经济类课程提高与应试丛书

微积分
典型题解析及自测试题

★ 涵盖课程重点及难点

★ 精设典型题详解及评注

★ 选配课程考试模拟及全真试卷

（第2版）

主　编　张又林
副主编　周　伦
　　　　许宏伟

Economics

西北工业大学出版社

（陕）新登字 009 号

【内容简介】 本书总共分为三部分。第一部分典型题解析，给出了各章的内容提要；从众多试卷、习题中精选出课程必考内容的典型题并给出了详细解证，同时在题后的评注中给出了解题方法、技巧或易错点；每章后附有适量习题。第二部自测试题，是根据课程要求给出的模拟或全真试题。附录为习题及试题答案。

本书可作为高等学校经济类专业本科、大专学生的课程辅导及应试参考书，也可以作为考研的强化训练指导书。

图书在版编目(CIP)数据

微积分典型题解析及自测试题/张又林主编．—西安：
西北工业大学出版社，2000.8
（经济类课程提高与应试丛书）
ISBN 7-5612-1270-4

Ⅰ．微…　Ⅱ．张…　Ⅲ．微积分-研究生-入学考试-解题
Ⅳ．O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 38614 号

 西北工业大学出版社出版发行
（邮编：710072　西安市友谊西路 127 号　电话：8493844）
全国各地新华书店经销
西安市向阳印刷厂印装
*
开本：850 毫米×1 168 毫米　1/32　印张：13.25　字数：326 千字
2000 年 8 月第 1 版　　2001 年 1 月第 2 版第 2 次印刷
印数：8 001—14 000 册　定价：18.00 元

前　言

微积分、线性代数、概率论与数理统计是现代数学的三大支柱，是经济数学的主要组成部分，是高等学校经济类各专业重要的基础课，是经济学硕士研究生考试必不可少的内容。

在高等学校本科生或报考硕士研究生考生掌握了经济数学主要内容的基础上，为了强化其技能训练，提高其解题技巧和水平，我们根据多年的教学积累和经济类各专业的特点，编写了“经济类课程提高与应试丛书”之一的《微积分典型题解析及自测试题》一书。

根据经济类数学的大纲要求及考研题的特点，我们精心设计了本套丛书的内容，使得其不仅系统性强，范围广泛而且具有深度。同时注重经济学的背景，突出其特色，尤其是各章的“内容提要”部分，语言精练，重点突出，概括性强，使得读者能够迅速掌握该章的中心内容和基本解题方法。

在这本书的选题上，我们着眼于“典型性”和“全面性”。使得每章所选的例题不仅代表性强，而且能覆盖本章的主要内容。注重由特殊到一般的思维方式，由浅入深地揭示一般规律。同时，我们在一些难题后附加了“评注”，指出其要点和易犯的错误，使得读者能很快地掌握解题技巧，达到举一反三的效果。另外，我们还结合各章的内容，配备了一定量的习题，通过这些与主要内容相呼应的练习，可使读者加强技能，提高解题水平。自测试题是综合性题目，是课程考试的模拟或全真试卷，读者可自行检测自己的整体水平和应试能力。在《概率论与数理统计典型题解析及自测试题》后，我们附加了 1999 年和 2000 年的硕士研究生考题，为报考硕士研究生的读者提供了新的信息和一个全面检测的机会。

本书可作为高等学校经济类各专业本科生的提高与应试参考书，也可作为报考硕士研究生考前强化训练的指导书。

本书的第一至四章由许宏伟编写，第五、六章由张又林编写，第七、八、九章由周伦编写。封平华、陈金兰负责自测题及习题的编写及答案的校验工作。全书由张又林负责统稿和定稿。

