

工科研究生入
学试题与解答

GONGKE
YANJIUSHENGRUXUE
SHITIYUJIEDA

材料力学



天津科学技术出版社

工科研究生入学试题与解答

材 料 力 学

饶沛隆 段神尧 张玉琳 选编

天津科学技术出版社

前 言

1983年工科研究生材料力学试题及解答(1980~1982年)与读者见面之后,编者收到不少青年读者来信,他们非常欢迎这样的学习参考书,对提高材料力学学习水平很有帮助,要求继续选编近年材料力学题解。在天津科学技术出版社的支持下,我们继续选编了1983年~1985年三年的部分高等院校招收工科研究生的材料力学试题及解答。我们希望它对青年读者有所帮助。

不少青年谈到,材料力学课本学起来不难,内容好懂,但碰到难度较大的题目就无从下手,或者做完了题,不对答案就心中没底,希望找到一条学好材料力学的捷径。根据我们多年的教学经验,捷径是没有的。只有刻苦学习,多看多练多思考,方能学好,“熟能生巧”这个道理也适用于材料力学的学习。我们向青年读者推荐本书中的四百余题,形式多样,类型不同,有一定难度,各章内容联系较多,有助于思考。望青年读者在熟读材料力学教科书和做了相当数量基本练习的基础上,再把这些试题拿来作一下,然后与书中解答对照,检查自己哪些地方还没掌握。再学习,再提高,如此,方可事半功倍。如果把书拿来,从头到尾看上一遍,不动手做,不认真思考,效果是不会好的。有些难题无从下手,看看题解思路,得到启发,自己动手去做,这样也是可以提高的。我们还建议青年读者多做一些不同类型的题,这也是“见多识广”嘛!本书为您提供了类型繁多的试题。学习材料力学“入门不难,深造也是办得到的”。

本书试卷及解答均由各校命题教师提供,在附录中列出命题及解题老师的姓名。为保持试卷的原貌,原有试题一律不作增减,并注明给分标准。不少试题有多种解法,由于篇幅所限,只给出一种解法,请读者谅解。

本书试卷编排以来稿先后为序。在此,向提供试卷和帮助过编者的老师致谢。

限于编者水平,书中有不妥之处,恳请读者批评、指正。

编 者

1986年5月于天津大学

内 容 简 介

本书收编了22所高等院校1983年、1984年和1985年招收工科研究生的材料力学入学试卷69份，每题均有详细题解。所选试题形式多样，内容全面，有不少综合性试题，颇有启发性，有助于报考研究生的读者思考。

本书保持了每份试卷的完整性，并注明适用专业及各题得分标准，供考生了解各专业对材料力学的要求，供各兄弟院校参考。

本书可供报考研究生的读者、高等院校学生及自学材料力学的读者参考，还可作为材料力学教师命题及辅导学生的参考资料。

目 录

成都科技大学	(1)
(1983年)	(1)
(1984年)	(11)
南京化工学院	(20)
(1983年)	(20)
(1984年)	(27)
(1985年)	(35)
上海交通大学	(41)
(1983年)	(41)
(1984年)	(48)
东北工学院	(56)
(1983年)	(56)
(1984年)	(62)
(1985年)	(70)
上海科技大学	(77)
(1983年)	(77)
(1984年)	(83)
北京钢铁学院	(86)
(1983年)	(86)
(1984年)	(92)
(1985年)	(98)
浙江工学院	(109)
(1983年)	(109)
(1984年)	(120)
(1985年)	(133)
北京航空学院	(140)
(1983年)	(140)
(1984年)	(143)
(1985年)	(148)
北京化工学院	(153)
(1983年)	(153)
(1984年)	(157)
(1985年)	(160)
北京工业学院	(164)
(1983年)	(164)
(1984年)	(168)

(1985年)	(172)
西安交通大学	(177)
(1983年)	(177)
(1984年)	(183)
(1985年)	(188)
华东工程学院	(195)
(1983年)	(195)
(1984年)	(200)
(1985年)	(205)
兰州铁道学院	(210)
(1983年)	(210)
(1984年)	(214)
(1985年)	(221)
北方交通大学	(228)
(1983年)	(228)
(1984年)	(233)
(1985年)	(239)
中国科学技术大学	(243)
(1983年)	(243)
(1984年)	(246)
(1985年)	(249)
大连工学院	(252)
(1983年)	(252)
(1984年)	(256)
(1985年)	(265)
吉林工业大学	(272)
(1983年)	(272)
(1984年)	(279)
(1985年)	(284)
国防科学技术大学	(290)
(1983年)	(290)
(1984年)	(294)
(1985年)	(299)
清华大学	(305)
(1983年)	(305)
(1984年)	(309)
江西工学院	(315)
(1983年)	(315)
(1985年)	(317)
河北工学院	(322)
(1984年)	(322)
(1985年)	(329)

