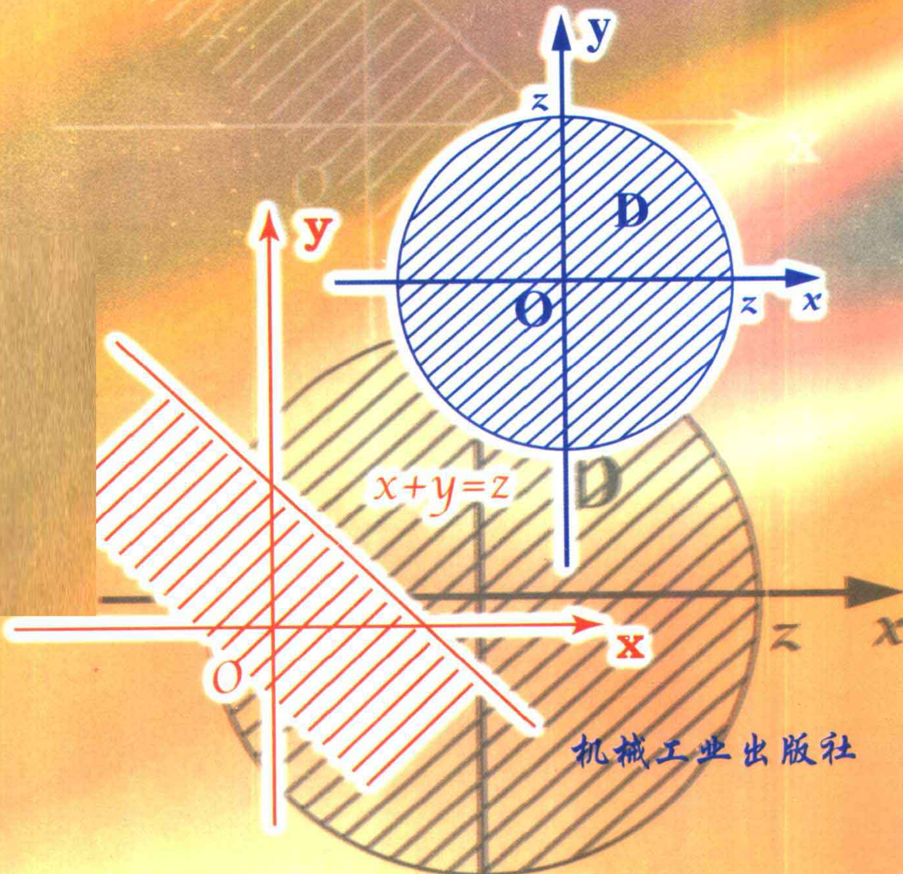
概率论

朱翼隽　陶永德　王文初　主编



机械工业出版社

概 率 论

朱翼隽 陶永德 王文初 主编

机 械 工 业 出 版 社

概率论是研究随机现象规律性的一个数学分支，是近代数学的重要组成部分，掌握概率论的基本知识及其应用能力，应是一个大学生的基本素质。全书共五章：第一章随机事件与概率；第二章随机变量及其分布；第三章多维随机变量及其分布；第四章随机变量的数字特征；第五章大数定律与中心极限定理。本书可作大学生教材用和有关人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

概率论/朱翼隽等主编．-北京：机械工业出版社，1998.8

ISBN 7-111-06378-3

Ⅰ．概…　Ⅱ．朱…　Ⅲ．概率论　Ⅳ．O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 12257 号

出 版 人：马九荣（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

责任编辑：张秀恩　王兴垣　版式设计：霍永明

责任校对：李汝庚　封面设计：姚学峰

责任印制：路　琳

中国建筑工业出版社密云印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行

1998 年 10 月第一版　第一次印刷

787mm×1092mm 1/32 · 5.375 印张 · 114 千字

0 001－5000 册

定价：7.00 元

前　言

本书是编者在江苏理工大学多年教学实践的基础上，参照全国高等学校工科数学课程教学指导委员会1995年再次审订的《工科数学课程教学基本要求》，为适应当前教改的需要，集体编写而成的。它可作为高等学校工科类和管理类概率论与数理统计课程的教材，也可作为工程技术人员的自学参考用书。

