

现代量子力学教程

(修订版)

陈中轩 编著

(云南大学“211 工程”教材建设项目)

原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

现代量子力学教程/陈中轩编著. - 2 版(修订版). - 北京:原子能出版社, 2000. 2

ISBN 7-5022-2098-4

I. 现… II. 陈… III. 量子力学-高等学校-教材 IV. O413.1 - 43

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 67978 号

内 容 简 介

本书系统地阐述量子力学的基本概念、原理、近似方法,以及在科学技术中的应用。第一章介绍量子力学的实验基础;第二至四章讲述基本原理,包括波函数、Schrödinger 方程、力学量算符表示及表象理论;第五章介绍主要近似方法及量子跃迁;第六章讨论散射问题;第七章研究自旋和角动量理论;第八章简述多体问题;第九章集中介绍量子力学在现代科学技术中的应用;其他各章也均涉及应用问题。前八章配有丰富的习题及一定数量的思考题。

本书可作为物理专业及相近专业的教材或教学参考书,也可供研究生、教师和科研工作者参考。

原子能出版社出版发行

责任编辑:赵志军 杨树录

社址:北京市海淀区阜成路 43 号 邮政编码:100037

原子能出版社印刷厂印刷 新华书店经销

开本:850×1168mm 1/32 印张:11.5 字数:307 千字

2000 年 2 月北京第 2 版 2000 年 2 月北京第 1 次印刷

印数:1-1000

定价:17.00 元

修订版前言

本书自 1994 年出版以来,得到使用师生的好评,并陆续收到许多宝贵意见和建议,使作者受益匪浅。在量子论提出即将百年之际,云南大学理学院及物理系领导积极支持作者根据五年来的教学实践把原书作为云南大学“211 工程”建设成果之一修订出版,更使作者受到莫大鼓励。考虑到原书始于作者希望能有密切联系现代科学技术扼要讲授量子力学而抛砖引玉的初衷,这次修订中作者只对原书叙述不够清楚或不恰当的内容和印刷错误作了修订和补充。作者仍期待着既少而精又密切联系现代科学技术实际的量子力学教材的出版。

这次修订得到我校理学院任永毅、杨家禾等老师,以及物理系数理基地班 95 级部分学生的关心和帮助,得到原子能出版社石庆元同志的支持,特别是赵志军编辑为此付出了艰辛的劳动,作者在此一并致以衷心感谢。限于个人水平,本书一定还有缺点和错误,作者热情欢迎读者批评指正。

陈中轩 1999 年 5 月于
云南大学非线性复杂系统中心

原 版 前 言

在一本篇幅不大的教材中,既清楚讲述量子力学的基本概念和理论体系,又广泛介绍量子力学在现代科学技术中的应用,多年来一直是有关师生的普遍愿望。《现代量子力学教程》正是作者在这一要求推动下所作的努力。作者根据多年的教学积累,立足部颁大纲的要求,精简冗繁和陈旧,适当地介绍量子力学在现代科学技术中的应用,最后一章还就量子力学在材料科学、超导性研究方面的应用基础和量子力学的近期理论成果作了集中介绍。

本书超出部颁大纲的内容以“*”号标出。使用者可根据学时的多少,选择较低、一般、较高三种程度之一。本书配有深浅程度不同的丰富习题,可供教学中选用。书中的思考题可引导学生进一步开拓思路。作者希望本书不仅在学生课程时有用,而且在未来的工作中也有参考价值。

云南大学教务处、物理系和非线性复杂系统中心的支持对本书的顺利出版起了决定作用。杨自天、彭守礼教授,张世鸾、刘洪章副教授对本书的编著给予了热情帮助,张效良讲师绘制了书中全部图形,物理系90级部分学生帮助抄清了书稿,作者在此一并表示感谢。限于水平,书中难免不足和错误,作者诚恳欢迎批评指正。