西北工业大学徐仲教授、陆全副教授认真审阅了书稿，并提出了宝贵意见，在此谨表感谢！

由于编者水平有限，加之时间仓促，在编写中难免有错漏之处，欢迎广大读者批评指正。

编　　者

2000 年 5 月 22 日

目　录

第一部分　典型题解析

第二部分　自测试题

附录　习题及试题答案

第一部分　典型题解析

第一章　函　　数

一、内 容 提 要

（一）有关函数的基本概念

1. 函数定义

设 D 为一个非空实数集，如果存在一个对应规则 f，使得对于每一个 $x \in D$，都能由 f 惟一地确定一个实数 y，则称对应规则 f 为定义在实数集 D 上的一个函数关系，或称 y 是 x 的函数. 称 x 为自变量，y 为因变量；称 D 为函数 f 的定义域，记为 $D(f)$；y 的全体数值组成的集合，称为函数的值域，记为 $Z(f)$.

对于函数关系的定义，若不加以特别声明，我们所涉及的函数均指单值函数.

2. 简单的经济函数

设 x 为产品的产量（或销售量），有以下函数：

（1）总成本函数　"总成本 = 固定成本 + 可变成本"，总成本函数为

$$C(x) = a + b(x) \quad (a > 0)$$

式中　a—— 固定成本，$b(x)$—— 可变成本函数 .

(2) 总收入函数　“总收入＝销售价格×产量(或销售量)”，总收入函数为

$$R(x) = px$$

(3) 总利润函数　“总利润＝总收入－总成本”，总利润函数为

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

(4) 需求函数　价格上涨，使需求减少；价格下跌，使需求增加；因此需求是关于价格的单调减少函数. 最简单的需求函数为线性函数

$$Q_d = a - bp$$

式中　a, b—— 正常数.

(5) 供给函数　价格上涨，使供给增加；价格下跌，使供给减少. 因此供给是关于价格的单调增加函数. 最简单的供给函数为线性函数

$$Q_s = -c + dp$$

式中　c, d—— 正常数.

3. 反函数的定义

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，其值域为 $Z(f)$. 如果对应于每个 $y \in Z(f)$，都有惟一的对应值 $x \in D(f)$，满足 $y = f(x)$，则 x 是定义在 $Z(f)$ 上以 y 为自变量的函数，记此函数为

$$x = f^{-1}(y), \quad y \in Z(f)$$

并称其为函数 $y = f(x)$ 的反函数.

习惯上常将 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x), x \in Z(f)$；而 $y = f(x)$ 称为直接函数. 直接函数与反函数的关系式为

$$f[f^{-1}(y)] = y, \quad f^{-1}[f(x)] = x$$

注意：(1) 分段函数的反函数应分段求之.

(2) 直接函数的定义域是其反函数的值域；直接函数的值域是其反函数的定义域.

4. 复合函数的定义

已知函数

$$y = f(u) \quad (u \in D(f),\ y \in Z(f))$$
$$u = g(x) \quad (x \in D(g),\ u \in Z(g))$$

如果 $D(f) \cap Z(g)$ 非空，则称函数

$$y = f[g(x)] \quad x \in D(F) = \{x \mid g(x) \in D(f)\})$$

为函数 $f(u)$ 和 $g(x)$ 复合而成的复合函数. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，u 称为中间变量.

如果在方程 $F(x,y) = 0$ 中，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这方程的惟一的 y 值存在，则称方程 $F(x,y) = 0$ 在该区间内确定了一个隐函数，记为

$$y = y(x)$$

由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成，并可用一个数学式子表示的函数称为初等函数.

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数 .

（二）函数的基本性质

1. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加（减少）的；单调增加和单调减少的函数统称单调函数.

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一 $x \in D$

$$f(-x) = f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数. 如果对于任一 $x \in D$

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为奇函数.

3. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个不为零的数 a,使得对于任一 $x\in D$ 有 $(x\pm a)\in D$,且

$$f(x+a)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,a 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们说周期函数的周期是指其最小正周期.

4. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义,如果存在常数 $M>0$,使得对于任意的 $x\in D$,恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界,否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

二、典型题解析

例 1.1 某厂生产某种产品 1 000 t,定价为 130 元/t,当销售量在 700 t 以内时,按原定价出售;超过 700 t 的部分按原定价的九折出售,试将销售总收入表示成销售量的函数.

