

青年自学丛书

代 数

上海人民出版社

青年自学丛书

代 数

《初等数学》编写组

上海人民出版社

青年自学丛书

代 数

《初等数学》编写组

上海人民出版社出版

(上海绍兴路5号)

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 13.5 字数 298,000

1973年10月第1版 1973年10月第1次印刷

印数: 1—460,000

统一书号: 13171·68 定价: 0.70 元

毛主席语录

自然科学是人们争取自由的一种武装。人们为着要在社会上得到自由，就要用社会科学来了解社会，改造社会进行社会革命。人们为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。

《青年自学丛书》编辑说明

毛主席教导我们：“知识青年到农村去，接受贫下中农的再教育，很有必要。”几年来，成千上万的知识青年，响应毛主席的伟大号召，满怀革命豪情，奔赴祖国的农村和边疆。他们认真读马、列的书，读毛主席的书，积极投入批林整风，朝气蓬勃地战斗在三大革命运动的第一线，坚定地走同工农相结合的道路，对建设社会主义新农村作出了贡献，阶级斗争和路线斗争的觉悟有了很大提高。无产阶级英雄人物不断涌现，一代革命青年正在茁壮成长。这是毛主席革命路线的伟大胜利。

按照毛主席关于“要关怀青年一代的成长”的教导，为了适应广大下乡上山知识青年自学的需要，特编辑、出版这套《青年自学丛书》。丛书以马列主义、毛泽东思想为指导，内容包括哲学、社会科学、自然科学的一些基本知识和鲁迅作品选。我们希望，这套丛书的出版，能对下乡上山知识青年的学习起积极作用，有助于他们进一步提高路线斗争觉悟、政治理论水平和文化科学水平，在又红又专的道路上阔步前进，更好地适应建设社会主义新农村和各项事业发展的需要。

我们对大力支持这套丛书的出版工作的有关单位和作者，表示衷心的感谢，并欢迎广大读者对这套丛书提出意见和批评，以便改进。

上海人民出版社

一九七三年四月

编 者 的 话

为了帮助广大知识青年学习初等数学知识，我们编写了《代数》与《几何》这两本书。

《代数》包括代数方程、指数、对数、三角函数等知识，同时也介绍了数列、排列组合、复数等内容。《几何》的前半部分介绍了三角形(包括边角计算)和圆，后半部分则属于平面解析几何的内容。

这两本书是互有联系的，必须配合使用。譬如，可以按照下面的顺序进行自学：先学习《代数》的前四章，再《几何》的前四章，然后《代数》的后五章，最后学习《几何》的后五章。

由于我们的思想水平不高，实践经验又不足，书中一定有许多缺点和错误，请读者批评指正。

《初等数学》编写组

1973年8月

目 录

第一章 代数的初步知识	1
第一节 实数	1
一、整数(1) 二、有理数(3) 三、实数(6) 习题(9)	
第二节 数字运算的基本规则	11
一、用字母代替数(11) 二、乘法与除法(12) 三、加法与减法(15) 四、分数的运算(18) 五、数字运算的基本规则(21)	
小结(24) 习题(25)	
第三节 用字母揭示数量关系	28
一、含有字母的等式(28) 二、等式变形(32) 习题(37)	
第四节 比与比例	38
一、比例式及其变形(38) 二、正比与反比(40) 习题(44)	
第五节 简易方程	45
一、列方程与解方程(45) 二、应用举例(47) 习题(49)	
复习题	51
第二章 代数式	54
第一节 正整数指数幂	54
一、正整数指数幂的概念(54) 二、正整数指数幂的运算规则(55) 小结(58) 习题(59)	
第二节 整式	60
一、整式的概念(60) 二、整式的加减法(61) 三、整式的乘法(63) 四、几个常用的乘法公式(65) 小结(68) 习题(68)	
第三节 分解因式	71
一、提取公因式(71) 二、利用乘法公式(73) 三、配方法(75) 小结(79) 习题(80)	
第四节 分式	81
一、分式的乘除(83) 二、分式的加减(85) 小结(89) 习题(89)	