作者 1994 年 2 月于
云南大学非线性复杂系统中心

目 录

第 1 章 量子力学的实验基础	(1)
§ 1.1 经典物理学的困难	(1)
§ 1.2 Planck - Einstein 光量子理论 Compton 效应	(6)
§ 1.3 原子结构的 Bohr 理论	(12)
§ 1.4 de Broglie 假设 实物粒子的波粒二象性	(14)
习题	(19)
第 2 章 波函数和 Schrödinger 方程	(21)
§ 2.1 波函数及其统计解释	(21)
§ 2.2 以动量为自变量的波函数	(28)
§ 2.3 态迭加原理	(35)
§ 2.4 Schrödinger 方程	(39)
§ 2.5 几率流密度和几率守恒	(46)
§ 2.6 一维方势阱	(49)
§ 2.7 一维谐振子	(57)
§ 2.8 势垒贯穿	(63)
* § 2.9 一维周期势场	(69)
习题	(73)
第 3 章 量子力学中的力学量	(79)
§ 3.1 力学量的算符表示	(79)
§ 3.2 动量算符	(86)
§ 3.3 角动量算符	(91)
§ 3.4 厄米算符本征函数的性质	(96)
§ 3.5 力学量的测量值与平均值	(101)
§ 3.6 不同力学量同时有确定值的条件 测不准关系	(105)

§ 3.7	力学量平均值随时间的变化 守恒量	(111)
§ 3.8	中心力场:电子在 Coulomb 场中的运动	(115)
§ 3.9	氢原子	(121)
	习题	(128)
第 4 章	表象理论	(134)
§ 4.1	态的表象	(134)
§ 4.2	力学量算符的矩阵表示	(138)
§ 4.3	量子力学的矩阵表示	(141)
§ 4.4	表象变换	(144)
§ 4.5	Dirac 符号	(149)
§ 4.6	粒子数表象	(155)
* § 4.7	Schrödinger 图象和 Heisenberg 图象	(161)
	习题	(165)
第 5 章	近似方法	(168)
§ 5.1	非简并定态微扰论	(168)
§ 5.2	简并微扰论 Stark 效应	(175)
§ 5.3	量子跃迁	(181)
§ 5.4	光的吸收和受激辐射 选择定则	(189)
§ 5.5	光的自发辐射	(193)
§ 5.6	激光原理	(196)
* § 5.7	变分法	(198)
	习题	(203)
第 6 章	散射理论	(208)
§ 6.1	散射问题的一般描述	(208)
§ 6.2	分波法	(216)
§ 6.3	Born 近似	(223)
	习题	(227)
第 7 章	自旋与角动量	(229)
§ 7.1	电子自旋	(229)

§ 7.2 自旋波函数 自旋算符 Pauli 方程	(232)
§ 7.3 简单 Zeeman 效应	(241)
* § 7.4 磁共振	(244)
§ 7.5 两个角动量的耦合 C-G 系数	(249)
* § 7.6 光谱的精细结构 复杂 Zeeman 效应	(257)
§ 7.7 自旋单态和三重态	(263)
习题	(266)
第 8 章 多粒子体系	(269)
§ 8.1 全同性原理 Bose 子和 Fermi 子	(269)
§ 8.2 全同粒子体系的波函数 Pauli 原理	(272)
§ 8.3 氦原子 仲氦和正氦	(279)
§ 8.4 氢分子 化学键	(285)
习题	(289)
* 第 9 章 现代科技中的量子力学	(291)
§ 9.1 有电磁场时的 Schrödinger 方程 规范不变性	(291)
§ 9.2 Landau 能级 量子 Hall 效应	(296)
§ 9.3 Meissner 效应 磁通量量子化	(301)
§ 9.4 Aharonov - Bohm 效应 Berry 相	(308)
§ 9.5 Josephson 效应	(312)
§ 9.6 Mössbauer 效应	(320)
习题答案	(326)
附录	(340)
I. δ 函数	(340)
II. 二阶线性常微分方程的级数解	(342)
III. Hermite 多项式	(344)
IV. 缔合 Legendre 多项式及球谐函数	(347)
V. 电子在 Coulomb 场中径向方程的解	(352)
VI. Bessel 型方程的解	(354)
VII. 常用物理常数表	(356)

