运筹学

运筹学

刁在筠　郑汉鼎　刘家壮　刘桂真

44

高等教育出版社

等教育出版社

3276120 3

O22
44

高等学校试用教材

运筹学

刁在筠 郑汉鼎
刘家壮 刘桂真 编

高等教育出版社

(京)112号

本书是根据国家教委全国高等学校数学与力学教学指导委员会应用数学专业教材建设组拟定的“运筹学”课程基本要求编写的。全书内容适合应用数学专业的特点和要求，同时兼顾了管理、系统工程等专业的要求。全书分9章，讲授基本内容约需72学时。

图书在版编目（CIP）数据

运筹学/刁在筠等编. —北京：高等教育出版社，1996
ISBN 7-04-005796-4

Ⅰ. 运… Ⅱ. 刁… Ⅲ. 运筹学 Ⅳ. 022

中国版本图书馆CIP数据核字（96）第09267号

*

高等教育出版社出版
北京沙滩后街55号
邮政编码：100009 传真：4014048 电话：4054588
新华书店总店北京发行所发行
国防工业出版社印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/16 印张19.75 字数490 000
1996年10月第1版 1996年12月第1次印刷
印数0001－4 966
定价 15.00元

凡购买高等教育出版社的图书，如有缺页、倒页、脱页等
质量问题者，请与当地图书销售部门联系调换

版权所有，不得翻印

序

“运筹学”是着重实际应用的一门学科．当前不少学者认为：有关专业的大学生和研究生应加强运筹学的理论学习．从近二三十年来国内外，特别是国内运筹学理论和应用曲折发展的过程来看，这种意见是恰当的，也是适时的．为什么说这种意见是恰当的呢？如果不仅仅满足于简单的、直接的应用，而且还要求知其所以然，能够由此及彼、由表及里地灵活应用，那就需要有较强的理论知识了．为什么说这种意见是适时的呢？这不仅是由于当前引进国外先进的科学技术时需要加以消化吸收，还由于这些年来我国各地的科技工作者和教育工作者在运筹学及其相关学科的实际应用和理论研究方面取得了进展，有条件、有需要吸收较多的青年来参加这一工作，更为重要的还在于我国改革开放深入发展的今天，有许多新情况需要研究，有许多新问题需要解决．这就为更广泛的应用运筹学提供了机遇，并为其发展与创新创造了条件．

在此种情况下，把半个多世纪以来国际上在运筹学的理论上取得的主要成就，扼要地加以总结，介绍给青年学生，加强他们在理论方面的学习和训练，就很有必要了．山东大学的几位教授，根据他们多年来在教学和科研方面的一些经验，编写了此本“运筹学”，十分适合当前的需要，特为此序．

谢力同

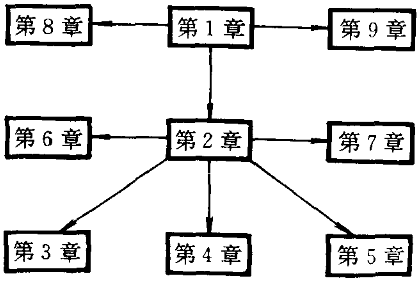
1995 年 11 月

前　言

本书是根据国家教委全国高等学校数学与力学教学指导委员会应用数学专业教材建设组所拟“运筹学”基本要求编写的．本书主要针对大学本科应用数学专业的特点及要求，同时兼顾了管理、系统工程等专业的要求，论述了运筹学各主要分支的模型、基本概念与理论、主要算法和应用．它可以作为这些专业“运筹学”课程的教材，也可以作为相关专业研究生的教材，还可供从事运筹学、管理科学的工作者和工程技术人员作参考书．

本书的特点是：选材精炼；对各主要分支的基本理论和主要方法的原理给出了较为严密的论述；内容上有所侧重和更新，体现了现代运筹学的一些特点．为使读者对本领域的情况有较为全面的了解，以便于今后的发展和提高，本书简单提及了各主要分支的当前发展动向和新成果，并在相关章节介绍了主要算法适用于计算机的流行软件．在各章末尾附有内容适当、数量充分的习题和参考文献，在全书末尾附有供参考的习题答案．