天津大学.....	(340)
(1983年)	(340)
(1984年)	(351)
(1985年)	(358)
[附录] 各校命题、解题教师名单.....	(369)

成都科技大学

(1983年)

适用专业：机械制造、机械学作一、二、三、四、五题；水工结构工程作一、二、三、四、六题

一、本题包括四小题（每小题5分共计20分）

(1) 当用长索提取重物时，应考虑绳索本身重量。如绳索的弹性模量为 E ，比重为 γ 及许用拉应力为 $[\sigma]$ ，试计算其空悬时的最大许用长度，并计算此时的总伸长变形。

(2) 单元体受力如图1-1所示。试计算三个主应力、最大剪应力和最大主应变之值。已知材料的 $E = 200 \text{ GN/m}^2$ 及 $\mu = 0.3$ 。

(3) 图1-2示圆钢轴的直径 $d = 8 \text{ cm}$ ，材料的弹性模量 $G = 0.4E = 80 \text{ GN/m}^2$ 。当轴受扭转力偶 M_x 作用时，与母线成 45° 的倾斜方向 ab 有线应变 $\epsilon = 2.5 \times 10^{-4}$ ，试计算 M_x 之值。

(4) 一矩形截面长压杆如图1-3所示，底端固定，上端具有销孔，通过销轴传递压力 P 。孔端在垂直销轴平面内有绕销轴转动余地，但在与销轴平行的平面内，上端即为夹箱约束，试绘出两个方向的约束简化图，并问 h 与 b 具有什么关系才合理？

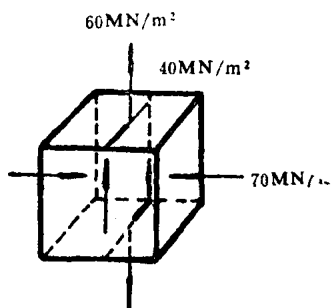


图 1-1

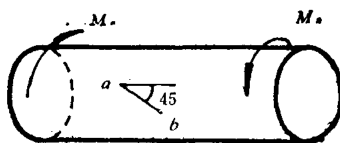


图 1-2

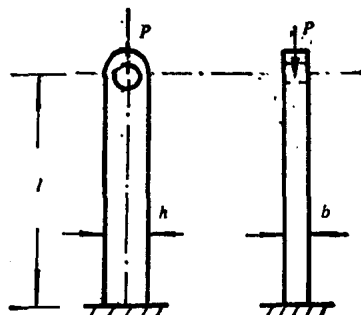


图 1-3

解：(1) 按强度条件

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{F} = \frac{\gamma F l}{F} = \gamma l = [\sigma]$$

所以

$$[l] = \frac{[\sigma]}{\gamma}$$

此时

$$\Delta l = \frac{N_{max} [l]}{2EF} = \frac{\gamma [l]^2}{2E} = \frac{[\sigma]^2}{2E\gamma}$$

(2) 单元体的两个主应力

$$\begin{aligned} \sigma_{\pm} &= \frac{60}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60}{2}\right)^2 + 40^2} \\ &= 80 \text{ MN/m}^2 \\ &\quad - 20 \text{ MN/m}^2 \end{aligned}$$

连同第三个主应力按大小排列有

$$\sigma_1 = 80 \text{ MN/m}^2, \sigma_2 = -20 \text{ MN/m}^2, \sigma_3 = -70 \text{ MN/m}^2$$

单元体的最大剪应力

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{80 - (-70)}{2} = 75 \text{ MN/m}^2$$

最大主应变

$$\begin{aligned} e_{\max} = e_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ &= \frac{1}{2 \times 10^5} [80 + 0.3(20 + 70)] \\ &= 5.35 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

(3) a点的应力状态如图1-4所示。

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{E}{0.8E} - 1 = 0.25$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu\sigma_3) = \frac{1+\mu}{E} \tau$$

故得 $\tau = \frac{E\varepsilon_1}{1+\mu} = \frac{2 \times 10^5 \times 2.5 \times 10^{-4}}{1.25} = 40 \text{ MN/m}^2$

