x)$和跟它相接近的另一函数$y_1(x)$的微差。

泛函的自变量函数$y(x)$要怎样改变才算是微小的呢？或说$y=y(x)$和$y_1=y_1(x)$要怎样才算是很接近呢？最简单的情况是在一切的x值上$y_1(x)$和$y(x)$的差都很小，即$\delta y=y(x)-y_1(x)$很小。进一步还可以要求两种情况下不仅纵坐标接近，而且对应点切线方向也很接近，即$\delta y=y(x)-y_1(x)$和$\delta y'=y'(x)-y_1'(x)$都很小。第一种情况如图1—3a上的两条曲线，称为零阶接近度，而第二种情况如图1—3b所示，称为一阶接近度。还有更高阶的接近度，例如$\delta y''$、$\delta y'''$…都很小。接近度越高，曲线的接近性越好。

图1—4表示了一般函数$y=y(x)$的增量的线性主部即函数的微分dy和泛函自变量函数的变分δy之间的区别。前者是针对一条曲线$y=y(x)$

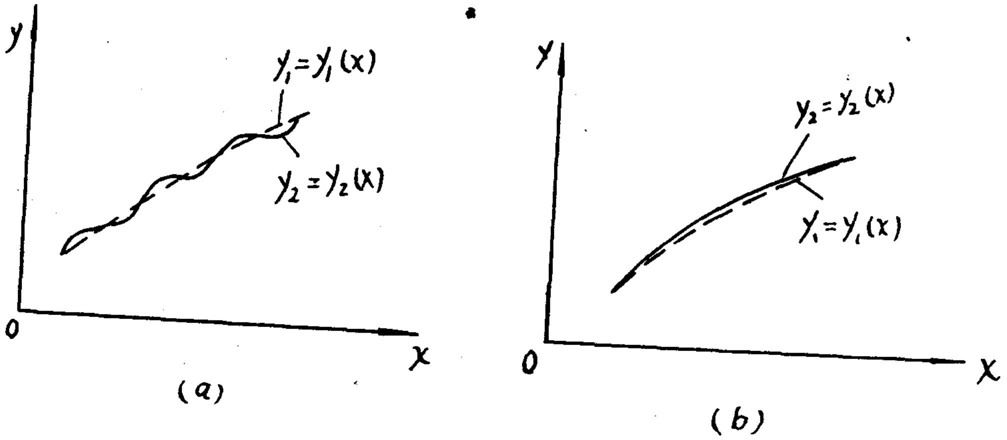

图 1—3　曲线的接近度

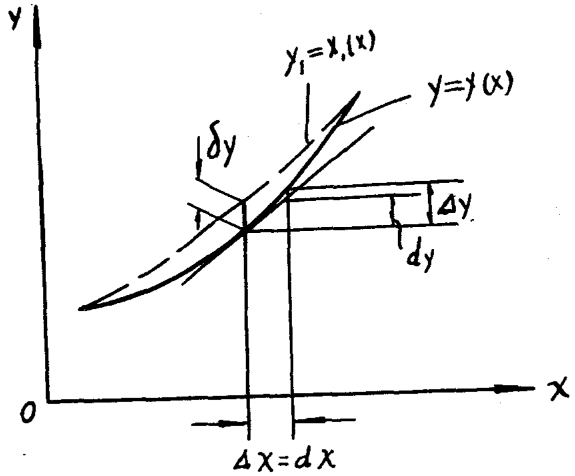

图 1—4　dy 和 δy 的区别

而言，当自变量有增量$\triangle x=dx$时，函数值即纵坐标发生变化的线性主部是dy。但对于后一种情况，是针对两条接近的曲线$y(x)$和$y_1(x)$而言。由于自变量函数$y(x)$变到$y_1(x)$，而发生变分δy，δy是x的函数。

2．泛函的变分

函数的微分有两个定义。其一是通常的定义，即函数的增量

$$\triangle y=y(x+\triangle x)-y(x)$$

可以展开为线性项和非线性项，

$$\triangle y=A(x)\triangle x+\varphi(x,\triangle x)\cdot\triangle x \tag{1—6}$$

其中$A(x)$和$\triangle x$无关，而$\varphi(x,\triangle x)$和$\triangle x$有关，且当$\triangle x\to 0$时，$\varphi(x,$

