

DAXUESHENG ZHI YOU

材料力学 解题分析

江苏科学技术出版社

材料力学解题分析

王 牧 吴家骥

江苏科学技术出版社

材料力学解题分析

王 牧 吴家骥

出版：江苏科学技术出版社

发行：江苏省新华书店

印刷：江苏射阳印刷厂

开本 787×1092 1/32 印张 17.875 字数 400,000

1983年10月第1版 1987年8月第2次印刷

印数：23,001—28,000册

ISBN 7-5345-0088-5/O·6

统一书号：13196·150 定价：3.80元

责任编辑 高志一

《大学生之友》丛书出版说明

大学理工科的学生,包括电视大学、职工大学的学生,在学习过程中往往要演算大量的习题,以加深对课程内容的理解和记忆.但在解题时,经常会遇到各种各样的困难.《大学生之友》丛书就是为了帮助他们提高解题能力,熟练演算技巧,牢固地掌握学科知识而出版的.

丛书以解题分析为主.为了便于阅读,每节首先简要介绍有关的概念、定律和公式.然后,用较大的篇幅选择有代表性的例题进行剖析,讲述解题的思路,归纳解题的规律,指出必须注意的事项.最后,附以适量的习题,并提供答案或提示.

丛书内容密切配合大学教材,选题以数理化基础课和专业基础课为主,兼顾各专业课.各书的出版时间,也基本上按此顺序安排,逐步配套.

我们的愿望,想使这套丛书成为大学生喜爱的“朋友”.能否如愿,还有待于广大师生的检验.我们诚恳地欢迎读者对每一本书提出宝贵意见,使它们成为名副其实的“大学生之友”.

江苏科学技术出版社

前 言

本书通过大量例题，着重阐述求解材料力学问题的分析方法和注意要点。全书有两部分：一部分是材料力学的基本内容，包括拉伸、压缩、剪切、扭转、弯曲、应力状态、应变状态、平面图形的几何性质及压杆稳定等问题；另一部分是一些专题，包括应用能量法确定弹性系统的位移、超静定系统、薄壁壳体 and 厚壁圆筒等问题。

在高等工业学校中，材料力学是一门重要的技术基础课。它的内容是后续课程的基础，而它研究问题和解决问题的方法与基础课也有些不同，对于培养学生分析和解决实际问题的能力有重要的影响。尽管编者对例题类型、解题方法等方面做了较详细的分析和讨论，但是限于水平，书中缺点和错误一定还不少，恳切希望读者多多批评指正。

本书第一章至第六章由吴家骥编写，第七章至第十二章由王牧编写。南京化工学院丘侃教授详细审阅了全书，提出了十分宝贵的意见。此外，无锡轻工业学院方汉英同志编写了第九章的一部分初稿，并对各章初稿提出了许多宝贵意见。彭蕙苓同志对第一章至第六章的例题和习题进行了复核演算。我们在此一并表示诚挚的谢意。

编 者

1980年8月

目 录

第一章 轴向拉伸及压缩

§ 1-1 直杆受拉(压)时横截面上的轴力及应力	1
§ 1-2 直杆受拉(压)时的强度计算	9
§ 1-3 直杆受拉(压)时的变形计算	16
§ 1-4 变截面直杆受拉(压)时的应力和 变形 考虑自重时的计算	24
§ 1-5 轴向拉压时的超静定问题	30
习题	44

第二章 剪 切

§ 2-1 剪切和挤压的实用计算	53
§ 2-2 铆接的计算	60
§ 2-3 焊接的计算	66
习题	71

第三章 扭 转

§ 3-1 直杆受扭转时横截面上的扭矩	76
§ 3-2 圆轴扭转时的应力和变形 强度条件和刚度条件	84
§ 3-3 扭转时的超静定问题	96
§ 3-4 密圈螺旋弹簧的应力和变形计算	100
习题	109

第四章 弯曲时的内力和应力

§ 4-1 直杆受弯曲时横截面上的剪力及弯矩 剪力图及弯矩图	113
---	-----

§ 4-2	载荷集度 q 、剪力 Q 及弯矩 M 间的关系	121
§ 4-3	直杆弯曲时横截面上的正应力及剪应力 正应力强度条件及剪应力强度条件	129
§ 4-4	开口薄壁截面杆的弯曲中心	143
§ 4-5	变截面梁的强度计算	150
	习题	156