所以 $M_n = W_n \tau = \frac{\pi d^3}{16} \times 40 = \frac{\pi \times 80^3}{16} \times 40$
 $= 4.02 \text{ kN} \cdot \text{m}$

(4) 当两个方向的稳定性一致时, 压杆才是经济合理的, 即要求两个方向的柔度相等。

压杆在两个方向约束形式的简化图如图1-5的(a)和(b)所示。

$$\mu_a = 0.7, \mu_b = 0.5$$

$$\lambda_a = \frac{\mu_a l}{i_a} = \frac{0.7l\sqrt{12}}{h}$$

$$\lambda_b = \frac{\mu_b l}{i_b} = \frac{0.5l\sqrt{12}}{b}$$

令 $\lambda_a = \lambda_b$
 即 $\frac{0.7l\sqrt{12}}{h} = \frac{0.5l\sqrt{12}}{b}$

故 $\frac{h}{b} = \frac{0.7}{0.5} = 1.4$

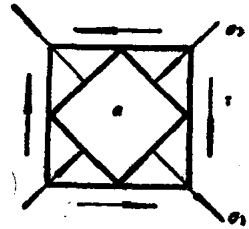
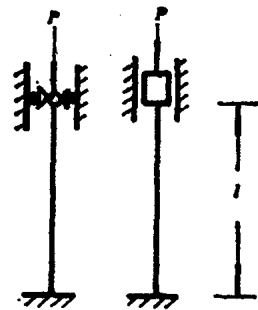


图 1-4



(a) (b)

图 1-5

二、本题有两小题(每小题10分共20分)

(1) 如图1-6所示, 三根同材料等长度和等截面的柔索, 互成120°, 在O点相联结。各预受张力10kN, 索3在垂直方向。之后, 在O点施加载荷P。试计算在三种不同情况下, 各索所承受之力: (a) P = 9kN; (b) P = 15kN; (c) P = 21kN。

解：先不计预张力，在 P 力作用下如将索视作杆，则系一次超静定问题 O 点受力如图1-7。

解法如下：

静力平衡条件

$$\begin{aligned} \text{由} \quad \Sigma X &= 0 \\ \text{得} \quad N_1 &= N_2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{由} \quad \Sigma Y &= 0 \\ \text{得} \quad (N_1 + N_2) \cos 60^\circ + N_3 - P &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式得

$$N_1 = P - N_3 \quad (3)$$

$$\text{几何条件 } \Delta l_3 = \Delta l_1 / \cos 60^\circ = 2\Delta l_1 \quad (4)$$

物理条件

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{N_1 l}{EF} \\ \Delta l_3 &= \frac{N_3 l}{EF} \end{aligned} \quad (5)$$

