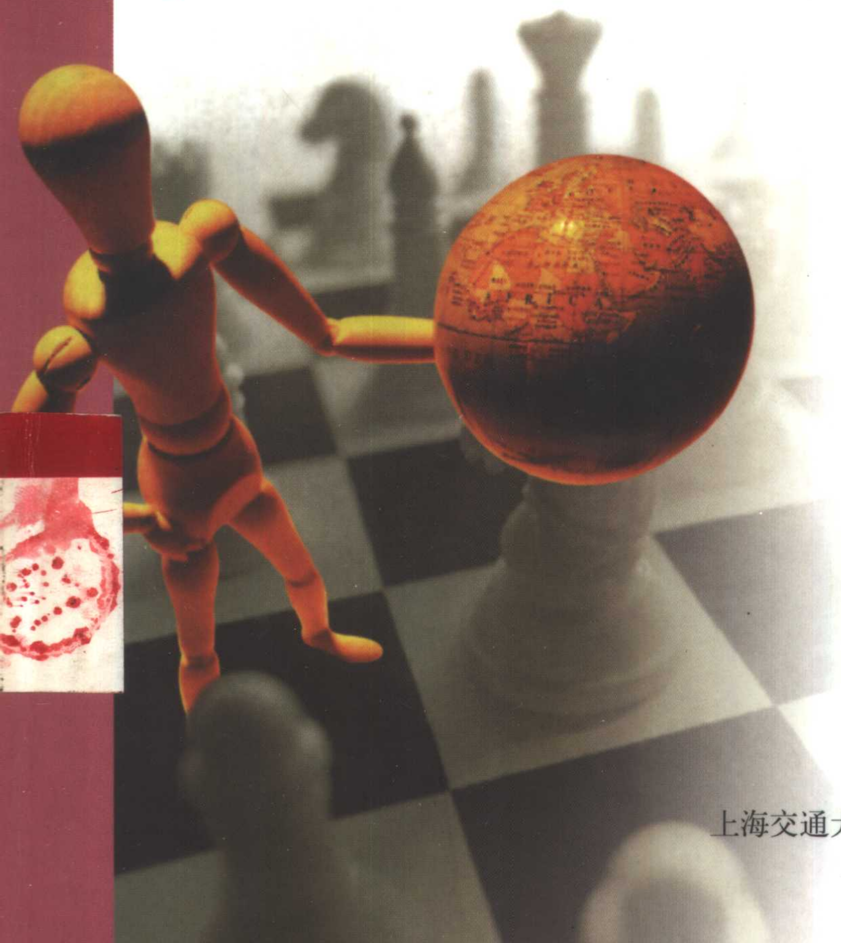
TI DIAN

高等数学题典

陆少华　主编



上海交通大学出版社

高等数学题典

陆少华　主编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书主要为高等数学的典型习题精编。全书共11章，典型例题数百道，包括单元微积分，多元微积分，空间解析几何，级数与微分方程。

本书特点是内容齐全，选材精练，条理清晰，方法简明规范，具有代表性和典型性，有举一反三、触类旁通的功效。可供各类高等院校师生学习参考，也可作为考研复习资料与自学辅助材料。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学题典/陆少华主编. —上海：上海交通大学出版社，2001

ISBN 7-313-02560-2

Ⅰ.高… Ⅱ.陆… Ⅲ.高等数学-习题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第76012号

高等数学题典

陆少华 主编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路877号 邮政编码200030)

电话：64071208 出版人：张天蔚

常熟市文化印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本：890mm×1240mm 1/32 印张：12.125 字数：348千字

2001年1月第1版 2001年1月第1次印刷

印数：1—5050

ISBN 7-313-02560-2/O·128 定价：18.50元

版权所有 侵权必究

前　言

本书通过各类极富代表性的高等数学习题的求与解，主要介绍单元微积分、多元微积分、空间解析几何、级数与微分方程等内容，旨在传授解题技巧与方法，规范思维方式，启迪高校学生的数学智慧，有效地帮助读者提高解决问题、分析问题的实际能力。