解 设销售量为 x,总收入为 R.

当 $0\leqslant x\leqslant 700$ 时,$R=130x$;

当 $700<x\leqslant 1\,000$ 时

$$R=130\times 700+(x-700)\times 0.9\times 130$$

于是 $R=\begin{cases}130x & (0\leqslant x\leqslant 700)\\ 91\,000+117(x-700) & (700<x\leqslant 1\,000)\end{cases}$

例 1.2 某商品的定价为 5 元/件,每月可销售出 1 000 件;若每件售价降低 0.01 元,则可多销售 10 件,试将总收入表示为多售出件数的函数.

解 设 x 为多售出的件数，p 为商品的价格，则由题意可知，价格随 x 的变化而变化.

再设需求函数为 $Q_d = a + bp$，则由所给条件得

$$\begin{cases} 1\,000 = a + 5b \\ 1\,010 = a + 4.99b \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} a = 6\,000 \\ b = -1\,000 \end{cases}$$

于是

$$Q_d = 1\,000 + x = 6\,000 - 1\,000p, \quad p = (5\,000 - x)/1\,000$$

从而

$$R = pQ_d = [(5\,000 - x)/1\,000] \times (1\,000 + x) = 5\,000 + 4x - 0.001x^2$$

例 1.3 求 $f(x) = \sqrt{(x - |x|)\sin^2 \pi x}$ 的定义域及值域.

解 $(x - |x|)\sin^2\pi x \geqslant 0$ 成立的条件为 $x \geqslant 0$ 或 $x = -1, -2, \cdots$ 所以

$$D(f) = \{x | x \geqslant 0 \quad \text{或} \quad x = -k \quad (k = 1, 2, \cdots)\}$$

并且

$$Z(f) = \{0\}$$

例 1.4 设 $y = f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求下列函数的定义域.

(1) $f(\sin x)$.　　(2) $f(x + a) + f(x - a)$ $(a > 0)$.

解 (1) 依题意，有 $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$，得

$$D(f) = \bigcup_{k=0,\pm1,\cdots} [2k\pi, (2k+1)\pi]$$

(2) 由 $0 \leqslant x + a \leqslant 1$，得 $-a \leqslant x \leqslant 1 - a$；

由 $0 \leqslant x - a \leqslant 1$，得 $a \leqslant x \leqslant 1 + a$. 从而

$$D(f) = [-a, 1 - a] \cap [a, 1 + a]$$

当 $1 - a \geqslant a$，即 $0 < a \leqslant 1/2$ 时，$D(f) = [a, 1 - a]$；

当 $1 - a < a$，即 $\frac{1}{2} < a$ 时，$D(f) = \varnothing$，此时 f 不是函数关系.

【评注】 在(2)中易忽略对参数 a 的讨论.

例 1.5 设 $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$，$g(x) = \dfrac{1}{x + 1}$，求下列函数的定

义域.

(1) $F(x)=f[g(x)]$.

(2) $G(x)=g[f(x)]$.

解 (1) $F(x)=f[g(x)]=\dfrac{2+2x+x^2}{-2x-x^2}$. 因为

$$D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$$

$$Z(g)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

$$D(f)\cap Z(g)=(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$$

令 $g(x)=-1, g(x)=1$,得 $x=-2, x=0$. 所以

$$D(F)=\{x|x\neq-2,-1,0\}$$

(2) $G(x)=g[f(x)]=\dfrac{x^2-1}{2x^2}$. 因为

$$D(g)=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$$

$$Z(f)=(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)$$

$$D(g)\cap Z(f)=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

令 $f(x)=-1$,得 $x=0$. 所以

$$D(F)=\{x|x\neq-1,0,1\}$$

【评注】 解题时利用 $D(f)\cap Z(g)$ 必定包含于 $Z(g)$ 中的特点,将 $Z(g)$ 中不属于 $D(f)\cap Z(g)$ 的相对应的 x 点剔出,再把使 $g(x)$ 无定义的对应点也剔出,从而得到复合函数的定义域. 解题时易错解为只对复合函数的表达式求定义域,而忽略 $D(f)\cap Z(g)$ 的限制,从而漏掉(1)中无定义点 $x=-1$ 和(2)中无定义点 $x=\pm1$.