将(5)式代入(4)式得补充方程

$$\frac{N_3 l}{EF} = 2 \frac{N_1 l}{EF}$$

$$\therefore N_3 = 2N_1 \quad (6)$$

将(3)式代入(6)式得

$$N_3 = \frac{2}{3}P$$

$$N_1 = N_2 = \frac{1}{3}P$$

(a) $P = 9\text{kN}$ 时

$$N_1' = N_2' = \frac{1}{3} \times 9 = 3\text{kN} \quad (\text{拉})$$

$$N_3 = \frac{2}{3}P = \frac{2}{3} \times 9 = 6\text{kN} \quad (\text{压})$$

(b) $P = 15\text{kN}$ 时

$$N_1' = N_2' = \frac{1}{3} \times 15 = 5\text{kN} \quad (\text{拉})$$

$$N_3' = \frac{2}{3}P = \frac{2}{3} \times 15 = 10\text{kN} \quad (\text{压})$$

(c) $P = 21\text{kN}$ 时

$$N_1' = N_2' = \frac{1}{3} \times 21 = 7\text{kN} \quad (\text{拉})$$

$$N_3' = \frac{2}{3}P = \frac{2}{3} \times 21 = 14\text{kN} \quad (\text{压})$$

实际三柔索各受有预张力 10kN ，因此，应与上述结果叠加，还应考虑柔索的特性。

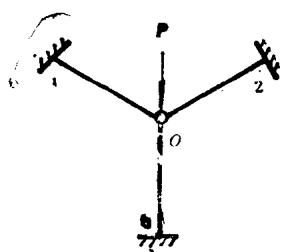


图 1-6

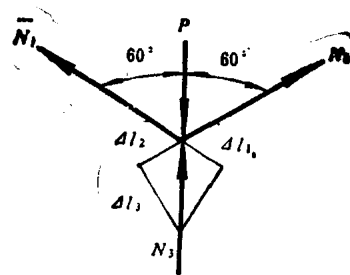


图 1-7

$$(a) \quad N_1 = N_2 = 10 + 3 = 13 \text{ kN} \quad (\text{拉})$$

$$N_3 = 10 - 6 = 4 \text{ kN} \quad (\text{拉})$$

(b) $N_3 = 10 - 10 = 0$, 即索3不受力, 当 P 作用时, 完全由索1和索2承受, 如图1-8所示, 此时根据平衡条件

$$\sum X = 0 \quad 2N_1 \cos 60^\circ - P = 0$$

$$\text{解得 } N_1 = N_2 = P = 15 \text{ kN} \quad (\text{拉})$$

(c) $N_3 = 10 - 14 = -4 \text{ kN}$, 由于柔索不能承受压力, 当 P 作用时完全由索1及索2承受, 与(b)情况相同, 故

$$N_3 = 0$$

$$N_1 = N_2 = P = 21 \text{ kN}$$

答: (a) $P = 9 \text{ kN}$ 时, $N_1 = N_2 = 13 \text{ kN}$, $N_3 = 4 \text{ kN}$,

(b) $P = 15 \text{ kN}$ 时, $N_1 = N_2 = 15 \text{ kN}$, $N_3 = 0$,

(c) $P = 21 \text{ kN}$ 时, $N_1 = N_2 = 21 \text{ kN}$, $N_3 = 0$. 各索均为拉力.

(2) 如图1-9(a)所示一U形结构刚架, 三段长度均为 l , 且抗弯刚度相同. 试求 Q 与 P 应具备什么关系才能保证两端点 A 与 D 之间无相对位移(可不考虑轴力 N 与剪力 Q 的影响).

解: 用能量法

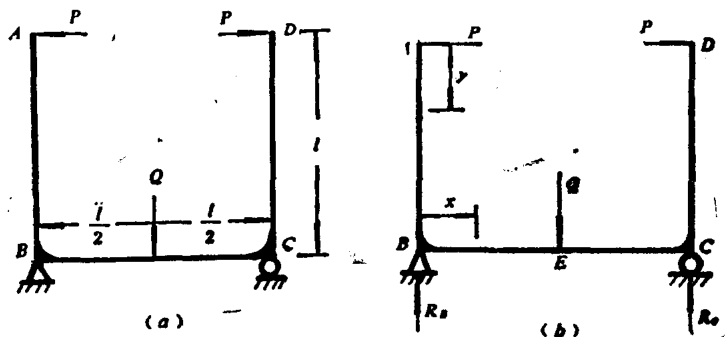


图 1-9

由于结构及载荷均对称(见图(b)所示), 所以有

$$R_B = R_C = \frac{Q}{2}$$

列 AB 、 BE 杆的弯矩方程, 并对 P 求导有

$$M(y) = Py$$

$$\frac{\partial M(y)}{\partial P} = y$$

$$M(x) = Pl - \frac{Q}{2}x$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial P} = l$$

A 、 D 两点的相对位移

$$\Delta_{AD} = 2 \int_0^l \frac{P}{EJ} y^2 dy + 2 \int_0^l \frac{1}{EJ} \left(Pl - \frac{Q}{2}x \right) l dx$$