本书共分11章，包括函数，极限与连续，导数与微分，中值定理与导数应用，定积分与不定积分，向量代数与空间解析几何，多元微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，级数，微分方程。全书选材慎之又慎，解析过程简明规范，条理清晰。

全书数百道习题可分为普通难度题、中等难度题和高深难度题。中等难度题标以一个星号“*”，高深难度题题标以两个星号“* *”，以示区别。

参与本书编写的有孙薇荣、王加善、周汉源、范荣良等。

由于编写时间仓促，且限于编者的水平，书中难免有不少疏漏欠妥之处，恳望广大读者批评指正。

编　者

2000年9月

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章　函　数

1. 基本概念

1-1　下列各题中,函数 $f(x)$和 $g(x)$是否相同? 为什么?

(1) $f(x)=x^0$, $g(x)=1$;

(2) $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$;

(3) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(4) $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$。

分析　两个函数当且仅当定义域与对应法则均相同时才表示同一函数,否则它们表示两个不同的函数。

解　(1) $f(x)=x^0$ 的定义域为 $x\neq 0$;而 $g(x)=1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,故两个函数不相同。

(2) $f(x)=\lg x^2$ 的定义域为 $x\neq 0$; $g(x)=2\lg x$ 的定义域为 $x>0$,故两个函数不相同。

(3) 当 $x<0$ 时,$f(x)=x$,而 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|=-x$,即两个函数的对应规则不相同,故不是相同的函数。

(4) $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$是相同的函数,因为它们有相同的定义域$(-\infty,+\infty)$,有相同的对应法则。

1-2　求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{x-1}+\sqrt{x+1}$;

(2) $y=\arcsin\dfrac{2-5x}{3}$;

(3) $y=\sqrt{\sin x}+\lg(9-x^2)$;

(4) $y=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}$。

分析 求函数的定义域,就是求使表达式有意义的那些自变量的值,通常是列出不等式(组),解之即得定义域。

解 (1) $\begin{cases}x\neq 1,\\ x+1\geqslant 0。\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 1;\\ x\geqslant -1。\end{cases}$
故定义域为$[-1,1)\cup(1,+\infty)$。

(2) $-1\leqslant\dfrac{2-5x}{3}\leqslant 1,\Rightarrow -3\leqslant 2-5x\leqslant 3,\Rightarrow -5\leqslant -5x\leqslant 1,$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{5}\leqslant x\leqslant 1$,故定义域为$[-\dfrac{1}{5},1]$。

(3) $\begin{cases}\sin x\geqslant 0,\\ 9-x^2>0。\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2n\pi\leqslant x\leqslant 2n\pi+\pi,(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)\\ -3<x<3。\end{cases}$
$\Rightarrow 0\leqslant x<3$,即定义域为$[0,3)$。

(4) $\begin{cases}2x-x^2\geqslant 0,\\ 2x-1>0,\\ \lg(2x-1)\neq 0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2,\\ x>\dfrac{1}{2},\\ x\neq 1。\end{cases}$

x-|x|

$\Rightarrow\dfrac{1}{2}<x<1$ 及 $1<x\leqslant 2$,即定义域为$\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,2]$。

1-3 设函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,求 $f(\lg x)$,$f(\sin x)$的定义域。

解 要使 $f(\lg x)$有意义,x 满足:$0\leqslant\lg x\leqslant 1$,得定义域为$[1,10]$。

为使 $f(\sin x)$有意义,x 满足:$0\leqslant\sin x\leqslant 1$,得定义域为 $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty}[2n\pi,2n\pi+\pi]$。

1-4 求下列函数的反函数:

(1) $y=\dfrac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}+1,\quad x\neq 0$;

(2) $y=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}},\quad x\geqslant -\dfrac{1}{4}$;