第五节 根式	92
一、平方根的概念(92) 二、平方根的性质(93) 三、平方根式的运算(96) 四、 n 次方根(100) 小结(102) 习题(102)	
复习题	104
第三章 代数方程与不等式	110
第一节 一次方程组	111
一、方程组的概念(111) 二、方程组的解法(113) 三、一次方程组应用举例(130) 小结(134) 习题(135)	
第二节 一元二次方程	138
一、一元二次方程的解法(139) 二、一元二次方程的根的判别式(146) 三、可以化为二次方程的方程(148) 小结(154) 习题(154)	
第三节 不等式	157
一、不等式的概念(157) 二、不等式的变形(159) 三、不等式的解法(161) 四、含有绝对值的不等式(167) 小结(171) 习题(171)	
复习题	173
第四章 指数与对数	177
第一节 指数	177
一、整数指数(177) 二、分数指数(181) 小结(184) 习题(185)	
第二节 对数	188
一、对数的概念(188) 二、对数的性质及其运算规则(191) 小结(195) 习题(195)	
第三节 常用对数	197
一、首数和尾数(197) 二、常用对数表(199) 三、利用对数进行计算(202) 小结(205) 习题(205)	
第四节 对数的换底公式	206
一、换底公式(206) 二、自然对数(208) 小结(210) 习题(210)	
复习题	211
第五章 三角比	214
第一节 平面直角坐标系 角的概念的推广	214

一、平面直角坐标系(216)	二、角的概念的推广(220)	小结
(222)	习题(223)	
第二节 三角比的概念		224
一、定义(224)	二、几点讨论(228)	小结(232) 习题(233)
第三节 三角比的值		234
一、计算公式(234)	二、举例(238)	小结(240) 习题(240)
第四节 由三角比求对应角		241
一、由三角比求对应角(241)	二、三角比的对应角的表示法	
(247)	小结(249)	习题(250)
复习题		251
第六章 三角恒等式		253
第一节 同角三角比的关系		254
小结(257)	习题(257)	
第二节 和差公式		258
一、两角差的余弦公式(258)	二、和差公式(260)	小结(264)
习题(265)		
第三节 倍角公式与半角公式		266
一、倍角公式(266)	二、半角公式(270)	小结(273)
习题(273)		
第四节 积化和差与和差化积		274
一、积化和差公式(274)	二、和差化积公式(275)	习题(277)
第五节 简单的三角方程		278
一、最简单的三角方程(278)	二、一些简单的三角方程的解	
法(280)	习题(284)	
复习题		285
附表 三角公式		286
第七章 初等函数		287
第一节 函数的概念		287
一、函数的概念(287)	二、函数的表示(289)	习题(291)
第二节 幂函数		293
一、正比例函数 $y=kx$ (293)	二、反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ (295)	三、函
数 $y=ax^2$ (297)	四、幂函数(298)	习题(300)

第三节 指数函数与对数函数	303
一、指数函数(303) 二、对数函数(304) 习题(306)	
第四节 三角函数与反三角函数	307
一、三角函数(307) 二、反三角函数(315) 习题(318)	
复习题	320
第八章 数列 排列与组合	322
第一节 数列	322
一、数列的概念(322) 二、等差数列(323) 三、等比数列(328) 小结(331) 习题(332)	
第二节 排列与组合	333
一、排列(333) 二、组合(338) 小结(343) 习题(344)	
第三节 数学归纳法和二项式定理	345
一、数学归纳法(345) 二、二项式定理(348) 小结(351) 习题(352)	
复习题	352
第九章 复数	355
第一节 复数及其表示	355
一、复数的概念(355) 二、复数的模与幅角(357) 小结(361) 习题(362)	
第二节 复数的运算	363
一、复数的四则运算(363) 二、复数的乘法公式和除法公式(366) 三、复数的乘方公式和开方公式(368) 小结(372) 习题(373)	
第三节 复数在电工学中的应用	374
一、正弦波的迭加(374) 二、电流定律的复数形式(378) 小结(382) 习题(382)	
复习题	383

第一章 代数的初步知识

数,可以分为正数与负数,也可以分为整数、分数与小数,而小数又有有限小数与无限小数的区别。那末,各种数有些什么特征,它们之间又有何种联系? 这些是第一节实数中所要讨论的问题。

我们知道,一个数加上一个正数就增大了,减去一个正数就变小了,但是,在有了负数以后,加可能变小,减也可能增大,那末,加与减有些什么关系? 同样地,乘与除又有些什么关系? 另外,各种数都有自己的计算方法,而数字运算有些什么基本规律? 所有这些问题是第二节数字运算的基本规则中所要讨论的内容。

在这个基础上,我们把物理模型译成数学语言,列出含有字母的式子,根据数字运算规则进行推理与演算,以达到为三大革命实践服务的目的。这些构成了其后三节的内容。

这样,通过本章的学习,对于用代数方法解决问题就有初步的了解,同时,本章的内容也为今后的学习做一些必要的准备。

第一节 实 数

一、整 数

在社会实践人们最早认识的数是正整数(自然数)。正

— | —

整数按其大小的顺序排列为

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

对于这些数我们能够进行加和乘的运算,例如,

$$2+3=5$$

表示 2 与 3 之和等于 5,

$$2 \times 3 = 6$$

表示 2 的 3 倍等于 6. 特别, 一个数乘以 1 仍是这个数本身.