第 1 章 量子力学的实验基础

量子力学是研究微观粒子(线度在 10^{-10} m 量级以下的物质客体,如分子、原子、原子核、基本粒子等)运动规律的物理理论。19 世纪和 20 世纪之交,由于生产和科学技术的进步,特别是物理实验技术的提高,物理学已深入到对微观物质客体的研究(如光与物质相互作用的研究,原子结构的研究),发现了许多经典物理学无法解释的新现象。物理学家在分析、总结实验事实的基础上,认识到微观粒子的运动规律与经典物理学所描述的宏观物质客体的运动规律有质的不同,形成了一系列新概念,最终在本世纪 20 年代建立了量子力学。

本章从分析经典物理学所遇到的主要困难出发,用实验事实揭露光的波粒二象性,进而认识微观粒子的波粒二象性,为量子力学奠定认识论基础。学习本章要坚持辩证唯物主义的认识论,确认客观事实,扬弃旧观念,建立新观念。

§ 1.1 经典物理学的困难

19 世纪末,物理学理论已发展得相当完善:描写物体机械运动规律有 Newton 力学,描写电磁现象(包括光的运动规律)有 Maxwell 方程组集其大成的电磁理论,描写热现象有热力学及统计物理学。但这些理论都只是相对真理,当人类的生产活动和科学实践深入到新的领域时,理论的局限性便暴露了出来。19 世纪末 20 世纪初,正是物理学发展史上的这种转折期,由此形成经典物理学与近代物理学的划分。本节,我们首先分析当时经典物理学所遇到的主要困难。

1. 黑体辐射问题

19 世纪后期,钢铁冶炼技术的要求,天文学上了解恒星表面温度的需要,推动了物理学对热辐射的研究,相继认识到了 Kirchhoff 热辐射定律(1859 年)、Stefan 四次方定律(1884 年)和 Wien 位移定律(1893 年)。Kirchhoff 定律指出,热平衡时物体热辐射的谱发射率

$e(\nu, T)$ 与谱吸收率 $a(\nu, T)$ 之比只与温度和频率有关,即

$$\frac{e(\nu, T)}{a(\nu, T)} = f(\nu, T)$$

是对各种物质材料均相同的普适函数。显然,寻找 $f(\nu, T)$ 的具体形式具有重要意义。 $a(\nu, T) = 1$ 的物体能全部吸收辐射到它上面的能量,称作(绝对)黑体。可见, $f(\nu, T)$ 就是黑体的谱发射率 $e_0(\nu, T)$ 。热平衡时,黑体吸收多少能量就要辐射多少能量,因此谱发射率 $e_0(\nu, T)$ 与辐射场的谱能量密度 $\rho(\nu, T)$ 成正比:

$$e_0(\nu, T) = \frac{c}{4} \rho(\nu, T) \quad (\text{SI})$$

(c 为光速)。探求普适函数 $f(\nu, T)$ 归结为研究热平衡时黑体辐射场能量密度按频率的分布。把由绝热器壁封闭的、开有小孔的空腔置于真空中,因外界穿过小孔射入腔内的辐射实际不能返回(图 1.1),能量被器壁全部吸收,这样的空腔可作为黑体的物理模型。保持器壁在某一恒定温度,空腔穿过小孔向外界的辐射即为该温度下的黑体辐射,空腔内各种频率的电磁波即为该温度下的黑体辐射场。

1897 年, Lummer 和 E. Pringsheim 对空腔辐射场的能量分布进行了实验研究,发现热平衡时辐射场的能量密度 $\rho(\nu, T)$ 对频率 ν 的变化曲线如图 1.2。曲线的形状和位置仅与热平衡时的温度有关,与空腔的形状和组成物质无关。