第五章 弯曲时的变形

§ 5-1	弯曲变形计算的重积分法	163
§ 5-2	求弯曲变形的叠加法 梁的刚度条件	173
§ 5-3	求弯曲变形的共轭梁法	189
§ 5-4	求弯曲变形的有限差分法	202
§ 5-5	简单超静定梁的解法	215
	习题	225

第六章 应力状态 应变状态

§ 6-1	平面应力状态分析 应力圆	228
§ 6-2	平面应变状态分析 应变圆	240
§ 6-3	空间应力状态下的最大应力及变形	250
§ 6-4	强度理论	259
	习题	262

第七章 平面图形的几何性质

§ 7-1	静矩 形心	267
§ 7-2	轴惯性矩 极惯性矩 惯性积	274
§ 7-3	平行移轴公式 组合图形	284
§ 7-4	转轴公式 主惯性轴 主惯性矩	298
§ 7-5	惯性圆	308
	习题	316

第八章 组合变形

§ 8-1 斜弯曲	320
§ 8-2 拉伸(压缩)与弯曲的组合变形	333
§ 8-3 偏心拉伸(压缩) 截面核心	344
§ 8-4 扭转与弯曲的组合变形	354
习题	364

第九章 应用能量法确定弹性系统的位移

§ 9-1 杆件变形能及位移的计算	367
§ 9-2 卡氏定理	380
§ 9-3 莫尔定理	390
§ 9-4 图乘法	403
§ 9-5 功的互等定理 位移互等定理	414
习题	418

第十章 超静定系统

§ 10-1 应用变形比较法解超静定系统	422
§ 10-2 应用有限差分法解超静定梁	430
§ 10-3 应用卡氏定理解超静定梁	435
§ 10-4 连续梁及三弯矩方程	439
§ 10-5 力法的正则方程	451
习题	464

第十一章 压杆稳定

§ 11-1 压杆的临界力 确定临界力的积分法	467
§ 11-2 确定临界力的能量法	480
§ 11-3 压杆的稳定计算(安全系数法)	488
§ 11-4 压杆的稳定计算(折减系数法)	494
习题	502

第十二章 薄壁壳体及厚壁圆筒

§ 12-1 按无矩理论确定薄壁回转壳体的应力	506
§ 12-2 厚壁圆筒的应力计算	519
§ 12-3 内压厚壁圆筒的强度计算	526
§ 12-4 组合圆筒应力的计算	535
习题	545
习题答案	548

第一章 轴向拉伸及压缩

§ 1-1 直杆受拉(压)时横截面上的轴力和应力

一、内 容 提 要

一根直杆,若所受外力都沿着直杆的轴线作用,则将产生轴向拉伸或轴向压缩变形。

应用截面法,就可求出直杆受拉(压)时横截面上的内力 S ,它的作用线一定沿着直杆的轴线,称为轴力,它的大小和指向可以根据截面任一侧部分的静力平衡条件求出。若轴力的指向离开截面,杆就产生拉伸变形(图 1-1-1),通常将这种轴力定为正值;若轴力的指向向着截面,杆就产生压缩变形(图 1-1-2),轴力就定为负值。在具体计算中,有时用绝对值表示轴力的大小,然后说明该轴力是拉力还是压力。

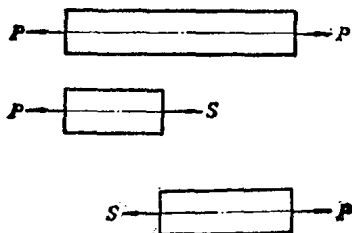


图 1-1-1

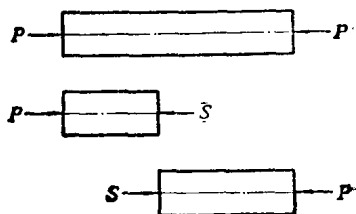


图 1-1-2

表示轴力沿杆件长度变化的图线称为轴力图。通常将轴力图画在杆的一侧。

轴向受拉(压)时横截面上只有正应力 σ 作用,计算公式为

$$\sigma = \frac{S}{A} \quad (1-1-1)$$

式中 S ——横截面上的轴力;