*(3) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$。

分析　求反函数的通常步骤:由 $y=f(x)$解出 x,得 $x=\varphi(y)$,则 $y=\varphi(x)$即为所求反函数。

解　(1) $y(10^x-10^{-x})=10^x+10^{-x}+10^x-10^{-x}=2\times10^x$,

$$y(10^{2x}-1)=2\cdot10^{2x},$$

$$(y-2)10^{2x}=y,$$

解得　$x=\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{y}{y-2}$,

故所求反函数为　$y=\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{x}{x-2}$。

(2) $y(1+\sqrt{1+4x})=1-\sqrt{1+4x}$,

$$\sqrt{1+4x}=\frac{1-y}{1+y},$$

解得　$x=\dfrac{-y}{(1+y)^2}$,

故所求反函数为　$y=\dfrac{-x}{(1+x)^2}$。

(3) $$y^3=\left[x+\sqrt{1+x^2}\right]+3\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$$
$$\left[\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}\right]+\left[x-\sqrt{1+x^2}\right]$$
$$=2x+3\sqrt[3]{x^2-(1+x^2)}\cdot y$$
$$=2x-3y,$$

解得　$x=\dfrac{1}{2}(y^3+3y)$,

故所求反函数为　$y=\dfrac{1}{2}(x^3+3x)$。

1-5　设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,$x\neq0,1$,求

(1) $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$;

(2) $f(f\{f[f(x)]\})$。

解　(1) $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\dfrac{x}{x-1}}=\dfrac{x-1}{x}$,

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-1}=\frac{x-1}{x-1-x}=1-x。$$

(2) $$f[f(x)]=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=\frac{x}{x-(x-1)}=x,故$$

$$f(f\{f[f(x)]\})=f[f(x)]=x。$$

1－6 设 $f(x)=\mathrm{e}^x,g(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1。\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 的表达式。

解 $$f[g(x)]=\begin{cases}\mathrm{e}, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ \frac{1}{\mathrm{e}}, & |x|>1;\end{cases}$$

$$g[f(x)]=g(\mathrm{e}^x)=\begin{cases}1, & \mathrm{e}^x<1,\\ 0, & \mathrm{e}^x=1,\\ -1, & \mathrm{e}^x>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0。\end{cases}$$

***1－7** 求 $f_n(x)=\underbrace{f\cdots f}_{n次}(x)$，若

(1) $f(x)=a+bx,\quad x\in(-\infty,+\infty)$；

(2) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1,1)$。

解 (1) $f_1(x)=f(x)=a+bx$，

$f_2(x)=f[f(x)]=a+b(a+bx)=a(b+1)+b^2x$，

$f_3(x)=f[f_2(x)]=a+b[a(b+1)+b^2x]=a(b^2+b+1)+b^3x,\cdots$。

若　$f_k(x)=a(b^{k-1}+b^{k-2}+\cdots+b+1)+b^kx$,

则　$f_{k+1}(x)=f[f_k(x)]=a+b[a(b^{k-1}+\cdots+b+1)+b^kx]$

$=a(b^k+\cdots+b+1)+b^kx$。

故由归纳法,得

$$f_n(x)=a(b^{n-1}+\cdots+b+1)+b^nx=\frac{a(b^n-1)}{b-1}+b^nx;$$

(2) $f_1(x)=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$f_2(x)=f[f(x)]=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1-x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1-2x^2}},\quad x\in\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right),$$

若　$f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-kx^2}}$,　$x\in(-\dfrac{1}{\sqrt k},\dfrac{1}{\sqrt k})$,

则　$f_{k+1}(x)=f[f_k(x)]=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1-kx^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1-kx^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1-(k+1)x^2}}$,

$x\in\left(-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}},\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$。

故由归纳法,得

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1-nx^2}},\quad x\in(-\frac{1}{\sqrt n},\frac{1}{\sqrt n})。$$

2. 函数特性

2-1　判别下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$;

(2) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$;

(3) $f(x)=(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})^x+(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})^x$;

(4) $f(x)=x\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$。

试读结束：需要全本请在线购买：　www.ertongbook.com

分析 判别函数 $f(x)$ 是否为奇(偶)函数,常用方法是检验 $f(-x)$ 是否等于 $\pm f(x)$。

解 (1) $f(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln\dfrac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$$=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x),$$

故 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数。

(2) $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}=\dfrac{-(e^{x}-e^{-x})}{e^{x}+e^{-x}}=-f(x)$,