1896 年, Wien 通过热力学的讨论得到了一个半经验的能量分

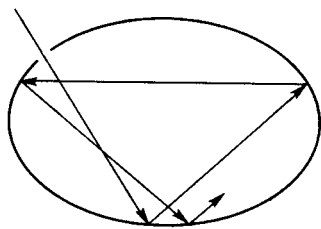


图 1.1

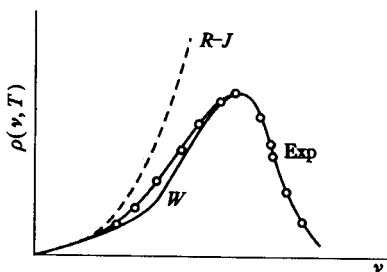


图 1.2

布公式

$$\rho(\nu, T)d\nu = C_1 \nu^3 e^{-C_2 \nu/T} d\nu \quad (1.1-1)$$

T 为平衡时的温度, C_1 与 C_2 为两个经验参数。Lummer 和 Pringsheim 把 Wien 公式与实测结果作了比较, 发现在高频段二者符合很好, 在低频段 Wien 公式的结果系统地低于实验值。

1900 年, J. W. Rayleigh (以及 1905 年 J. H. Jeans 的改进) 从经典电磁理论导出空腔单位体积内频率在 $\nu \sim \nu + d\nu$ 间的电磁横波数目为 $8\pi\nu^2 d\nu/c^3$ 。按经典统计物理的能均分定理, 热平衡时每振动自由度有 kT 的平均能量, 从而得

$$\rho(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} kT \nu^2 d\nu \quad (1.1-2)$$

k 为 Boltzmann 常数, c 为真空中的光速。Rayleigh-Jeans 公式在低频段与实验相符, 在高频段与实验极其不符。(1.1-2) 式表明, 谱能量密度随频率单调增加, 以至趋于无穷。(1.1-2) 式积分, 得辐射场单位体积中的能量发散, 与事实完全不符。这预示 Rayleigh-Jeans 公式的理论基础——经典物理学面临着严重危机, 历史上称作“紫外发散灾难”。

在 Wien、Rayleigh 等工作的基础上, Planck 进一步分析实验曲线, 于 1900 年得到了从低频到高频都与实验符合的经验公式

$$\rho(\nu, T)d\nu = \frac{C_1 \nu^3 d\nu}{e^{C_2 \nu/T} - 1} \quad (1.1-3)$$

怎样从理论上导出 Planck 公式呢? “物含妙理总堪寻”, 关于 Planck 公式理论基础的探索首先宣告了量子论的诞生。

2. 光电效应

1886~1888 年, H. R. Hertz 在进行验证电磁波存在的实验时发现, 若接收线路中两个小锌球之一受到紫外线照射, 小球间很容易产生电火花。这是最早发现的光电效应。1896 年, J. J. Thomson 在气体放电现象及阴极射线的研究中发现了电子, 使人们认识到光电效应乃是在紫外线照射下, 电子从金属表面逸出现象。系统的实验

研究发现光电效应有两个突出的特点:(1)对一定的金属材料存在确定的临界频率 ν_0 。当照射光频率 $\nu < \nu_0$ 时,无论光的强度多大,照射时间多长,都不能从该金属表面产生光电子;反之,当 $\nu > \nu_0$ 时,无论光多么弱,只要光一照射金属板,立刻(约 10^{-9} s)观测到光电子。(2)光电子的能量仅与照射光的频率有关,与光强无关。光的频率越高,光电子的能量越大。光的强度只影响光电流的强度,光的强度越大,光电流越强。

经典物理学无法说明光电效应的特点:(1)按光的电磁理论,光的能量正比于光的强度,任何频率的光只要有足够的强度,照射时间足够长,总能使电子获得足够能量从金属表面逸出,与存在临界频率的实验事实矛盾。而且,按经典理论的估计,光电子逸出的时间延迟约在 1 s 量级,与光电效应为瞬时效应相差很大。(2)按光的电磁理论,照射光的强度越大,光振动电矢量 $\vec{E}$ 的数值也越大,作用于电子上的力 $-e\vec{E}$ ($-e$ 为电子电荷)也越大,从而光电子能量越大,也与实验事实矛盾。光电效应显示了光的经典波动理论的局限性,成为提出光子概念的实验根据。