全书共有 9 章，其中带“ * ”号的内容是供读者自学或选学的材料，可以略过不读，不影响后续章节内容的学习．讲授全书的基本内容需 72 学时．由于各章内容有相对的独立性，讲授者在使用本教材时可根据专业要求对内容作适当的增减，因此也可作为学时更多或更少的“运筹学”课程的教材．为方便读者阅读，下面的示意图给出了各章内容的相关性．



本书由刁在筠（第 2，3，4 章）、郑汉鼎（第 5，7，9 章）、刘家壮（第 1，6 章）、刘桂真（第 8 章）编写，并由郑汉鼎完成全书书稿的统稿工作．在编写过程中，应用数学专业教材建设组运筹学责任委员胡毓达教授、俞文魮教授、王荫清教授给予了我们热情的帮助和指导；复旦大学陈开明教授、华东师范大学郑英元教授认真、仔细地审阅了全文，并提出了宝贵的修改意见；全国高校应用数学专业教材建设组的各位专家及众多运筹学界的同志们对书稿的内容提出了很多好的和积极的建议；高等教育出版社的责任编辑胡乃冏对全部手稿完成了繁重、细致的编辑、排版工作；山东大学运筹学专业的数位研究生仔细地抄写了全文．在此，我们一并表示深切的

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

谢意.

由于水平有限，书中难免有不足和错误之处，恳切希望得到运筹学界同志及读者的批评和指正.

编者

1993 年 11 月完成初稿

1995 年 8 月完成修改稿

目　录

第1章 绪　　论

这一章，首先介绍运筹学的概况，包括运筹学的由来和发展、运筹学的性质与特点、运筹学的主要内容和运筹学的发展趋势. 然后，通过几个例子分别介绍了运筹学中线性规划、随机规划和网络分析的数学模型.

§1.1　运筹学的概况

运筹学是本世纪新兴的学科之一，它在工业、商业、农业、交通运输、政府部门和其他方面都有不同程度的应用. 现在它已经成为经济计划、系统工程、现代管理等领域的强有力的工具.

1.　运筹学的由来和发展

一般说来，运筹学起源于第二次世界大战. 但在这之前已有许多蕴含运筹学思想和方法的书籍和论文出现，例如，原苏联数学家 Л. В. Канторович 的《生产组织与管理中的数学方法》一书(属于运筹学中的规划论)出版于 1939 年；J. Von Neumann 等所著《对策论和经济行为》一书(运筹学中对策论的创始作)成书前所发表的一系列论文在 1928 年就开始刊出；A. K. Erlang 关于用概率论理论来研究电话服务的论文(属于运筹学中的排队论)发表于 1909 年. 因此运筹学的起源还能追溯得更早. 只是西方的运筹研究或“运筹学”这一名词，确实出现在第二次世界大战期间. 以运筹研究命名的 、直接为战争服务的、跨学科的研究小组也是在这一时期才出现的. 最早是在英国皇家空军战斗指挥部管辖下，1938 年出现的名为“(军事)行动的研究”小组，其英文是“Operational Research”，我国译为“运筹研究”或“运筹学”. 继英国的“(军事)行动的研究”小组之后，美国、加拿大等国也组成一些同名小组进行战术评价、战术改进、作战计划、战略选择等方面的研究，同时也包括如何改进后勤调度和训练计划等方面的研究. 这些研究，由于综合地运用了科学方法和技术，纠正了人们一些直观想象的错误，解决了当时战争中提出的一些新问题，从而引起人们对运筹研究的重视。据统计，战时同盟国参加(军事)运筹研究的科学工作者超过了 700 人.

第二次世界大战后，美国等国家的军方仍保留一些运筹研究小组，其他多数人转向把运筹学研究用于和平时期的工商业，因此美、德等国家的运筹学得以蓬勃发展，出现了应用研究和理论研究相互促进的局面. 从应用方面来讲，在工商业管理中的应用是主要的，特别是在美国，管理科学方面的主要内容便是运筹学. 随着工商业规模日益扩大，在历来缺乏严格的科学理论指导，主要凭经验的管理工作中，组织跨学科的专业人员组成研究集体，并引进科学的研究方法，这一做法为工商业带来了新的生机和活力. 因此在一些大公司和企业，纷纷建立起一些运筹小组，后来还出现了一些专门提供咨询服务的研究机构. 在一些国家的政府部门中，除军事方面外，民用部门也建立了许多运筹研究小组 . 例如，英国国家煤炭局所辖的运筹研究组在 1947 年煤炭工业国有化后不久就成立了，该组成员 1956 年有 37 人，1978 年就超过了 100 人.