$\triangle x) \to 0$，于是称 $y(x)$ 是可微的，其线性部分就称为函数的微分，微分是函数增量的线性主部：

$$dy = A(x)\triangle x = y'(x)\triangle x$$

$$\triangle x = dx$$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$A(x) = y'(x)$ 是函数 $y(x)$ 的导数

函数微分还有另外一个定义，即：函数 $y(x)$ 在 x 处的微分也等于 $y(x+\varepsilon\triangle x)$ 对 ε 的导数在 $\varepsilon=0$ 时的值。

设 ε 为小参数，并将 $y(x+\varepsilon\triangle x)$ 对 ε 求导，得到：

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} y(x+\varepsilon\triangle x) = y'(x+\varepsilon\triangle x)\triangle x$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，有

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} y(x+\varepsilon\triangle x)\Big|_{\varepsilon\to 0} = y'(x)\triangle x = dy(x) \qquad (1-7)$$

这就是函数微分的第二种定义。

泛函的变分也有类似的两个定义。第一种定义是：对于 $y(x)$ 的变分 $\delta y(x)$ 所引起的泛函的增量，定义为

$$\triangle\phi = \phi[y(x)+\delta y(x)] - \phi[y(x)]$$

它可以展开为线性的泛函项和非线性的泛函项

$$\triangle\phi = L[y(x), \delta y(x)] + \psi[y(x), \delta y(x)]\cdot max|\delta y(x)| \qquad (1-8)$$

其中 $L[y(x), \delta y(x)]$ 是线性泛函项，而 $\psi[y(x), \delta y(x)]$。$max|\delta y(x)|$ 是非线性泛函项，当 $\delta y(x) \to 0$ 时，有 $max|\delta y(x)| \to 0$，$\psi[y(x), \delta y(x)] \to 0$。这样上式中泛函增量对于 $\delta y(x)$ 来说是线性的那一部分，即 $L[y(x), \delta y(x)]$ 就叫做泛函的变分，用 $\delta\phi$ 表示：

$$\delta\phi = L[y(x), \delta y(x)] \qquad (1-9)$$

所以，泛函的变分是泛函增量的主部。这个主部对于变分 $\delta y(x)$ 来说是线性的。

与函数的微分相对应，泛函的另一个定义是由拉格朗日给出的下述定

义：泛函的变分是 $\phi[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]$ 对 ε 的导数在 $\varepsilon=0$ 时的值。

$$\begin{aligned}\phi[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]&=\phi[y(x)]+\triangle\phi=\phi[y(x)]\\&+L[y(x),\ \varepsilon\delta y(x)]\\&+\psi[y(x),\ \varepsilon\delta y(x)]\cdot\varepsilon\cdot\max|\delta y(x)|\end{aligned}$$

因为 $L[y(x),\ \varepsilon\delta y(x)]=\varepsilon L[y(x),\ \delta y(x)]$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\phi[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]&=L[y(x),\ \delta y(x)]+\psi[y(x),\\&\varepsilon\delta y(x)]\max|\delta y(x)|+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\{\psi[y(x),\\&\varepsilon\delta y(x)]\}\max|\delta y(x)|\end{aligned}$$

当 $\varepsilon\to0$ 时，

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\phi[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]\Big|_{\varepsilon\to0}=L[y(x),\ \delta y(x)]$$

这就证明了拉格朗日的泛函变分的定义

$$\delta\phi=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\phi[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]\Big|_{\varepsilon\to0}\tag{1-10}$$

例：求最简单的泛函 $\phi[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\ y,\ y')dx$ 的变分。

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\phi[y+\varepsilon\delta y]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(x,\ y+\varepsilon\delta y,\ y'+\varepsilon\delta y')dx$$

令 $y+\varepsilon\delta y=u_1$，$y'+\varepsilon\delta y'=u_2$，

则

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\phi[y+\varepsilon\delta y]=\int_{x_0}^{x_1}&[\frac{\partial}{\partial u_1}F(x,y+\varepsilon\delta y,y'+\varepsilon\delta y')\delta y\\&+\frac{\partial}{\partial u_2}F(x,y+\varepsilon\delta y,\ y'+\varepsilon\delta y')\delta y']dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\phi[y+\varepsilon\delta y]\Big|_{\varepsilon\to0}=\int_{x_0}^{x_1}&[\frac{\partial}{\partial y}F(x,\ y,\ y')\delta y\\&+\frac{\partial}{\partial y'}F(x,\ y,\ y')\delta y']dx\end{aligned}$$