3. 原子光谱及其规律

到 19 世纪中叶,人们已认识到原子发射的光谱是分立的线状光谱。1861 年, R. W. Bursen 和 G. R. Kirchhoff 利用元素所特有的标志谱线作分析,发现了元素铷(Rb)和铯(Cs)。1885 年, J. J. Balmer 发现从星光光谱中观察到的 14 条氢原子光谱线的波数 $\tilde{\nu}$ 可表作公式(Balmer 公式)

$$\tilde{\nu} \equiv \frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), n = 3, 4, 5 \cdots \quad (1.1-4)$$

$R_H = 1.09677576 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$, (氢的 Rydberg 常数)

谱线波长的观测值与公式计算值惊人地符合,称作 Balmer 系。后来发现,氢原子光谱还有另外一些谱线系,它们均可用推广的 Balmer 公式表示为

$$\tilde{\nu} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (1.1-5)$$

$n = m + 1, m + 2, \dots, m = 1, 2, 3 \dots$, 对每一谱线系 m 取定值。19 世纪 90 年代, R. J. Rydberg 仔细地分析了碱金属元素的光谱, 发现它们可分作主线系、锐线系和漫线系, 每个线系有类似(1.1-4)式的规律。波数可表作相应原子的 Rydberg 常数 R 与一平方差的积。1908 年, W. Ritz 进而提出组合原则: 每种原子有自身的一系列光谱项 $T(n)$, 它的每条光谱线的波数均可表作二光谱项之差(m, n 取整数):

$$\tilde{\nu}_{mn} = T(m) - T(n) \quad (1.1-6)$$

按 Ritz 的组合原则, 若某原子光谱中有频率 ν_1 和 ν_2 的谱线, 则可以 有频率为 $\nu_1 + \nu_2$ 或 $|\nu_1 - \nu_2|$ 的谱线。

原子线状光谱的物理机制是什么? 波数为什么有谱线系规律? 光谱项的本质是什么? 经典物理学完全不能回答这些问题。按后来发展的原子有核模型(见下段), 原子光谱的规律使经典物理学在理论原则上出现了危机。因为, 按经典力学及经典电磁理论, 电子在原子核 Coulomb 场中沿椭圆轨道运动, 仅以轨道运动频率作基频辐射基频或其倍频的电磁波, 与 Ritz 组合原则不一致。而且, 电子因辐射而损失能量, 轨道频率会越来越大, 辐射应为连续谱, 不能是线状光谱。

4. 原子的稳定性

经典物理学把原子看成是组成物质的不可分割的最小单元。19 世纪末的一系列重大发现彻底动摇了这一观念。1895 年, W. K. Röntgen 发现了 X 射线; 1896 年, A. H. Becquerel 发现了天然放射性现象, 天然放射性元素铀(U)可放射出 α 、 β 、 γ 三种射线, 分别荷正电、负电和不荷电(中性); 1898 年, Curie 夫妇发现了放射性元素钋(Po)和镭(Ra)。中性的原子能发出带电的粒子, 可见原子是可分割的, 有结构的。1904 年, J. J. Thomson 构造了一个原子模型, 认为正电荷均匀分布在原子中(原子的大小约 10^{-10} m), 而电子在原子中

作某种有规则的排列。1911年, E. Rutherford 用 α 粒子轰击金箔, 研究散射出的 α 粒子的角分布, 发现有作大角度散射的 α 粒子。按 Thomson 模型, 原子对 α 粒子的作用较弱, α 粒子不可能作大角度散射。Rutherford 据此提出原子有核模型: 原子中正电荷集中在非常小的区域(约为 10^{-14} m 量级), 形成原子核, 而电子则在核外绕核运动。

原子有核模型与经典电磁理论相悖, 按经典电动力学, 绕核运动的电子, 因辐射而丧失能量, 终将“掉到”原子核中而使原子“崩溃”。然而现实世界中原子却稳定地存在着, 与经典物理理论存在尖锐的矛盾。

尽管经典物理学取得过巨大成功, 以上分析的一系列主要问题显示出经典物理理论还是有局限性的。每当分析涉及微观粒子的物理现象时, 经典物理学总会遇到原则性困难, 探索克服困难的途径成为 20 世纪初期物理学的主题。以下几节将回顾这一探索过程的主线。