$$= \frac{2Pl^3}{3EJ} + \frac{2Pl^3}{2EJ} - \frac{2Ql^3}{16EJ}$$

令 $\Delta_{AB} = 0$

则 $\frac{5Pl^3}{3EJ} = \frac{Ql^3}{8EJ}$

故得 $Q = \frac{40}{3}P$

三、铰接三角架如图1-10所示。当C点的位移恰与外载荷P的作用线一致时，试计算 θ 之值。设两杆的抗拉压刚度相同。（20分）

解：用能量法求解

由图1-10可知： $l_2 = l_1 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} l_1$

以节点C为分离体，其受力图如图1-11(a)所示。

由 $\Sigma y = 0$, $N_1 \sin 30^\circ - P \sin \theta = 0$

得 $N_1 = \frac{\sin \theta}{\sin 30^\circ} P = 2P \sin \theta$

由 $\Sigma x = 0$, $N_2 - N_1 \cos 30^\circ - P \cos \theta = 0$

得 $N_2 = P(\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta)$

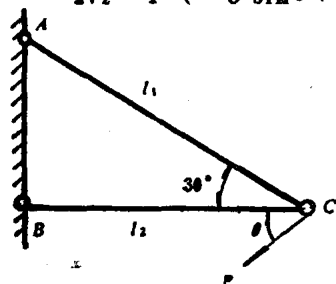


图 1-10

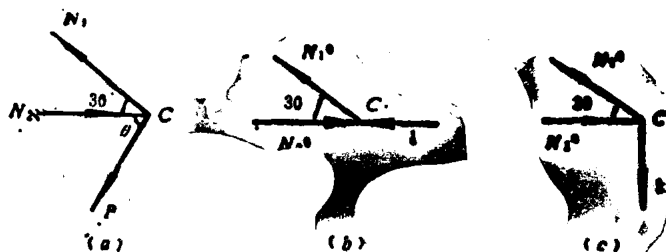


图 1-11

在求C点的水平位移 Δ_{Cx} 时，在C点水平方向加单位力，见图(b)，此时两杆轴力

$$N_1^0 = 0, N_2^0 = 1$$

$$\Delta_{Cx} = \frac{N_2 N_2^0 l_2}{EF} = \frac{P(\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta) \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} l_1}{EF}$$

$$= \frac{Pl_1}{EF} \left(\frac{3}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right)$$

在求C点铅垂位移 Δ_{Cy} 时，在C点铅垂方向加单位力，见图(c)，此时两杆轴力由 $\Sigma y = 0$

得 $N_1^0 = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2$

由 $\Sigma x = 0$

得 $N_2^0 = N_1^0 \cos 30^\circ = \sqrt{3}$

$$\Delta_{Cy} = \frac{1}{EF} (N_1 N_1^0 l_1 + N_2 N_2^0 l_2)$$

$$= \frac{Pl_1}{EF} \left[2\sin\theta \times 2 + (\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta) \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$= \frac{Pl_1}{EF} \left[4\sin\theta + \frac{3}{2} \times \sqrt{3}\sin\theta + \frac{3}{2}\cos\theta \right]$$

若C点位移恰与P方向一致，则要求

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\Delta Cy}{\Delta Cx} = \frac{4\sin\theta + \frac{3\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{3}{2}\cos\theta}{\frac{3}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta}$$

$$= \frac{8\sin\theta + 3\sqrt{3}\sin\theta + 3\cos\theta}{3\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta}$$

即 $3\sin^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta\sin\theta = 8\cos\theta\sin\theta + 3\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta + 3\cos^2\theta$

或 $-3(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \cos\theta\sin\theta(8 + 2\sqrt{3})$

或 $-3\cos 2\theta = (4 + \sqrt{3})\sin 2\theta$

可写成 $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = -\frac{3}{4 + \sqrt{3}} = -0.5234$

$$2\theta = 152.4^\circ$$

所以 $\theta = 76.2^\circ$

四、外伸梁的长度及载荷均示于图1-12(a)。由于材料的性质而设计为T形截面，几何尺寸见图(b)。已给出形心位置 $Z_1 = 103\text{mm}$ 及截面的形心主惯性矩 $J_x = 12.12 \times 10^{-6}\text{m}^4$ 。试绘出梁的剪力图及弯矩图，并将正应力及剪应力在支座B右侧截面上沿高度的分布规律绘出曲线（要正确标注特殊点的应力值，但正应力与剪应力可用不同比例尺绘图）。（20分）

解：（1）求支反力（参看图(c)所示）：

根据 $\Sigma M_A = 0$

有 $6 \times 3 + 2 \times 4 - 4R_B - 2 = 0$

得 $R_B = 6\text{kN}$

根据 $\Sigma y = 0$

有 $R_A + 6 - 4 - 3 = 0$

得 $R_A = 1\text{kN}$

（2）绘Q和M图如图(d)、(e)所示。

（3）计算B支座右侧截面的应力：

$$W_1 = \frac{J}{Z_1} = \frac{12.12 \times 10^{-6}}{0.103} = 117.67 \times 10^{-6}\text{m}^3$$

$$W_2 = \frac{J}{Z_2} = \frac{12.12 \times 10^{-6}}{0.16 - 0.103} = 212.63 \times 10^{-6}\text{m}^3$$

$$\sigma_1 = \frac{M}{W_1} = \frac{6000}{117.67} \times 10^3 = 51\text{MN/m}^2(\text{压})$$

$$\sigma_2 = \frac{M}{W_2} = \frac{6000}{212.63} \times 10^3 = 28.2\text{MN/m}^2(\text{拉})$$