A ——横截面的面积。

正应力 σ 的符号规则:拉应力为正(指向离开截面),压应力为负(指向向着截面)。由公式(1-1-1)可见正应力 σ 与轴力 S 两者的符号规则是一致的。在具体计算中,有时用绝对值表示正应力的大小,然后说明它是拉应力还是压应力。

应该指出,除了外力作用点附近及杆件横截面突变附近的小范围以外,对于直杆的任一横截面,公式(1-1-1)都能适用。

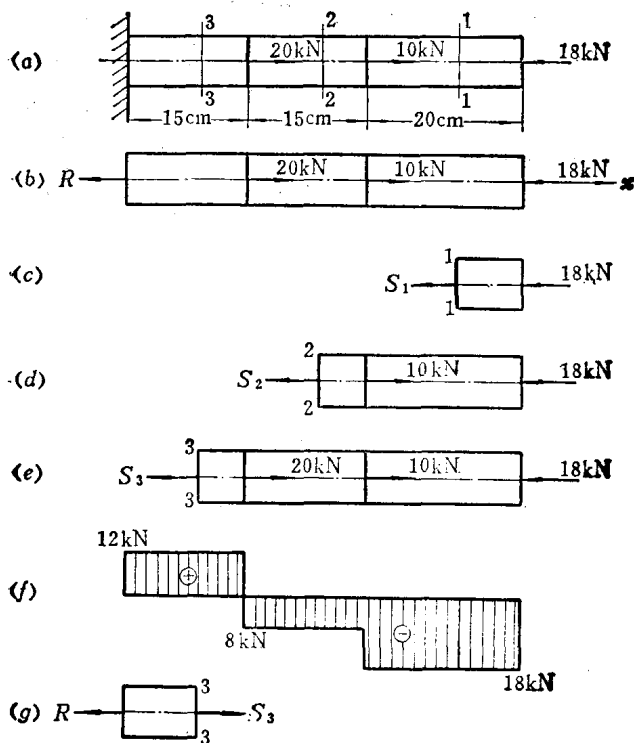
二、例题分析

例题 1-1-1 等截面直杆,左端固定,受力情况如图(a)所示。试求:(1)直杆的轴力图;(2)各段杆横截面上的正应力 σ 。设杆的横截面为圆形,直径 $d=1\text{cm}$ 。

解 在材料力学中,在分析研究构件的强度和刚度问题时,首先需要计算构件的内力。所以,计算构件的内力是研究强度和刚度问题的重要基本功。

计算构件内力的方法是截面法,其理论基础是平衡条件,在本例题中将详细分析讨论内力的计算方法和步骤。

(1) 为了计算杆件的轴力,首先要知道杆件所受的全部外力,即载荷及约束反力。在本例题中,杆件左端的约束反力



例题 1-1-1 图

还未确定,为了决定这个反力,我们解除左端的约束,并假定反力的指向向左,画出该杆的受力图如图(b)所示。其次,选取 x 轴,使其沿着杆的轴线,向右为正。写出静力平衡方程 $\sum X = 0$, 即

$$-18 + 10 + 20 - R = 0$$

由此即可求得固定端的约束反力:

$$R = +12 \text{ kN}$$

得到的正号说明我们假定 R 的指向向左是正确的。

弄清全部外力之后,就可计算内力。本题中的直杆,根据外力作用的情况,不难看出它在三段中的内力都不相同,所以,必须对于其中的每一段应用截面法来计算。取各段中截面右侧部分研究,假设截面上的内力都是拉力,画出受力图如图(c)、(d)、(e)所示,于是根据静力平衡方程 $\sum X = 0$,就可求得各段的内力。

$$\begin{aligned} \text{右段:} \quad & -S_1 - 18 = 0 \\ \text{所以} \quad & S_1 = -18 \text{ kN} \\ \text{中段:} \quad & -S_2 - 18 + 10 = 0 \\ \text{所以} \quad & S_2 = -8 \text{ kN} \\ \text{左段:} \quad & -S_3 - 18 + 10 + 20 = 0 \\ \text{所以} \quad & S_3 = +12 \text{ kN} \end{aligned}$$

再次强调指出,由平衡方程所求出各段内的轴力,得正号的,说明我们假设该段的轴力为拉力是正确的;得负号的,则说明与假设相反,该段的轴力实际为压力,本题中右段和中段内的轴力就是这种情况。