德士古石油公司在德国汉堡的一个分支机构的运筹研究小组也有数十名成员等等. 从学校教育方面来说，许多大学理学院的数学系及工学院、管理学院、经济学院的许多系中都开设运筹学课程. 在美国，50 年代就有大学设立运筹学系. 近年来，许多西方国家设立了经济与运筹学系或计算机与运筹学系，并设有攻读硕士和博士学位的计划. 据 1973 年的不完全统计，单是在美国就有四十多所大学开设运筹学课程. 事实上，美国的管理人员与运筹专业人员的教育在许多方面是一致的. 从科学发展来说，在运筹研究或运筹学这一名称下发展起来的分支学科就很多，如规划论(包含线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、多目标规划等)、网络分析、排队论、对策论、决策论、存储论、可靠性理论、模型论、投入产出分析等等. 从学会方面来说，最早的是美国的运筹学会，成立于 1952 年. 以后世界上许多国家也都逐步成立了运筹学会，并于 1959 年成立了国际运筹学会联盟，至今已有三十多个国家和地区的学会参加. 该会的一个主要出版物为《运筹国际文摘》，该文摘对各国二十几种运筹专刊和近五十种有关期刊中关于运筹学的理论和应用进行评述. 我国的运筹学会成立于 1980 年，《运筹学杂志》创刊于 1982 年.

2. 运筹学的性质与特点

当人们把战时的运筹研究取得成功的经验在和平时期加以推广应用时，面临着一个广阔的研究领域. 在这一领域中，对于运筹学主要研究和解决什么问题有许多说法，至今争论不休，实际上形成了一个在争论中发展运筹学的局面. 那么，在这四五十年中，我们能从它的争论中看出一些什么特点呢?

(1)引进数学研究方法. 运筹学是一门以数学为主要工具，寻求各种问题最优方案的学科，所以是一门研究优化的科学. 随着生产与管理的规模日益庞大，其间的数量关系也就更加复杂，从其间的数量关系来研究这些问题，即引进数学研究方法，是运筹学的一大特点.

(2)系统性. 运筹学研究问题是从系统的观点出发，研究全局性的问题，研究综合优化的规律，它是系统工程的主要理论基础.

(3)着重实际应用. 在运筹学术界，有许多人强调运筹学的实用性和对研究结果的"执行"，把"执行"看作运筹工作中的一个重要组成部分. 有的运筹学教科书中，在讲述从理论上求得最优解之后，还要讲述根据实际情况对所得解进行进一步的考察，讲述对所得最优解如何进行灵敏度分析等.

(4)跨学科性. 由有关的各种专家组成的进行集体研究的运筹小组，综合应用多种学科的知识来解决实际问题是早期军事运筹研究的一个重要特点. 这种组织和这种特点一直在一些地方和一些部门以不同的形式保留下来，这往往是研究和解决实际问题的需要. 从世界范围来看，运筹学应用的成败及应用的广泛程度，无不与这样的研究组织和这种组织的工作水平有关.

(5)理论和应用的发展相互促进. 运筹学的各个分支学科，都是由于实际问题的需要或以一定的实际问题为背景逐渐发展起来的. 初期一些老的学科方面的专家对运筹学做出了贡献. 随后新的人材也逐渐涌现，新的理论相继出现，这往往就开拓出新的领域. 如线性规划中的 Канторович 问题 A、B、C 就是在研究生产的组织和计划中出现的. 后来 G. B. Dantzig 等人重新进行独立研究使其形成了一套较完整的理论和方法，进而又开拓了线性规划的应用范围，并相继出现了一批职业的线性规划工作者. 由于他们从事了大量的实践活动，反过来又进一步促进了线性规划方法的进一步发展，从而又出现了椭球法、内点法等新的解线性规划的方法.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