思考题

证明: 黑体辐射的 Planck 公式, 在 $\nu \rightarrow \infty$ 时化作 Wien 公式, 在 $\nu \rightarrow 0$ 时化作 Rayleigh-Jeans 公式(取 $C_1/C_2 = 8\pi k/c^3$)。

§ 1.2 Planck-Einstein 光量子理论 Compton 效应

1. Planck 能量量子假设

在探索(1.1-3)式的理论基础的过程中。Planck 于 1900 年底形成了如下思想:

能量量子假设 对于一定频率 ν 的电磁辐射, 物体只能以 $h\nu$ 为能量单元不连续地发射或吸收能量。

按这个假设, 频率为 ν 的电磁辐射的最小能量单元为

$$\epsilon = h\nu \quad (1.2-1)$$

称作能量子或量子, 比例常数 h 称作 Planck 常数:

$$h = 6.62559 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

由能量子假设导出(1.1-3)式的简便方法是把空腔腔壁原子看成带电谐振子。每个原子振子有确定的振动基频 ν ; 在热平衡温度 T 时, 振动基频为 ν 的原子振子的能量取 $nh\nu$ (n 为整数) 的几率与 $e^{-nh\nu/kT}$ 成正比, 因此这类原子振子的平均能量为

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nh\nu/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/kT}} \quad (1.2-2)$$

(1.2-2)式中

$$\text{分母} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-h\nu/kT})^n = \frac{1}{1 - e^{-h\nu/kT}} \quad (|e^{-h\nu/kT}| < 1)$$

$$\text{分子} = h\nu \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nh\nu/kT} = \frac{h\nu e^{-h\nu/kT}}{(1 - e^{-h\nu/kT})^2}$$

由此得

$$\bar{\epsilon} = \frac{h\nu e^{-h\nu/kT}}{1 - e^{-h\nu/kT}} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (1.2-3)$$

这个平均能量可看作空腔中频率为 ν 的电磁辐射的能量。Rayleigh 和 Jeans 已算得空腔单位体积中频率在 $\nu \sim \nu + d\nu$ 间的振动数为 $8\pi\nu^2 d\nu/c^3$, 因此黑体辐射的能量密度分布为

$$\rho(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (1.2-4)$$

这就是 Planck 公式(1.1-3), 并求出了式中的两个经验参数:

$$C_1 = \frac{8\pi h}{c^3}, C_2 = \frac{h}{k}$$

经典物理学中, 能量变化是连续的, 而 Planck 第一次把分立的能量值引入物理学, 这一观念是认识上的一次飞跃, 受到 A. Einstein 的高度评价, 认为它是 20 世纪物理学研究的基础。

2. Einstein 光量子理论

Planck 的能量子假设只把腔壁原子振子的能量量子化, 并未把

腔内辐射场量子化。虽然辐射场与原子振子交换能量时会显示出连续性来,但辐射场本身还被看作连续的电磁波。为解释光电效应, Einstein 进一步发展了 Planck 能量子假设,于 1905 年提出了光量子假说。

光量子假设 电磁辐射不仅以能量子 $h\nu$ 的形式被发射或吸收,而且作为能量为 $h\nu$ 的粒子在空间以速度 c 运动。

这种粒子称作光量子或光子。

用光量子概念可圆满地解释光电效应。当足够高频率的光照射到金属时,金属中的电子立即吸收照射光子的能量 $h\nu$, 获得足够多能量的电子脱离金属表面成为光电子,若电子为克服金属表面的吸引力而损失的能量为 A , 则余下的能量为光电子的动能,有

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = h\nu - A \quad (1.2-5)$$

式中 m_e 为电子质量, v 为光电子速度; A 称作脱出功,依具体的金属材料而定。脱出功决定了临界频率 $\nu_0 = A/h$ 。光的频率决定光子的能量,如果照射光频率 $\nu < \nu_0$, 则电子不能获得足够多的能量克服脱出功,不会产生光电子。光的强度决定于光子的数目,因此对于 $\nu > \nu_0$ 的照射光,光强,光子多,产生的光电子多,光电流强度大。光电效应的全部特点均得以说明。