自然界中一切现象都充满着矛盾, 上与下、增与减、收入与支出、未来与过去, 都是矛盾着的双方, 它们相反而又相成. 就数量侧面来说, 要表示这些矛盾着的现象, 不仅要区分绝对数量的多少, 还要辨别意义的正反. 例如, 某一天的最高温度是零上 4 度, 最低温度是零下 4 度. 就绝对数量来说都是 4 度, 而意义有零上与零下的不同. 如何用数来描述这些意义相反的量呢? 为此, 我们首先区分它们的意义, 选定其中一种为正, 如零度以上、增加、收入等看做是正的; 而与它们相反的, 如零度以下、减少、支出等看做是负的. 正的量的前面添上正号“+”, 负的量的前面附以负号“-”. 这样, 零上 4 度用 +4 表示, 零下 4 度用 -4 表示. 为简便起见, 通常省掉正数前面的符号, 直接地把 +4 记成 4. 这样, 我们又认识了负整数.

零, 不是正数也不是负数, 而是正数与负数的界限, 用记号 0 表示. 一个数加零不影响这个数. 例如, 从零度开始增加 4 度达到零上 4 度, 用加法表示为

$$0+4=4.$$

但是零也有它的确切涵义, 例如摄氏零度, 在通常情况下, 表示水结成冰的一个确定的温度.

对于我们已经提到的数来说, 一个数不仅有绝对值的大

小,还有符号的正负.例如,3与5的符号全为正,而绝对值有大小的区分,前者为3,后者为5.再如,3与-3的绝对值都是3,而符号有正负的差别,前者为正,后者为负.至于0,它没有正负之分,绝对值也就是0.

正整数、零、负整数的全体称为整数.整数按其大小顺序排列为

$\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$.

这样,我们已把数的范围从正整数扩充到了整数.

为了直观地了解整数,按相等的距离依次地把它布置在一根直线上.图1-1是这种布置的示意图.从图中看出:

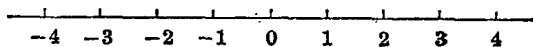


图 1-1

(1) 正数的对应点在零点的右侧,负数的对应点在零点的左侧;

(2) -3与+3的对应点分布在零的左右两侧,这两点和零点的距离都是3个单位距离;

(3) 在这根直线上,任意一点所对应的数,总是大于它左侧的点所对应的数.例如

1 大于 -2,
3 大于 2,
-2 大于 -3.

换句话说,正数大于负数;对于正数来说,绝对值大的数较大;对于负数来说,绝对值大的数反而较小.

二、有 理 数

有了整数还不能满足描述客观事物数量侧面的实际需

要。例如，我国人口约占世界人口的四分之一。这句话的意思是说，如果把世界人口等分为四份，那末我国人口相当于这

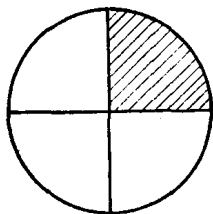


图 1-2

四份中的一份，这里我们把世界人口作为比较单位看做是1，中国人口约是这个比较单位的“四分之一”(图 1-2)。

再如，“一段钢材长为三分之二米”。这个意思是说，这段钢材之长是一米的三分之二，如果把一米三等分，这段钢材之长相当于其中的二份之长(图 1-3)。

“四分之一”、“三分之二”都是不同于整数的另一种数，

分别记为 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{3}$ 。

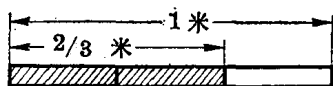


图 1-3

对比较对象进行等分，表示其中一份或几份的数称为分数。分数通常表示为

$$\frac{\text{分子}}{\text{分母}},$$

其中分子分母都是整数，而分母不可以为零。

等分就是除的意思，分数的记号“ $\frac{\quad}{\quad}$ ”与除法的记号“ $\div$ ”是一个意思，所以

$$\frac{\text{分子}}{\text{分母}} = \text{分子} \div \text{分母}.$$

整数可以看作分母是1的分数。

分母为100的分数通常称为百分数，如 $\frac{90}{100}$ ， $\frac{18}{100}$ 等都是百分数。习惯上把 $\frac{90}{100}$ 记为 90%， $\frac{18}{100}$ 记为 18%，其中“%”是百分数的记号。

根据分数的涵义，四份中的一份与八份中的两份是相等

的,一百份中的五十份与两份中的一份也是相等的,所以

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8},$$

$$\frac{50}{100} = \frac{1}{2},$$

这个结果有普遍意义,可以概括出分数的基本性质:

分子分母同乘或同除以一个不为零的数,这个分数的值不变.