因而

$$\delta\phi=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]dx \tag{1-11}$$

所以，泛函的 变分既然是泛函增量的主要线性部分，所以求泛函增量主部的过程与求微分的过程是非常相似的，微分的运算法则同样也适用于变分运算。

例如，借助微分运算的法则，可以求出二阶变分：

$$\delta^2\phi=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\delta^2 y+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\delta y\delta y'+\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2}\delta^2 y'\right]dx \tag{1-12}$$

对于多自变量函数的泛函，也可以借助多元函数的微分法则求出其变分。

下面说明变分运算中的几个问题：

① 变分记号可以由积分号外移到积分号内，例如

$$\delta\phi=\delta\int_{x_0}^{x_1}F(x, y, y')dx=\int_{x_0}^{x_1}\delta F(x, y, y')dx \tag{1-13}$$

这可以用下述简单的泛函来说明。

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}y\,dx=\int_{x_0}^{x_1}\delta y\,dx \tag{1-14}$$

如图 1—5，式（1—14）左边表示曲线 $y_1(x)$和$y(x)$之下面积的差，而右

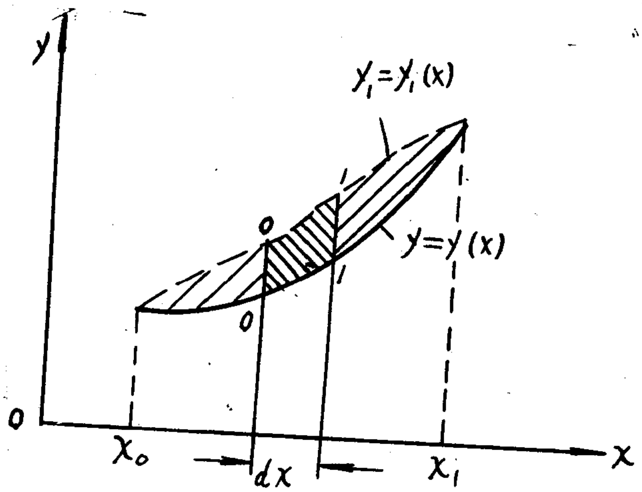

图 1—5 变分和微分符号的互换

边是两函数值之差与自变量 x 的微分 dx 的乘积再求和，它们都是表示两曲线之间的阴影部分的面积。

② 在同时进行微分、求导、变分运算时，运算的次序可以调换。例

$$\delta(dy)=d(\delta y) \tag{1-15}$$

或

$$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d(\delta y)}{dx} \tag{1-16}$$

仍如图 1—5，因为

$$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dy_1}{dx}-\frac{dy_0}{dx}=\frac{(y_{11}-y_{10})-(y_{01}-y_{00})}{dx}$$

$$=\frac{(y_{11}-y_{01})-(y_{10}-y_{00})}{dx}=\frac{d(\delta y)}{dx}$$

（第一下标表示曲线号，第二下标表示点号）。

这表明自变量函数曲线 $y_0=y_0(x)$，$y_1=y_1(x)$ 对应点斜率之差等于这两函数之差对 x 的变化率。

第三节 泛函极值的条件

如果函数 $y(x)$ 在 $x=x_0$ 的附近的任意点上的值都不大于（小于）$y(x_0)$，即 $dy=y(x)-y(x_0)\leqq 0$（$\geqq 0$），则称函数 $y(x)$ 在 $x=x_0$ 上达到极大（极小），且在 $x=x_0$ 上有

$$dy=0$$

因此函数极值的条件可以归纳成：

如果 $\left.\begin{array}{l} dy=0 \\ d^2y>0 \end{array}\right\}$ 函数取极小值。

如果 $\left.\begin{array}{l} dy=0 \\ d^2y<0 \end{array}\right\}$ 函数取极大值。

对于泛函 $\phi[y(x)]$ 而言，也有相类似的定义。

如果泛函 $\phi[y(x)]$ 在任何一条与 $y_0=y_0(x)$ 接近的曲线上的值不大于（小于）$\phi[y_0(x)]$，即如果 $\delta\phi=\phi[y(x)]-\phi[y_0(x)]\leqq 0$（$\geqq 0$）时，则称泛函 $\phi[y(x)]$ 在曲线 $y_0=y_0(x)$ 上达到极大（极小）值，而且