例 1.6 设

$$f(x)=\begin{cases}1 & (|x|\leqslant1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}2-x^2 & (|x|\leqslant2)\\ 2 & (|x|>2)\end{cases}$$

求 $f[g(x)]$.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}1 & (|g(x)|\leqslant1)\\ 0 & (|g(x)|>1)\end{cases}$,对于 $|g(x)|\leqslant1$,由

$$\{x||2-x^2|\leqslant1\}\cap\{x||x|\leqslant2\}$$

得 $$x\in[-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3}]$$

对于 $|g(x)|>1$，由

$$D_1=\{x\,|\,|2-x^2|>1\}\cap\{x\,|\,|x|\leqslant 2\}$$

及

$$D_2=\{x\,|\,|2-x^2|>1\}\cap\{x\,|\,|x|>2\}$$

得

$$\begin{aligned}x\in D_1\cup D_2=&\{[-2,-\sqrt{3})\cup(-1,1)\cup(\sqrt{3},2]\}\cup\\&\{(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)\}=\\&(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-1,1)\cup(\sqrt{3},+\infty)\end{aligned}$$

于是

$$f[g(x)]=\begin{cases}1 & (x\in[-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3}])\\0 & (x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup\\ & \quad(-1,1)\cup(\sqrt{3},+\infty))\end{cases}$$

【评注】 用两分段函数构造复合函数时，应把中间变量各分段部分依次“代入”到另一函数各分段部分自变量的位置，然后考察各分段部分的定义域. 解题中易简单地将 $u=g(x)$ 代入 $f(u)$ 中，只考虑对应分段上 x 的取值范围，而忽略 $g(x)$ 各分段上对 x 的要求，从而导致错误的结论.

例 1.7 设 $f(x)=c$（c 是常数），$g(x)$ 取怎样的函数可使 $f[g(x)]=g[f(x)]$ 成立？

解 只要取 $g(x)=x$ 即可. 因为

$$f[g(x)]=f(x)=c,\quad g[f(x)]=g(c)=c$$

所以

$$f[g(x)]=g[f(x)]$$

例 1.8 设 $y=f(x)=\begin{cases}1+x & (x<2)\\x^2-1 & (x\geqslant 2)\end{cases}$，求 $f^{-1}(x)$.

解 当 $x<2$ 时，由 $y=1+x$ 得，$x=y-1(y<3)$

当 $x\geqslant 2$ 时，由 $y=x^2-1$ 得，$x=\sqrt{y+1}(y\geqslant 3)$

交换字母得

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x-1 & (x<3)\\\sqrt{x+1} & (x\geqslant 3)\end{cases}$$

【评注】 分段函数的反函数必须逐段求得.

例 1.9 证明:定义在对称区间$(-1,1)$上的任意函数$f(x)$可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

证 $f(x)=f(x)/2+f(x)/2+f(-x)/2-f(-x)/2=$

$$[f(x)+f(-x)]/2+[f(x)-f(-x)]/2=$$

$$F(x)+G(x)$$

因为

$$F(-x)=[f(-x)+f(x)]/2=$$

$$[f(x)+f(-x)]/2=F(x)$$

$$G(-x)=[f(-x)-f(x)]/2=$$

$$-[f(x)-f(-x)]/2=-G(x)$$

所以结论成立.