3. 运筹学的主要内容

运筹学发展到现在虽然只有四五十年的历史，但是内容丰富，涉及面广，应用范围大，已形成了一个相当庞大的学科．它的主要内容一般应包含线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、多目标规划、网络分析、排队论、对策论、决策论、存储论、可靠性理论、模型论、投入产出分析等等．它们中的每一个部分都可以独立成册，都有丰富的内容．

上述的前五个部分统称为规划论，它们主要是解决两个方面的问题．一个方面的问题是对于给定的人力、物力和财力，怎样才能发挥他们的最大效益；另一个方面的问题是对于给定的任务，怎样才能用最少的人力、物力和财力去完成它．

网络分析主要是研究解决生产组织、计划管理中诸如最短路径问题、最小连接问题、最小费用流问题、以及最优分派问题等．

排队现象在日常生活中屡见不鲜，如机器等待修理，船舶等待装卸，顾客等待服务等．它们有一个共同的问题，就是等待时间长了，会影响生产任务的完成，或者顾客会自动离去而影响经济效益；如果增加修理工、装卸码头和服务台，固然能解决等待时间过长的问题，但又会蒙受修理工、码头和服务台空闲的损失．这类问题的妥善解决是排队论的任务．

对策论是研究具有利害冲突的各方，如何制定出对自己有利从而战胜对手的斗争策略．例如，战国时代田忌赛马的故事便是对策论的一个绝妙的例子．

决策问题是普遍存在的，凡属“举棋不定”的事情都必须做出决策．人们之所以举棋不定，是因为人们在着手实现某个预期目标时，面前出现了多种情况，又有多种行动方案可供选择．决策者如何从中选择一个最优方案，才能达到他的预期目标，这是决策论的研究任务．

人们在生产和消费过程中，都必须储备一定数量的原材料、半成品或商品．存储少了会因停工待料或失去销售机会而遭受损失，存储多了又会造成资金积压、原材料及商品的损耗．因此，如何确定合理的存储量、购货批量和购货周期至关重要，这便是存储论要解决的问题．

对于一个复杂的系统和设备，往往是由成千上万个工作单元或零件组成的，这些单元或零件的质量如何，将直接影响到系统或设备的工作性能是否稳定可靠．研究如何保证系统或设备的工作可靠性，这便是可靠性理论的任务．

人们在生产实践和社会实践中遇到的事物往往是很复杂的，要想了解这些事物的变化规律，首先必须对这些事物的变化过程进行适当的描述，即所谓建立模型，然后就可通过对模型的研究来了解事物的变化规律．模型论就是从理论上和方法上来研究建立模型的基本技能．

投入产出分析是通过研究多个部门的投入产出所必须遵守的综合平衡原则来制定各个部门的发展计划，借以从宏观上控制、调整国民经济，以求得国民经济协调合理地发展．

4. 运筹学的发展趋势

运筹学作为一门学科，在理论和应用方面，无论就广度和深度来说都有着无限广阔的前景．它不是一门衰老过时的学科，而是一门处于年青发展时期的学科，这从运筹学目前的发展趋势便可看出．

(1)运筹学的理论研究将会得到进一步系统地、深入地发展．数学规划是40年代末期才开始出现的．经过十多年的时间，到了60年代，它已形成了应用数学中一个重要的分支，各种方法和各种理论纷纷出现，蔚为大观．但是，数学规划也和别的学科一样，在各种方法和理论出现

以后，自然要走上统一的途径.也就是说，用一种或几种方法和理论把现存的东西统一在某些系统之下来进行研究.而目前这种由分散到统一、由具体到抽象的过程正在形成，而且将得到进一步的发展.

(2)运筹学向一些新的研究领域发展.运筹学的一个重要特点是应用十分广泛，近年来它正迅速地向一些新的研究领域或原来研究较少的领域发展，如研究世界性的问题，研究国家决策，或研究系统工程等.

(3)运筹学分散融化于其他学科，并结合其他学科一起发展.如数学规划方法用于工程设计，常常叫做“最优化方法”，已成为工程技术中的一个有力研究工具；数学规划用于 Leontief 的投入产出模型，也成为西方计量经济学派常用的数学工具等等.