在编写过程中，参照了原南京工学院陶永德教授执笔的《概率论》，并在保持原书主要优点的基础上，博采众长，进行了内容的更新和提高。本书力求概念清晰，内容精炼，为便于教学，在选择例题方面做了较多的考虑，所用参考书目大多是在江苏理工大学多次试用过的同类教材。

本书第一章由朱翼隽编写，第二章由凌文兴编写，第三章由孙梅编写，第四章由王四平编写，第五章由王文初编写，全书由朱翼隽和王文初老师统稿。王金德教授和孟庆生教授审阅了全书，并提出了不少有益的意见。编者在此谨致以诚挚的谢意。

限于编者的水平，不足之处在所难免，欢迎批评指正。

目　　录

前言
第一章　随机事件与概率 …………………………………… 1
　第一节　随机事件与样本空间 …………………………… 1
　第二节　随机事件的概率 ………………………………… 9
　第三节　概率的公理化体系，加法定理 ………………… 22
　第四节　条件概率，乘法定理 …………………………… 28
　第五节　全概率公式与贝叶斯（Bayes）公式 ………… 31
　第六节　事件的相互独立性 ……………………………… 36
　第七节　重复独立试验和贝努里定理 ………………… 41
　习题一 ……………………………………………………… 44
第二章　随机变量及其分布 ……………………………… 50
　第一节　随机变量 ………………………………………… 50
　第二节　离散型随机变量的概率分布 ………………… 51
　第三节　随机变量的分布函数 …………………………… 60
　第四节　连续型随机变量的概率密度函数 …………… 65
　第五节　随机变量的函数的分布 ……………………… 74
　习题二 ……………………………………………………… 81
第三章　多维随机变量及其分布 ………………………… 86
　第一节　二维随机变量 …………………………………… 86
　第二节　边缘分布 ………………………………………… 92
　第三节　随机变量的相互独立性 ……………………… 96
　第四节　条件分布 ……………………………………… 100
　第五节　两个随机变量的函数的分布 ……………… 105
　习题三 …………………………………………………… 111

第四章　随机变量的数字特征 …………………………… 115
第一节　数学期望…………………………………………………… 115
第二节　方差………………………………………………………… 122
第三节　协方差与相关系数………………………………………… 126
第四节　矩、协方差矩阵…………………………………………… 131
习题四……………………………………………………………… 134
第五章　大数定律与中心极限定理 ………………………… 138
第一节　切比雪夫（Чебышев）不等式 ………………………… 138
第二节　大数定律…………………………………………………… 140
第三节　中心极限定理……………………………………………… 143
习题五……………………………………………………………… 147
习题一答案………………………………………………………… 150
习题二答案………………………………………………………… 152
习题三答案………………………………………………………… 155
习题四答案………………………………………………………… 158
习题五答案………………………………………………………… 159
附录……………………………………………………………… 160

第一章　随机事件与概率

概率论是研究随机现象规律性的一个数学分支，是近代数学的重要组成部分，掌握概率论的基本知识及其应用能力应是一个大学生的基本素质，本章将阐明随机事件及其概率这两个概念，并介绍事件概率的基本计算。

第一节　随机事件与样本空间

一、随机现象及其统计规律性

自然界和社会上发生的现象大体上可以归结为两类：一类是所谓的确定性现象，它在一定的条件下必然发生，例如，向上抛一石子必然下落；在一个标准大气压下，温度达到100℃时，水必沸腾；同性的电荷必相互排斥等。另一类是事先无法预言其结果的，即使在相同的条件下重复进行观察，其结果也未必相同，例如，受孕胎儿是男孩还是女孩；抛掷一枚均匀的对称的硬币，结果是正面向上还是反面向上；夏季某河流可能出现的最高水位，某电话交换台单位时间内可能接到的呼唤次数等。这类现象在观察后才能知道它的结果，事先由于它出现哪个结果的不确定性，而无法预言，称之为随机现象。随机现象既然无法预言其结果，它是不是就无规律可循呢？并非如此，人们通过长期观察或试验，发现所谓不可预言只是对一次或少数几次观察或试验而言，若在相同条件下进行大量的观察或试验时，这些随机现象就呈现出某种规律性来，因而从总体上讲也是可以预言的，例如，根据各个国家各