故 $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ 是奇函数。

(3)
$$\begin{aligned}f(-x)&=(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})^{-x}+(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})^{-x}\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}\right)^{x}+\left(\frac{1}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}\right)^{x}\\&=\left(\frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{(a+1)-a}\right)^{x}+\left(\frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}{(a+1)-a}\right)^{x}\\&=(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})^{x}+(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})^{x}\\&=f(x),\text{故}\end{aligned}$$

$$f(x)=(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})^{x}+(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})^{x}$$

是偶函数。

(4)
$$\begin{aligned}f(-x)&=(-x)\left[\frac{1}{2^{-x}-1}+\frac{1}{2}\right]=(+x)\left[\frac{2^{x}}{2^{x}-1}-\frac{1}{2}\right]\\&=x\left[\frac{2^{x}}{2^{x}-1}-1+\frac{1}{2}\right]=x\left[\frac{1}{2^{x}-1}+\frac{1}{2}\right]=f(x),\text{故}\end{aligned}$$

$$f(x)=x\left(\frac{1}{2^{x}-1}+\frac{1}{2}\right)$$

是偶函数。

2-2 求证:定义在 $[-a,a]$,$(a>0)$ 上的任何函数 $f(x)$ 都可以唯一表示为一个偶函数与一个奇函数的和。

证 存在性:由于 $g(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数,$h(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数,而

$$g(x)+h(x)=2f(x),$$

从而
$$f(x)=\frac{g(x)}{2}+\frac{h(x)}{2}$$
$$=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}。$$

即 $f(x)$ 可以表示为一个偶函数 $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 与一个奇函数 $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 之和。

唯一性:若 $f(x)$ 可表为偶函数 $\varphi(x)$ 与奇函数 $\psi(x)$ 之和:

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x),$$

则
$$f(-x)=\varphi(-x)+\psi(-x)=\varphi(x)-\psi(x)。$$

两式相加,得

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},$$

两式相减,得

$$\psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}。$$

这就证明了唯一性。

2-3 若周期函数 $f(x)$ 的周期为 T,$a\neq0$,则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{a}$。

证 记 $g(x)=f(ax+b)$,

则 $g(x+T_1)=f[a(x+T_1)+b]=f[(ax+b)+aT_1]$,

因而 T_1 是 $g(x)$ 周期 $\Leftrightarrow g(x)=g(x+T_1)\Leftrightarrow aT_1$ 是 $f(x)$ 周期 $\Leftrightarrow T=aT_1$,即 $T_1=\frac{T}{a}$。

故 $g(x)=f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{a}$。

2-4 求下列周期函数的周期:

(1) $f(x)=\sin^4 x-\cos^4 x$;

(2) $f(x)=\cos^6 x+\sin^6 x$;

(3) $f(x)=a\cos x+b\sin x$; $b\neq0$。

$\varphi=\arctan\frac{a}{b}$

解 (1) $f(x)=(\sin^2x+\cos^2x)(\sin^2x-\cos^2x)=\sin^2x-\cos^2x$

$$=-\cos2x,$$

因为 $\cos x$ 的周期为 2π,故 $\cos2x$,从而 $f(x)$的周期为

$$\frac{2\pi}{2}=\pi。$$

(2) $f(x)=(\cos^2x+\sin^2x)(\cos^4x-\cos^2x\cdot\sin^2x+\sin^4x)$

$$=(\cos^2x+\sin^2x)^2-3\sin^2x\cdot\cos^2x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^22x=1-\frac{3}{8}(1-\cos4x)$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos4x。$$

因为 $\cos4x$ 的周期为$\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,故 $f(x)$的周期也是$\frac{\pi}{2}$。

(3) 令 $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}$,则

$$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\varphi\cos x+\cos\varphi\sin x)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),$$