(4)运筹学沿原有的各学科分支向前发展，这仍是目前发展的一个重要方面.如规划论，从研究单目标规划进而研究多目标规划，这当然可以看成是对事物进行深入研究的自然延伸.事实上，在实际问题中想达到的目标往往有多个，而且有些还是互相矛盾的.再如，从研究短期规划到研究长期规划，这种深入研究也很自然，因为对不少实际问题，人们主要关心的是未来的结果.

(5)运筹学中建立模型的问题将日益受到重视.从事实际问题研究的运筹学工作者，常常感到他们所遇到的困难是如何把一个实际问题变成一个可以用数学方法或别的方法来处理的问题.就目前来说，关于运筹学理论和方法的研究，远远超过了对上述困难的研究，要使运筹学能保持它的生命力，这种研究非常必要.

(6)运筹学的发展将进一步依赖于计算机的应用和发展.电子计算机的问世与广泛的应用是运筹学得以迅猛发展的重要原因.实际问题中的运筹学问题，计算量一般都是很大的.只是有了存储量大、计算速度快的计算机，才使得运筹学的应用成为可能，并反过来推动了运筹学的进一步发展.如算法复杂性这个学科就是运筹学与计算机相结合的产物.

总之，运筹学虽然只有四五十年的历史，但发展如此之快，运筹学工作者如此之多，都 是前所未有的.运筹学作为一门学科，在理论及应用方面，无论就其广度还是深度来说，都有着无限广阔的前景.它对于加速我国的四个现代化建设必将起到十分重要的作用.

§1.2 运筹学的数学模型

模型就是用一种简化的方式表现一个复杂过程或系统，用以帮助人们进行思考和解决问题.运筹学所研究的模型一般来说都是数学模型，也就是用字母、数字和运算符号将系统或过程的某些特征及相互关系表达出来.它是现实系统或过程的一种抽象，近似实际系统或过程而又非实际系统或过程的复制品.它应能反映实际系统或过程的某些特征而又比实际系统或过程本身简单.下面我们就介绍几个常用的数学模型.

1. 线性规划模型

设要从甲地调出物资 2000 吨，从乙地调出物资 1100 吨，分别供给 A 地 1700 吨、B 地 1100 吨、C 地 200 吨、D 地 100 吨.已知每吨运费如表 1.1 所示.

假定运费与运量成正比，在这种情况下，采用不同的调拨计划，运费就可能不一样.现在

问：怎样才能找出一个运费最省的调拨计划？下面我们就把这个问题用数字形式表示出来.

运费 销地 / 产地	A	B	C	D
甲	21	25	7	15
乙	51	51	37	15

表 1.1

首先，作一个物资调拨计划就相当于给出从每一个产地运到每一个销地的物资的数量，可以用变量 x_{ij} 来表示这些数量. 例如，用 $x_{11},x_{12},x_{13},x_{14}$ 分别表示从甲地运往 A,B,C,D 四地的物资数量，用 $x_{21},x_{22},x_{23},x_{24}$ 分别表示从乙地运往 A,B,C,D 四地的物资数量.

其次，从甲、乙两地分别运往 A,B,C,D 四地的物资数量的总和应该分别等于 2000 吨和 1100 吨，所以这些数量应该满足：

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=2000 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1100 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

然后，运到 A,B,C,D 四地的物资数量应该分别是 1700 吨、1100 吨、200 吨、100 吨，所以还应该满足：

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}=1700 \\ x_{12}+x_{22}=1100 \\ x_{13}+x_{23}=200 \\ x_{14}+x_{24}=100 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

另外，x_{ij} 是运量，不能是负数，所以还应满足：

$$x_{ij}\geqslant 0 \qquad (i=1,2;\quad j=1,2,3,4) \tag{1.2.3}$$

最后，x_{ij} 除了满足上述要求以外，还应该使运费最省，而总的运费是所有产地到销地的运量乘以运费再加起来，即

$$f=21x_{11}+25x_{12}+7x_{13}+15x_{14}+51x_{21}+51x_{22}+37x_{23}+15x_{24}$$

因此，找一个运费最省的调拨计划等价于找一组 $x_{ij}(i=1,2;\quad j=1,2,3,4)$ 在满足(1.2.1)，(1.2.2)，(1.2.3) 的条件下，使 f 达到最小. 写成数学形式就是：