时期的人口统计资料,受孕胎儿中男孩和女孩的比例约各占一半,抛掷一枚质地均匀而对称的硬币相当多次以后,就会发现出现正面和反面次数的比例大约总是 1:1,这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性,称之为随机现象的统计规律性。

作为研究随机现象统计规律性的学科,概率论的理论和方法的应用是很广泛的,几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门中,例如使用概率统计方法可以进行气象预报,水文预报及地震预报,产品的抽样验收;在研制新产品时,为寻求最佳生产方案,可以进行试验设计和数据处理;在可靠性工程中,使用概率统计方法可以给出元件或系统的可靠性及平均寿命的估计;在自动控制中可以给出数学模型以便通过计算机来控制工业生产;在通讯工程中可以提高信号的抗干扰性和分辨率等。

二、随机试验与随机事件

为了叙述方便起见,我们把对一定条件下的自然现象和社会现象的观察或进行的试验,都称为试验,也就是说这里把试验的含义推广,它既指各种各样的科学试验,也把对某事物的某一特征进行的一次观察,称为进行一次试验。

1) 它可以在相同的条件下重复进行;

2) 每次试验的可能结果不止一个,而究竟出现哪个结果,试验前不能准确地预言;

3) 试验中一切可能的结果在试验前是已知的,而且每次试验中必有一个结果出现,也仅有一个结果出现。

例 1　抛掷一枚硬币,观察其出现正面或反面;

例 2　掷一粒骰子,观察它们出现的点数;

例 3　在一批灯泡里,任意取一只,测试它的寿命;

例 4　对成批铸件中的任意一个的某部位尺寸进行一次测量;

例 5　记录上午 8 点某公共汽车站有多少人在等车。

把随机试验中,可能发生但不一定发生的事情,称为随机事件,简称为事件,通常用字母 $A,B,C\cdots$ 表示,而把试验中每一个可能结果称为基本事件。基本事件是不能分解成其他事件组合的最简单的随机事件。例如,掷一颗骰子的试验中,其出现的点数,"1 点"、"2 点"、…,"6 点"都是基本事件。"奇数点"也是随机事件,但它不是基本事件,它由"1 点"、"3 点"、"5 点"这三个基本事件组成,只要这三个基本事件中的一个发生,"奇数点"这个事件就发生。

每次试验中一定发生的事情称为必然事件,记作 Ω;而必然不发生的事情,叫做不可能事件,记作 ϕ。例如在上面提到的掷骰子试验中,"点数小于 7"是必然事件,必然事件与不可能事件都属确定性现象,为了今后研究方便,把它们看作为随机事件的两个极端情况。

三、样本空间

随机试验的所有可能结果或全体基本事件的集合叫做样本空间,也记作 Ω,而把 Ω 中的每一个基本事件记作 ω 叫做样本点,这样试验中的任一随机事件都是其样本空间 Ω 中的某些样本点所组成的集合,因而,它是 Ω 的子集。于是,从集合论的角度来看,可以定义随机事件如下:

定义　设 D 为样本空间的一个子集,称"试验结果属于 D"为一个随机事件,为了简单起见,就用 D 表示这个事件。

例 6　若把例 1 中抛掷硬币的两种可能结果——正面或反面分别记为 ω_1,ω_2,则其样本空间由两个样本点组成,即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$,若将"出现正面"这一事件记为 A,则

$$A = \{\omega_1\}\text{ 是 }\Omega\text{ 的子集。}$$

例 7　若某电话交换台,单位时间内可能接到的呼唤次数是0,1,2,…,用ω_i表示接到i次呼唤的事件,则样本空间Ω由无穷多个样本点组成,即$\Omega = \{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots\}$,若把“单位时间接到呼唤不超过20次”这一事件记为B,则