$$\delta\phi=0 \qquad (1-17)$$

所以，如果

$$\left.\begin{array}{l}\delta\phi=0\\ \delta^2\phi>0\end{array}\right\}\text{泛函取极小值。}$$

$$\left.\begin{array}{l}\delta\phi=0\\ \delta^2\phi<0\end{array}\right\}\text{泛函取极大值。}$$

对于实际问题，极大或极小往往由问题本身即可确定，无需求出$\delta^2\phi$。

第四节　变分法的基本预备定理和欧拉方程

我们来研究最简单的泛函

$$\phi[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx \qquad (1-18)$$

两个端点$A(x_0,y_0)$、$B(x_1,y_1)$是固定的。这个泛函的变分为：

$$\delta\phi=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]dx$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]dx$$

根据式1—16，有

$$\delta\phi=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d(\delta y)}{dx}\right]dx$$

对被积函数的第二项作分部积分，则

1

$$\delta\phi=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\right]dx$$

将被积函数的第二项积出，得到

$$\delta\phi=\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dydx$$

根据端点固定的条件，

$$\delta y(x_0)=\delta y(x_1)=0$$

并考虑到极值条件 1—17，则有

$$\delta\phi=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\,dx=0 \qquad (1-19)$$

为使泛函 ϕ 的极值条件 1—19 进一步简化，引用如下的基本预备定理：

基本预备定理：如果函数 $F(x)$ 在线段 (x_0, x_1) 上连续，且对于只满足某些一般条件的任取函数 $\delta y(x)$ 存在

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\delta y(x)dx=0 \qquad (1-20)$$

则在线段 (x_0, x_1) 上就有 $F(x)=0$

任取 $\delta y(x)$ 的一般条件为：1）一阶或若干阶可微；2）在线段 (x_0, x_1) 的端点处为零；3）$|\delta y(x)|<\varepsilon$ 或 $|\delta y(x)|<\varepsilon$ 及 $|\delta y'(x)|<\varepsilon$。

这个预备定理可以用反证法证明。如图 1—6，假定 $F(x)$ 在线段 $x_0<$

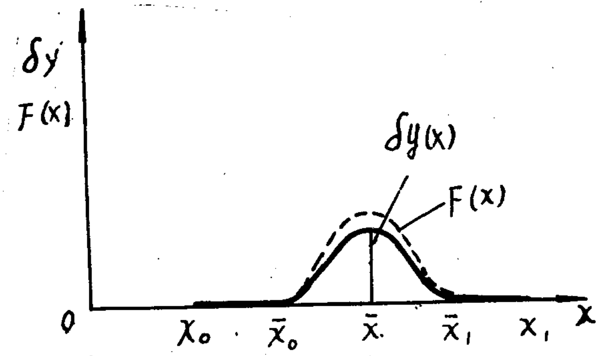

图 1—6 预备定理的证明

$<\bar{x}<x_1$ 上任一点 $x=\bar{x}$ 处不等于零，则由 $F(x)$ 的连续性可知，在 $\bar{x}$ 的邻域 $(\bar{x}_0, \bar{x}_1)$ 内 $F(x)$ 的正负号不变。按上述一般条件任取的 $\delta y(x)$，除去端点 x_0，x_1 处限制等于零外，在其余处可以任取，则在 $x=\bar{x}$ 处可取不变号。这时 $F(x)$，$\delta y(x)$ 在线段 $(\bar{x}_0<\bar{x}<\bar{x}_1)$ 上都不变号，则有

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\delta y(x)dx\neq 0$$

这与定理中的原始条件 1—20 相矛盾，因此 $F(x)$ 在 $x=\bar{x}$ 处一定等于零。但 $x=\bar{x}$ 是在线段 (x_0, x_1) 上任取的，所以 $F(x)$ 在 $x_0\leq x\leq x_1$ 内到处都等于零。