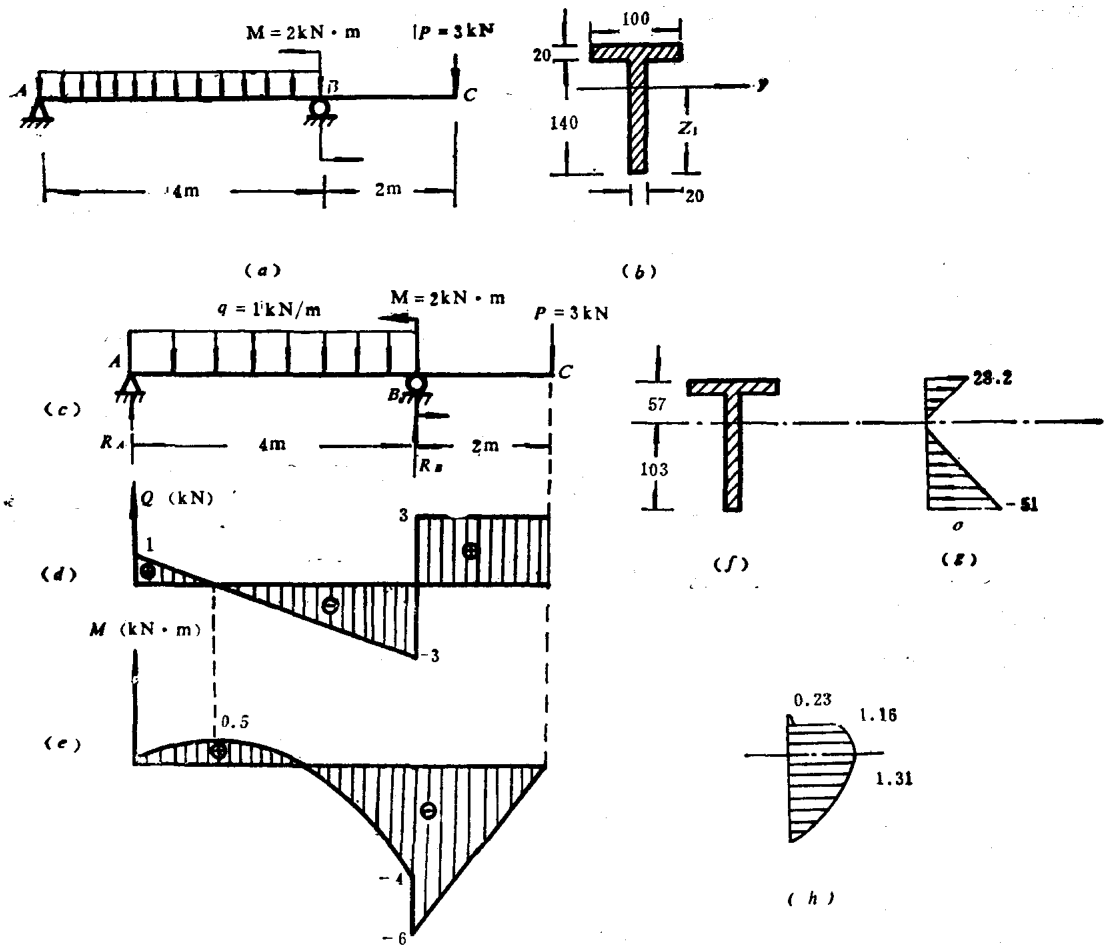


图 1-12

剪应力计算式为 $\tau = \frac{QS}{bJ}$ 计算覆板与翼缘交界处翼板上的剪应力 τ_v 、交界处复板上的剪应力 τ_t 及最大剪应力 τ_{max} 。

$$\tau_v = \frac{3000 \times \frac{1}{2} (0.057^2 - 0.037^2) \times 0.1}{0.1 \times 12.12 \times 10^{-6}} = 0.23 \text{ MN/m}^2 \text{ (正剪应力)}$$

$$\tau_t = \frac{3000 \times \frac{1}{2} (0.057^2 - 0.037^2) \times 0.1}{0.02 \times 12.12 \times 10^{-6}} = 1.16 \text{ MN/m}^2 \text{ (正剪应力)}$$

$$\tau_{max} = \frac{3000 \times \frac{1}{2} \times 0.02 \times 0.103^2}{0.02 \times 12.12 \times 10^{-6}} = 1.31 \text{ MN/m}^2 \text{ (正剪应力)}$$