按相对论,静止质量 m_0 、运动速度 v 的粒子的能量为

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

且有能量动量关系

$$E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 p^2$$

对于光子, $v = c$, 必须要求光子的静止质量为 0 (因此, 光又被称作辐射场), 从而得到光子的能量动量关系

$$E = cp \quad (1.2-6)$$

为表示动量矢量 $\vec{p}$, 引入光子运动方向 (即光传播方向) 的单位矢 $\vec{n}$ 以及波矢 $\vec{k}$:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} = \frac{\omega}{c} \vec{n} \quad (1.2-7)$$

式中 λ 为光波波长, $\omega = 2\pi\nu$ 为角频率, $c = \lambda\nu$ 为光速, 这样, 可得到光子的能量、动量表达式:

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad (1.2-8)$$

$$\vec{p} = \frac{h\nu}{c} \vec{n} = \frac{h}{\lambda} \vec{n} = \hbar\vec{k} \quad (1.2-9)$$

式中
$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

是 Planck 常数的另一种表示, 有时称为约化 Planck 常数。(1.2-8)、(1.2-9)两式左端中的能量、动量是描写粒子性的量, 右端中的频率、波矢是描写波动性的量, 两式对于光把粒子性和波动性联系了起来, 是 Planck-Einstein 光量子理论的集中体现, 称为 Planck-Einstein 关系式。

3. Compton 效应

直接证明 Planck-Einstein 关系式正确的是 Compton 散射实验。1923 年, A. H. Compton 发现 X 射线被碳、石蜡等轻原子量物质散射后波长变长(频率变小), 波长的改变量与散射角有关, 这种现象称作 Compton 效应。经典电磁理论不能解释 Compton 效应。因为, 按经典电磁理论, 入射波的电矢量作用于散射物质中的自由电子, 使电子以同一频率作强迫振动, 发射同一频率的电磁波, 散射波的波长不会改变。Compton 应用光量子理论成功地解释了他在实验中所观察到全部结果。

按光量子概念, 入射 X 射线可看作光子流。轻原子量物质中, 电子在原子中的束缚能相对于 X 射线光子的能量很小, 可看作自由电子, Compton 散射可看作光子与自由电子碰撞的二体问题。碰撞前电子速度很小, 可视为静止。假设微观粒子单个碰撞事件中能量守恒、动量守恒, 于是碰撞只能发生在一个平面内, 如图 1.3 所示。设入射 X 光频率为 ν , 散射 X 光频率为 ν' , 则有守恒方程:

$$\begin{cases} h\nu + m_e c^2 - h\nu' = E_e & (1.2-10) \\ \vec{p} - \vec{p}' = \vec{p}_e & (1.2-11) \end{cases}$$

对电子应用相对论能量动量关系有

$$E_e^2/c^2 - p_e^2 = m_e^2 c^2$$

(1.2-10)²/c² - (1.2-11)², 得

$$\frac{1}{c^2} (h\nu + m_e c^2 - h\nu')^2 - (\vec{p} - \vec{p}')^2 = m_e^2 c^2 \quad (1.2-12)$$

对光子引用 Planck-Einstein 关系有

$$p = h\nu/c, p' = h\nu'/c$$

$$\vec{p} \cdot \vec{p}' = pp' \cos\theta = \frac{h^2 \nu \nu'}{c^2} \cos\theta$$

代入(1.2-12)式得:

$$\nu - \nu' - \frac{h\nu\nu'}{m_e c^2} (1 - \cos\theta) = 0$$

因 $\nu = c/\lambda, \nu' = c/\lambda'$, 由上式可解得散射波长 λ' 与入射波长 λ 的关系:

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta) \quad (1.2-13)$$

令

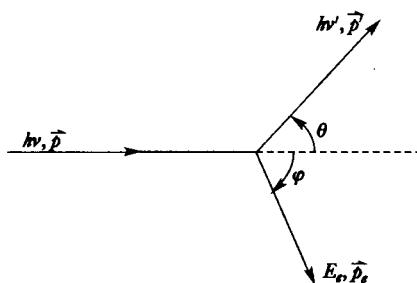


图 1.3