故 $f(x)$的周期为 2π。

***2-5** 若函数 $y=f(x)$的图形关于直线 $x=a$ 和 $x=b$ 对称,$(a\neq b)$,求证:$f(x)$为周期函数。

证 $f(x)$图形关于直线 $x=c$ 对称,则 $f(c+x)=f(c-x)$。于是

$$f(x)=f[a+(x-a)]=f[a-(x-a)]=f(2a-x)$$

$$=f[b+(2a-x-b)]=f[b-(2a-x-b)]$$

$$=f[x+2(b-a)],$$

即 $f(x)$是以 $2(b-a)$为周期的周期函数。

2-6 求证:函数 $f(x)$有界$\Leftrightarrow f(x)$上、下有界。

证 $\Rightarrow$:$f(x)$有界,即存在 M,使

$$|f(x)|\leqslant M,$$

于是 $$-M\leqslant f(x)\leqslant M,$$

即 $f(x)$上、下有界。

$\Leftarrow$:$f(x)$上、下有界,即存在 a、b,使

$$a\leqslant f(x)\leqslant b,$$

于是$|f(x)|=|f(x)-a+a|\leqslant|f(x)-a|+|a|$

$$=f(x)-a+|a|\leqslant b-a+|a|,$$

即 $f(x)$有界。

2-7　若函数 $f(x)$满足:

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x},\qquad x\neq 0,|a|\neq|b|,$$

求证:$f(x)$为奇函数。

证　令 $x=\frac{1}{t}$,得

$$af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=ct,$$

或

$$bf(x)+af\left(\frac{1}{x}\right)=cx,$$

消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$,得

$$(a^2-b^2)f(x)=\frac{ac}{x}-bcx,$$

用$(-x)$代 x,得

$$(a^2-b^2)f(-x)=\frac{-ac}{x}+bcx。$$

两式相加得

$$(a^2-b^2)[f(x)+f(-x)]=0。$$

因为 $a^2-b^2\neq 0$,故

$$f(x)+f(-x)=0,$$

即 $f(x)$为奇函数。

2-8　$ad\neq bc$,若函数

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

与反函数相同,求 a,b,c,d 满足的关系式。

解　由 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$,解得 $x=\frac{-dy+b}{cy-a}$,

故反函数为

$$y=\frac{-dx+b}{cx-a}。$$

由 $$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{-dx+b}{cx-a}$$得

$c(a+d)x^2+(d-a)(d+a)x-(d+a)b\equiv 0$,

于是 $$\begin{cases} c(a+d)=0, \\ d^2-a^2=0, \\ b(a+d)=0, \end{cases}$$

即 a,b,c,d 满足的条件为

$$a+d=0。$$

或 $$\begin{cases} b=c=0, \\ a=d。 \end{cases}$$

3. 函数关系与函数表达式

3-1 求函数 $f(x)$的表达式,若

(1) $f(1-x)=x^2+1$;

(2) $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$,$(x\neq 0)$;

(3) $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x$;

(4) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$。

解 (1) 令 $t=1-x$,则 $x=1-t$,得

$$f(t)=(1-t^2)+1=t^2-2t+2,$$

故所求表达式为(用 x 代 t)

$$f(x)=x^2-2x+2。$$

(2) 令 $t=\frac{1}{x}$,则 $x=\frac{1}{t}$,代入函数式,得

$$f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}},$$

故所求表达式为(用 x 代 t)

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}。$$

(3) $f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos x=1+1-2\sin^2\frac{x}{2}=2\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)$,

于是,函数表达式为$\left(用 x 代 \sin\frac{x}{2}\right)$

$$f(x)=2(1-x^2)。$$

(4) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$,

于是,函数表达式为$\left(用 x 代 x+\frac{1}{x}\right)$

$$f(x)=x^2-2。$$

3-2 求函数 $f(x)$的表达式,若

(1) $2f(x)+f(1-x)=x^2$;

(2) $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=x+1,\quad x\neq0,1$。

解 (1) 令 $t=1-x$,得

$$2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2,$$

或(用 x 代t),得 $f(x)=x^2+2x-1$

$$2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2,$$

消去 $f(1-x)$(原式两倍减去上式),则

$$3f(x)=2x^2-(1-x)^2,$$

即
$$f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x-1)。$$

(2) 令 $t=\frac{x-1}{x}$,$x=\frac{1}{1-t}$,代入原式,得

$$f(\frac{1}{1-t})+f(t)=\frac{1}{1-t}+1=\frac{2-t}{1-t},$$

故
$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)=\frac{2-x}{1-x},$$

再令 $x=\frac{1}{1-n}$,$\frac{1}{1-x}=\frac{n-1}{n}$,代入上式,得

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com