例 1.10 设$g(x),f(x),h(x)$为单调增函数.证明:若$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,则

$$g[g(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant h[h(x)]$$

证 设x_0为三个函数公共定义域内任意一点,则

$$g(x_0)\leqslant f(x_0)\leqslant h(x_0)$$

由三个函数的单调性得

$$g[g(x_0)]\leqslant f[g(x_0)]\leqslant f[f(x_0)]$$

$$f[f(x_0)]\leqslant h[f(x_0)]\leqslant h[h(x_0)]$$

即

$$g[g(x_0)]\leqslant f[f(x_0)]\leqslant h[h(x_0)]$$

由x_0的任意性可知

$$g[g(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant h[h(x)]$$

必定成立.

例 1.11 设$f(x)$为奇函数,$f(1)=a$,且$f(x+2)-f(x)=f(2)$.

(1) 试用a表示$f(2)$与$f(5)$.

(2) 问a取何值时,$f(x)$以2为周期.

解 (1) 因为$f(x+2)-f(x)=f(2)$,所以

$$f(2)=f(-1+2)-f(-1)=f(1)-f(-1)=$$
$$f(1)+f(1)=2f(1)=2\alpha$$

因为 $f(x+2)=f(x)+f(2)$,所以

$$f(5)=f(3)+f(2)=$$
$$f(1)+f(2)+f(2)=\alpha+4\alpha=5\alpha$$

(2) 欲使 $f(x)$ 以 2 为周期,须对于任一 x 有

$$f(x+2)=f(x)$$

故有 $$f(x+2)-f(x)=f(2)=2\alpha=0$$

即 $\alpha=0$.

三、习　　题

1. 求 $f(x)=\sqrt{\lg(\frac{5x-x^2}{4})}$ 的定义域.

2. 设 $f(x+1)=\begin{cases}x^2 & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ 2x & (1<x\leqslant 2)\end{cases}$,求 $f(x)$.

3. 设 $f(x-\frac{1}{x})=\frac{x^3-x}{x^4+1}\quad(x\neq 0)$,求 $f(x)$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1 & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$,求 $f(x-1)$,$f(x^2-1)$.

5. 设 $g(x)$ 与 $f(x)$ 互为反函数,求 $f^{-1}(\frac{1}{2}x)$.

6. 设 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$,求 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$,并指出其定义域.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}g(x) & (-1\leqslant x<0)\\ \sqrt{x-x^2} & (0\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$. 求 $g(x)$ 使 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是奇函数.

8. 证明:若 $f(x+a)=-f(x)\ (a>0)$,则 $f(x)$ 是周期为 $2a$ 的周期函数.

第二章　函数的极限与函数的连续性

一、内 容 提 要

（一）数列的极限

1. 数列极限的定义

设有数列$\{X_n\}$和常数A. 如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$,总存在正整数N,使得当$n > N$时,有不等式$|X_n - A| < \varepsilon$恒成立,则称常数A为数列$\{X_n\}$的极限. 记为

$$\lim_{n\to\infty} X_n = A \quad \text{或} \quad X_n \to A(n \to \infty)$$

2. 收敛数列的性质

(1) 惟一性　收敛的数列$\{X_n\}$收敛于惟一极限.

(2) 有界性　如果数列$\{X_n\}$收敛,则它必定有界.

(3) 有序性　若$X_n \to A\ (n \to \infty)$,$Y_n \to B\ (n \to \infty)$,且$A > B$,则必存在正整数$N$,当$n > N$时,有$X_n > Y_n$.

3. 数列极限的运算规则

若$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = A$,$\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = B$,则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\{X_n \pm Y_n\} = \lim\limits_{n\to\infty} X_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} Y_n = A \pm B$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\{X_n \cdot Y_n\} = \lim\limits_{n\to\infty} X_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} Y_n = A \cdot B$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\{\dfrac{X_n}{Y_n}\} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} X_n}{\lim\limits_{n\to\infty} Y_n} = \dfrac{A}{B}\quad (B \neq 0)$.

4. 数列极限的存在准则

(1) 夹逼准则　若$X_n \leqslant Y_n \leqslant Z_n$,且$X_n \to A\ (n \to \infty)$,