把一个分数化为更为简单的形式的运算称为约分. $\frac{18}{24}$ 约分为 $\frac{3}{4}$, $\frac{50}{100}$ 约分为 $\frac{1}{2}$. $\frac{3}{4}$ 与 $\frac{1}{2}$ 都是不能再行约分的分数,是最简分数.

现在来比较两分数的大小.

我们知道,三份中的两份多于三份中的一份,所以

$$\frac{2}{3} \text{ 大于 } \frac{1}{3}.$$

这说明,同分母的两分数,分子大的大于分子小的.

如何比较异分母的两分数的大小呢? 如

$$\frac{3}{5} \text{ 与 } \frac{4}{7}$$

哪一个大呢?

把 $\frac{3}{5}$ 的分母扩大到七倍, $\frac{4}{7}$ 的分母扩大到五倍,得公分母 $5 \times 7 = 35$, 根据分数的基本性质,

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{21}{35},$$

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \times 5}{7 \times 5} = \frac{20}{35}.$$

$\frac{21}{35}$ 与 $\frac{20}{35}$ 是同分母的两分数, $\frac{21}{35}$ 大于 $\frac{20}{35}$, 所以 $\frac{3}{5}$ 大于 $\frac{4}{7}$.

把异分母的分数化为同分母的分数的运算称为通分. 经过通分, 比较分数大小的问题就解决了.

最后讨论分数值的计算问题.

已经知道, $\frac{\text{分子}}{\text{分母}} = \text{分子} \div \text{分母}$, 于是

$$\frac{3}{2} = 1.5,$$

$$\frac{25}{100} = 0.25,$$

$$\frac{1}{3} = 0.333\cdots,$$

所以一个分数或者表示为一个有限小数 (如 $\frac{3}{2} = 1.5$, $\frac{25}{100} = 0.25$), 或者表示为循环小数 (如 $\frac{1}{3} = 0.333\cdots$).

整数与分数合称为有理数. 所以, 有理数是由整数、有限小数与循环小数所组成.

三、实 数

随着社会实践的不断发展, 人们对数的认识也不断深化, 这里我们从平方与开平方的问题说起.

我们知道, 一个正方形的面积等于它的边长的自乘, 如果一个正方形的边长是 3 米 (图 1-4), 那末这个正方形的面积应该是

$$3 \times 3 = 9 \text{ (平方米)}.$$

两个 3 的连乘称为 3 的平方, 记为 3^2 , 3 的平方等于 9, 即 $3^2 = 9$.

现在来讨论相反的问题, 即开平方的问题.

已知一个正方形的面积等于 9，求这个正方形的边长。改用数字来叙述这个问题，也就是要求一个正数，使这个数的平方为 9。

由于 $3^2=9$ ，所以 3 是所求的数。这个所求的正数 3 称为正数 9 的算术平方根，记为 $\sqrt{9}$ ，即 $\sqrt{9}=3$ 。

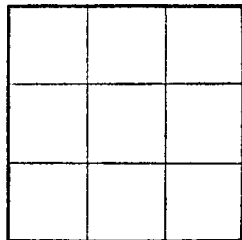


图 1-4

求算术平方根的运算通常称为开平方。3 的平方为 9，9 的算术平方根为 3。平方与开平方互为逆运算。

由于 $3^2=9$ ， $30^2=900$ ， $0.3^2=0.09$ ，所以

$$\sqrt{9}=3, \sqrt{900}=30, \sqrt{0.09}=0.3.$$

改写这几个结果，

$$\sqrt{900}=30 \text{ 记为 } \sqrt{9 \times 100}=3 \times 10,$$

$$\sqrt{0.09}=0.3 \text{ 记为 } \sqrt{9 \times 0.01}=3 \times 0.1.$$

从中发现开平方运算的一条性质：

一个数乘上 100 后的算术平方根等于这个数的算术平方根乘以 10；

一个数乘上 0.01 后的算术平方根等于这个数的算术平方根乘以 0.1。

上面我们所列举的 9，900，0.09 都是已知数的平方，所以它们的开方问题随手可解。一般情形下就不那末容易了。例如什么数的平方是 2，哪个数的平方为 3，即

$$\sqrt{2}=? \quad \sqrt{3}=?$$

就不是一个简单的问题。因为这个问题常常遇到，已经有人把一些数的算术平方根列成表——《平方根表》。有表可查，这个问题也就大致地解决了。