$$\begin{cases} \min \quad f=21x_{11}+25x_{12}+7x_{13}+15x_{14} \\ \qquad\qquad +51x_{21}+51x_{22}+37x_{23}+15x_{24} \\ \text{s.t.} \quad x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=2000 \\ \qquad\quad x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1100 \\ \qquad\quad x_{11}+x_{21}=1700 \\ \qquad\quad x_{12}+x_{22}=1100 \\ \qquad\quad x_{13}+x_{23}=200 \\ \qquad\quad x_{14}+x_{24}=100 \\ \qquad\quad x_{ij}\geqslant 0,\quad i=1,2;j=1,2,3,4 \end{cases}$$

其中 min 和 s.t. 分别是极小化(minimize)和约束条件(subject to)的简记符号.

由以上分析可以看出，抽象成数学形式的核心就是求一组变量的值，在满足一定的约束条

件下，使某个目标达到最小或最大，而这些约束条件又都可以用一组线性不等式或线性方程来表示. 像具有这些特征的数学形式，我们就叫做线性规划模型.

2. 随机规划模型

设决策者要设计一个水库，使水库的容量 C 在满足给定的限制条件下达到最小，以使其造价最省.

首先，为防止洪水灾害，在一年中第 i 个季节水库应空出一定的容量 v_i. 以保证洪水的注入. 由于洪水不一定年年有，洪水量的大小也会变化，因此比较合理的约束条件应为以较大的概率 α_1 保证水库容纳洪水，即

$$P(C - s_i \geqslant v_i) \geqslant \alpha_1, \qquad i = 1,2,3,4$$

其中 s_i 为第 i 个季节初水库的储水量.

其次，为保证灌溉、发电、航运等用水供应，水库在每一季节应能保证一定的放水量 q_i. 由于考虑到随机因素，要求满足这一条件的概率不小于某一数 α_2，即

$$P(x_i \geqslant q_i) \geqslant \alpha_2, \qquad i = 1,2,3,4$$

其中 x_i 为第 i 个季节的可放水量.

同样，为保护水库的安全和水生放养，一般地还要求水库保持最小储水量 s_m，即

$$P(s_i \geqslant s_m) \geqslant \alpha_3, \qquad i = 1,2,3,4$$

另外，表示放水量和储水量的 x_i，s_i 不能是负数，即

$$x_i \geqslant 0, s_i \geqslant 0, \qquad i = 1,2,3,4$$

于是，写成数学形式就是：

$$\begin{cases} \min & C \\ \text{s.t.} & P(C - s_i \geqslant v_i) \geqslant \alpha_1 \\ & P(x_i \geqslant q_i) \geqslant \alpha_2 \\ & P(s_i \geqslant s_m) \geqslant \alpha_3 \\ & x_i \geqslant 0, s_i \geqslant 0, \qquad i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

其中约束条件采用了概率约束形式，具有这种特征的数学形式我们就叫做随机规划模型.

3. 网络分析模型

设某公司准备派 n 个工人 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，去作 n 件工作 $y_1, y_2, \cdots, y_n$. 已知工人 x_i 去做工作 y_j 的效率为 $w_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)$. 现问：如何确定一个分派工人去工作的方案，使得工人们总效率达到最大？这个问题通常称为最优分派问题.

我们构造一个二分网络 $G = (X,Y,E,W)$，其中 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为 G 的顶点集合二分划，分别表示 n 个工人和 n 件工作；$E = \{e_{ij}\}(i,j = 1,2,\cdots,n)$ 为 G 的边集合，其中 e_{ij} 表示工人 x_i 去做工作 y_j；$W = \{w_{ij}\}(i,j = 1,2,\cdots,n)$ 为 G 的边权集合，其中 w_{ij}

表示工人 x_i 去做工作 y_j 的效率. 二分图 G 如图 1.2.1 所示.

现在我们来建立分派方案与 G 的边集合之间的对应关系. 首先, 一个可行的分派方案应该满足: 任一个工人都不能去做两件或两件以上的工作; 同样, 任一件工作都不能同时接受两个或两个以上的工人去做. 然后将其对应到 G 的边集合中, 于是就得到这样一个边的子集, 它没有两条边关联于同一个顶点, 这样的边的子集我们称为 G 的对集, 因此, 一个可行的分派方案就对应于 G 的一个对集.