(4) 绘正应力及剪应力沿B右侧截面高度的分布图如图(g)、(h)所示，图中应力单位为 MN/m^2 。

五、如图 1-13(a) 所示立杆长度为 l ，抗弯刚度为 EJ ，下端固定，上端右侧由一柔度系数（单位力引起的变形） $\alpha = l^3 / 2 EJ$ 的自然状态的弹簧连接。如在杆的中部 B 受一速度为 v 的重物 Q 水平冲击。要求计算杆件的支反力（杆的自重不计）。（20分）

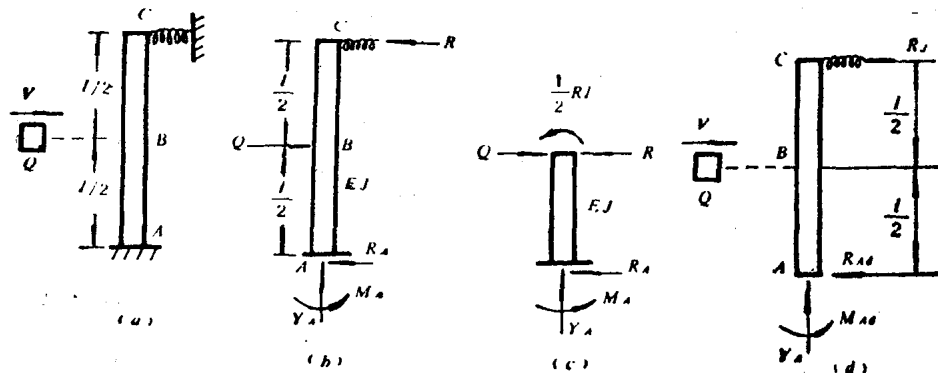


图 1-13

解：先将 Q 视作在水平方向作用于立杆的静荷，求弹簧支座的静荷支反力 R 及 B 点的静荷位移 Δ_1 ；之后求动荷系数 K_d 及立柱的动荷支反力。

(1) 求弹簧的静荷支反力 R （见图(b)所示）：

根据变形协调条件，立柱端点 C 的水平位移与弹簧的压缩变形应相等，即

$$\frac{Q \left(\frac{l}{2} \right)^3}{3 EJ} + \frac{Q \left(\frac{l}{2} \right)^2 \left(\frac{l}{2} \right)}{2 EJ} - \frac{R l^3}{3 EJ} = \alpha R$$

将 $\alpha = \frac{l^3}{2 EJ}$ 代入上式得

$$\frac{Q l^3}{24 EJ} + \frac{Q l^3}{16 EJ} = R \left(\frac{l^3}{3 EJ} + \frac{l^3}{2 EJ} \right)$$

即
$$\frac{5 l^3}{6 EJ} R = \frac{5 Q l^3}{48 EJ}$$

故
$$R = \frac{Q}{8}$$

立柱固定端的静荷支反力

$$R_A = Q - R = \frac{7}{8} Q$$

及

$$M_A = Q \frac{l}{2} - R l = \frac{3}{8} Q l$$

(2) 计算 B 点的静荷位移：

根据图 (c) 由叠加原理可知 B 点的静荷位移

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{Q \left(\frac{l}{2} \right)^3}{3 EJ} - \frac{R \left(\frac{l}{2} \right)^3}{3 EJ} - \frac{\left(\frac{1}{2} R l \right) \left(\frac{l}{2} \right)}{2 EJ} \\ &= \frac{11 Q l^3}{384 EJ} \end{aligned}$$

(3) 推导动荷系数:

运用能量守恒定律 (见图(d)所示)

$$\frac{Q}{2g} v^2 = \frac{1}{2} C \Delta^2$$

式中C为刚性系数

$$C = \frac{Q}{\Delta}$$

于是

$$\frac{Q}{2g} v^2 = \frac{Q}{2\Delta} \Delta^2$$

即

$$\frac{v^2}{g} = \left(\frac{\Delta_d}{\Delta_s} \right)^2 \Delta_s$$

而

$$\frac{\Delta_d}{\Delta_s} = K_d \quad (\text{动荷系数})$$

故

$$K_d = \sqrt{\frac{v^2}{g \Delta_s}} = \sqrt{\frac{384 E J v^2}{11 Q l^3 g}}$$

(4) 立柱受冲击时的动荷支反力

$$R_d = K_d R = \frac{1}{8} K_d Q$$

$$R_{dd} = K_d R_d = \frac{7}{8} K_d Q$$

及

$$M_{dd} = K_d M_d = \frac{3}{8} K_d Q l$$

六、水平面内有半圆环如图 1-14(a)所示, 左端为固定约束, 右端为一铅垂连杆支座, 在圆弧顶点受竖直力P作用。半圆环半径为R, 系由圆截面钢杆弯曲而成, 抗弯刚度可用EJ表达, 钢材的G=0.4E。试写出求解右端连杆支座反力的基本计算式。(20分)