根据计算得到的各段杆中的轴力大小及符号,就可作出轴力图,如图(f)所示。作图时可选取适当比例尺,以平行于杆轴的坐标表示各横截面的位置,垂直于杆轴的坐标表示轴力的数值。显然,从轴力图可以清楚地看出,整个杆件中轴力的情况。从图中还可看出,在各个集中力作用的截面附近,轴力发生突变。

还应指出,我们从右到左应用截面法,求各段中的轴力时,并未用到左端的约束反力 R ,可见,在某些问题中,不一定要先求出杆件的约束反力。不过作为一般规律,首先要知道杆件所受的全部外力,而且我们可以应用求得的约束反力 R 来校核计算结果。为此应用截面法,取截面 3-3 以左的一段杆

(图 g), 由 $\sum X = 0$, 得

$$S_3 - R = 0$$

所以 $S_3 = +12 \text{ kN}$

显然, 结果是一致的。这说明计算过程正确。

应该指出, 轴力图的正负号, 也是表示杆件变形情况的。正的轴力表示该段杆件产生拉伸变形, 负的轴力表示产生压缩变形。至于轴力的指向, 则决定于所考虑的是杆件的哪一部分。例如研究截面 3-3 的轴力时, 若取截面右侧部分, 则正值轴力 S_3 的指向向左, 即正值轴力的指向为离开截面 (见图 e); 若取截面左侧部分, 则正值轴力 S_3 的指向向右, 但它的指向仍是离开截面 (见图 g)。所以, 从轴力图不但可以知道轴力的大小, 还可根据它的正负号来决定它的指向是指向截面还是离开截面, 也就是从轴力图还可看出每段杆件是受拉还是受压。

(2) 根据以上所求出各段杆的轴力, 应用公式 (1-1-1), 就可求得各段横截面上的正应力。

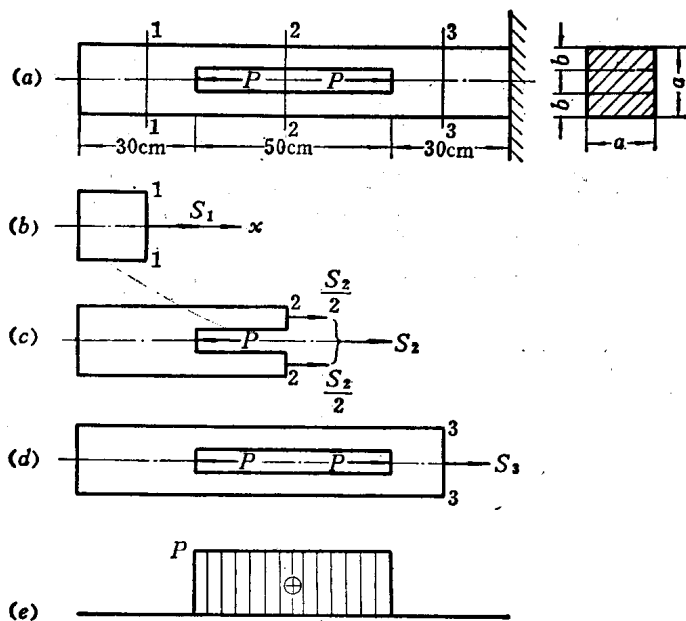
$$\begin{aligned} \text{右段: } \sigma_{1-1} &= \frac{S_1}{A} = \frac{-18 \times 1000}{\frac{\pi}{4} \times (0.01)^2} \\ &= -229 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = -229 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{中段: } \sigma_{2-2} &= \frac{S_2}{A} = \frac{-8 \times 1000}{\frac{\pi}{4} \times (0.01)^2} \\ &= -101.9 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = -101.9 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{左段: } \sigma_{3-3} &= \frac{S_3}{A} = \frac{+12 \times 1000}{\frac{\pi}{4} \times (0.01)^2} \\ &= +152.8 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = +152.8 \text{ MPa} \end{aligned}$$

显然,在右、中两段中的正应力为负号,表示它们都是压应力;而左段中的正应力为正号,表示它是拉应力。

例题1-1-2 正方形截面杆有一切槽, $a=3\text{ cm}$, $b=1\text{ cm}$, 沿杆轴受两个方向相反,大小皆等于 P 的力作用,如图(a)所示。(1) 画出直杆的轴力图; (2) 设 $P=30\text{ kN}$, 试计算各段杆内横截面上的正应力。