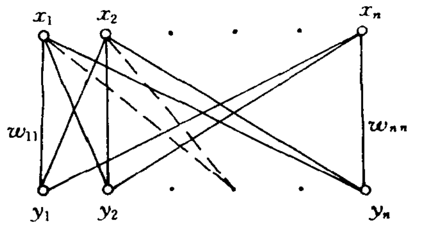


图 1.2.1

我们最终要求的是使总效率达到最大的分派方案, 而一个分派方案的总效率就对应于 G 的一个对集的边权总和. 于是求一个使总效率达到最大的分派方案就转化成求 G 的一个边权总和达到最大的对集, 通常称为最大权对集.

综合以上分析可以看出, 我们首先将最优分配问题转化成网络的最大权对集问题, 然后求出网络的最大权对集, 最后再回到最优分派问题中去, 从而得到最优分派方案. 这种分析问题的方法通常称为网络分析法, 这种数学形式通常称为网络分析模型.

综合以上几个模型我们可以看出, 这些模型一般都具有以下两个共同特征:

(1) 都有一个明确的目标, 这个目标就从众多的可行方案中挑选出一个最优方案.

(2) 用来表达目标的变量都要受一组条件的约束, 它反映了问题本身所受到的客观条件的限制.

因此运筹学模型大都可以表示为求一组变量, 使在一定的约束条件之下, 某一(或某些)目标达到最优.

参考文献

[1]谢力同, 刘家壮. 运筹学的起源和发展之我见. 军事运筹, 1988, 1(1): 1－8

[2]越民义. 运筹学介绍. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1990

[3]卢向华, 侯定丕, 魏权龄. 运筹学教程. 北京: 高等教育出版社, 1989

[4]管梅谷, 郑汉鼎. 线性规划. 济南: 山东科学技术出版社, 1983

[5]王金德. 随机规划. 南京: 南京大学出版社, 1990

[6]刘家壮, 王建方. 网络最优化. 武汉: 华中工学院出版社, 1987

第2章 线性规划

线性规划是运筹学的一个基本分支，其应用极其广泛，其作用已为越来越多的人所重视。从线性规划诞生至今的几十年中，随着计算机的逐渐普及，它越来越急速地渗透于工农业生产、商业活动、军事行动和科学研究的各个方面，为社会节省的财富、创造的价值无法估量。最近十多年来，线性规划无论是在深度还是在广度方面又都取得了重大进展。

本章先通过例子归纳线性规划数学模型的一般形式，然后着重介绍有关线性规划的一些基本概念、基本理论及解线性规划问题的若干方法。

§2.1 线性规划问题

在各类经济活动中，经常遇到这样的问题：在生产条件不变的情况下，如何通过统筹安排，改进生产组织或计划，合理安排人力、物力资源，组织生产过程，使总的经济效益最好。这样的问题常常可以化成或近似地化成所谓的"线性规划"(Linear Programming，简记为 LP)问题。本节先举例介绍线性规划问题，然后给出线性规划问题的一般形式、规范形式和标准形式定义及其矩阵向量表达式，并证明三种形式的 LP 问题是等价的。

1. 线性规划问题举例

下面我们举几个例子。

例 2.1.1 某工厂用 3 种原料 P_1, P_2, P_3 生产 3 种产品 Q_1, Q_2, Q_3。已知的条件如表 2.1.1 所示，试制订出总利润最大的生产计划。

单位产品所需原料数量(kg) 产品 / 原料	Q_1	Q_2	Q_3	原料可用量(kg/日)
P_1	2	3	0	1500
P_2	0	2	4	800
P_3	3	2	5	2000
单位产品的利润(千元)	3	5	4	

表 2.1.1

分析 设产品 Q_j 的日产量为 x_j 个单位，$j=1,2,3$，它们受到一些条件的限制。首先，它们不能取负值，即必须有 $x_j \geqslant 0, j=1,2,3$；其次，根据题设，三种原料的日消耗量分别不能超过它

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com