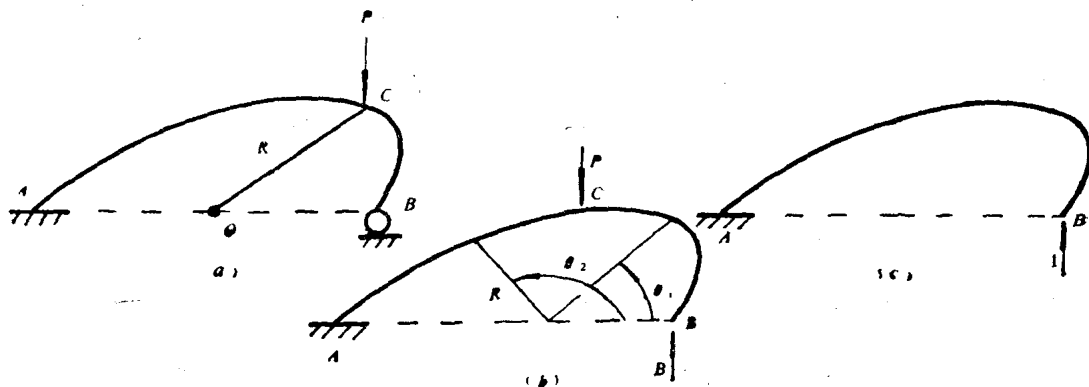


图 1-14

解: 该结构为一次超静定, 可视连杆支座为多余约束, 去掉它用多余支反力B代替, 构成静定基 (见图(b)所示), 用能量法解, 先分段求半圆环的弯矩和扭矩内力素 (不计横截面上的剪力内力素)。

外力P作用下的内力素 (见图(b)所示): BC段的弯矩

$$M_{BC} = BR \sin \theta_1 \quad \left(0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

CA段的弯矩

$$\begin{aligned} M_{CA} &= BR \sin \theta_2 - PR \sin \left(\theta_2 - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= BR \sin \theta_2 + PR \cos \theta_2 \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \pi \right) \end{aligned}$$

BC段的扭矩

$$M_{BC} = BR (1 - \cos \theta_1) \quad \left(0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

CA段的扭矩

$$\begin{aligned} M_{CA} &= BR (1 - \cos \theta_2) - PR \left[1 - \cos \left(\theta_2 - \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= BR (1 - \cos \theta_2) - PR (1 - \sin \theta_2) \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \pi \right) \end{aligned}$$

单位力作用下的弯矩和扭矩 (见图(c)所示)

$$\text{BC段的弯矩 } M_{BC}^* = R \sin \theta_1 \quad \left(0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{CA段的弯矩 } M_{CA}^* = R \sin \theta_2 \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \pi \right)$$

$$\text{BC段的扭矩 } M_{BC}^* = R (1 - \cos \theta_1) \quad \left(0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{CA段的扭矩 } M_{CA}^* = R (1 - \cos \theta) \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \pi \right)$$

将上面各式代入求静定基B点位移的公式, 但与原结构比较应等于零, 即

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(BR \sin \theta_1) (R \sin \theta_1) R}{EJ} d\theta_1 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(BR \sin \theta_2 + PR \cos \theta_2) (R \sin \theta_2) R}{EJ} d\theta_2 \\ & + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{BR (1 - \cos \theta_1) R (1 - \cos \theta_1) R}{GJ} d\theta_1 + \\ & + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{[BR (1 - \cos \theta_2) - PR (1 - \sin \theta_2)] R^2 (1 - \cos \theta_2)}{GJ} d\theta_2 = 0 \end{aligned}$$

题设 $G = 0.4E$, 并知 $J_r = 2J$, 代入上式同时消去公因子 R^3/EJ 得

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} B \sin^2 \theta_1 d\theta_1 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (B \sin^2 \theta_2 + P \cos \theta_2 \sin \theta_2) d\theta_2 + \\ & + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1.25 B (1 - \cos \theta_1)^2 d\theta_1 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1.25 [B (1 - \cos \theta_2)^2 + \\ & - P (1 - \sin \theta_2) (1 - \cos \theta_2)] d\theta_2 = 0 \end{aligned}$$

此方程为求解结构支座反力B的基本计算式, 即为原题意所要求的答案。

下面继续求出B值以作参考。

将上式逐项进行积分后得