例题 1-1-2 图

解 图(a)所示的直杆,在杆的两端及中间处的横截面不相等,但在每一段内横截面不变,这种直杆的应力计算方法与等截面直杆相同。

(1) 分别计算直杆在三段中各横截面上的内力。对每一段应用截面法,并设各段内力都为拉力,如图(b)、(c)、(d)所

示。从图(c)可见，在截面 2-2 的上、下部分都有内力作用，由对称可知其各为 $\frac{S_2}{2}$ ，且合力通过杆的轴线。于是由静力平衡方程 $\sum X = 0$ ，可求得各段的内力。

$$\text{左段:} \quad S_1 + 0 = 0$$

$$\text{所以} \quad S_1 = 0$$

$$\text{中段:} \quad \frac{S_1}{2} + \frac{S_2}{2} - P = 0$$

$$\text{所以} \quad S_2 = P$$

$$\text{右段:} \quad -P + P + S_3 = 0$$

$$\text{所以} \quad S_3 = 0$$

根据以上结果，就可画出杆的轴力图，如图(e)所示。从轴力图可以看出，只在杆的中间一段内有轴力，而在杆的左、右两段内都没有轴力。由此可见，杆件受外力作用后，各段内的轴力不但可能为拉力或为压力，也可能为零(即既不受拉，也不受压)。

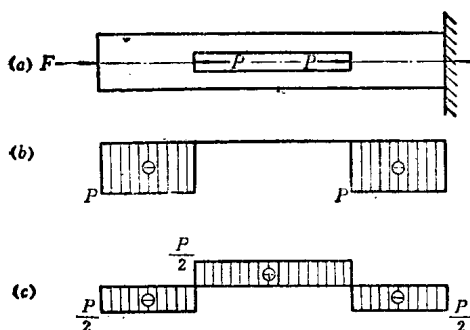
(2) 根据轴力图，求各段内的正应力。

$$\text{左段:} \quad \sigma_{1-1} = \frac{S_1}{A_1} = \frac{0}{A_1} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{中段:} \quad \sigma_{2-2} &= \frac{S_2}{A_2} = \frac{+P}{A_2} = \frac{+30 \times 1000}{3 \times 2 \times 10^{-4}} \\ &= +50 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

$$\text{右段:} \quad \sigma_{3-3} = \frac{S_3}{A_3} = 0$$

例题 1-1-3 设对例题 1-1-2 中的直杆，增加一个力 F ，作用于杆的左端，如图(a)所示。试就下列情况，分别画出杆的轴力图：



例题 1-1-3 图

$$(1) F = P,$$

$$(2) F = \frac{P}{2}.$$

解 用截面法, 分别求出两种受力情况下各段杆中的轴力, 分别画出轴力图, 如图(b)、(c)所示. 注意, 在第一种受力情况下, 中间一段杆的

轴力为零. 而在第二种受力情况下, 虽然各段杆轴力的绝对值相等, 但它们的符号不同(即杆的左、右两段受压, 而中间一段则受拉).

例题 1-1-4 有一多层框架式建筑的阶梯式柱子, 上端受到屋架传来的力, $P_1 = 100 \text{ kN}$, 两边受到楼板传来的力, $P_2 = 50 \text{ kN}$, 如图(a)所示. 试绘出该阶梯柱的轴力图. 设阶梯柱上、中、下三段的横截面面积分别为 $A_1 = 200 \text{ cm}^2$, $A_2 = 300 \text{ cm}^2$ 及 $A_3 = 400 \text{ cm}^2$, 计算各段杆内的正应力 σ .

解 虽然楼板传给阶梯式柱子的力 P_2 不通过阶梯柱的轴线, 但由于这些成对加载且大小皆为 P_2 的力都对称于阶梯柱的轴线, 可见每一对力的合力应沿着柱的轴线, 所以对阶梯柱的变形来说仍为轴向压缩.

由截面法可求得各段的轴力(参阅图 b、c、d):

$$S_1 = P_1 = 100 \text{ kN} \quad (\text{压力})$$

$$S_2 = P_1 + 2P_2 = 200 \text{ kN} \quad (\text{压力})$$

$$S_3 = P_1 + 4P_2 = 300 \text{ kN} \quad (\text{压力})$$

由此即可作出阶梯柱的轴力图, 如图(e)所示.