$$B = \{\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{20}\}$$

是Ω的子集。

例 8　若某河流夏季的最高水位是在3m到5m之间,则样本空间为3到5内的一切实数所成的集合,即$\Omega = \{\zeta \mid 3 \leqslant \zeta \leqslant 5\}$。若把“夏季最高水位在3.5m与4m之间”这一事件记为C,则

$$C = \{\zeta \mid 3.5 \leqslant \zeta \leqslant 4\}$$

是Ω的子集。

四、事件的关系与运算

在实际问题中,同一随机试验中出现的几个事件往往不是孤立的,而是彼此之间有联系的。例如,检验圆柱形产品,要求它的长度与直径都合格时,才算合格。这时,就要考虑“产品合格”,“产品不合格”,“长度合格”,“长度不合格”,“直径合格”,“直径不合格”,“长度合格而直径不合格”等事件。显然这些事件之间是有联系的。研究在同样条件发生的几个事件以及它们之间的关系,使我们能够通过对一些较简单事件的了解,去研究与之有关的较复杂的事件。

下面讨论事件之间的几个主要关系以及作用在事件上的运算。

(1) 事件的包含与相等　如果事件A出现必然导至事件B出现,则称事件B包含事件A或称A是B的子事件,记为

$$A \subset B(\text{或 } B \supset A)$$

例如,“直径不合格”必然导至“产品不合格”,所以“直径不合格”是“产品不合格”的子事件,为了方便起见,规定对于任一事件 A,$\phi \subset A$,而 $A \subset \Omega$。

如果事件 A 包含事件B,同时事件 B 也包含事件A,即 $B \subset A$ 和$A \subset B$ 同时成立,则称事件 A 与B 相等,记为 $A = B$。

例如,检验圆柱形产品时,事件 A_1——“直径和长度都合格”出现,必然导至事件 A_2——“产品合格”出现,即 $A_1 \subset A_2$,反之亦有 $A_2 \subset A_1$,故“产品合格”与“直径和长度都合格”两事件相等,即 $A_1 = A_2$。

(2) 事件的和　“两事件 A 与B 中至少有一个出现”的事件,称为事件 A 与B 的和事件、记作 $A \cup B$。例如:“产品不合格”便是“直径不合格”与“长度不合格”两事件的和事件。类似地,将“事件 A_1、A_2、…、A_n 中至少有一个出现”的事件,称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件,记作

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \text{ 或 } \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

例如:“一分钟内接到不多于 15 次呼唤”这一事件便是“一分钟内接到 1 次呼唤”,“一分钟内接到 2 次呼唤”,…“一分钟内接到 15 次呼唤”及“一分钟内没有接到呼唤”等事件的和事件,“可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 中至少有一个出现”的事件,称为事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件,记为

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \text{ 或 } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

(3) 事件的积　“两事件 A 与B 同时发生”的事件,称为事件 A 与B 的积事件记作$A \cap B$ 或记为AB,例如,“产品合格”便是“直径合格”和“长度合格”两事件的积事件。类似地“事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时出现”的事件,称为事件 A_1,$A_2 \cdots A_n$ 的积事件,记作

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \text{ 或 } \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

“可列个事件 $A_1, A_2\cdots$ 同时出现”的事件，称为事件 $A_1, A_2\cdots$ 的积事件，记为

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \text{ 或 } \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

(4) 事件的互斥与互逆　如果事件 A 与 B 不能同时出现，即 $A \cap B = \phi$，则称事件 A 与 B 互斥或互不相容。通常将这样的两事件的和，记作 $A + B$。如果 n 个事件 $A_1, A_2\cdots A_n$ 两两互斥，即 $A_i \cap A_j = \phi, (i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n)$，则将 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 记作 $\sum_{i=1}^{n} A_i$。如果可列 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots$，两两互斥，则将 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ 记作 $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$。

如果两事件 A 与 B 中必有一个出现，而又不能同时出现，即 $A \cup B = \Omega, A \cap B = \phi$ 同时成立，则称 A 是 B 的逆事件，或 B 是 A 的逆事件，也称事件 A 与 B 互逆或相互对立。记事件 A 的逆事件为 $\bar{A}$，则有 $B = \bar{A}, A = \bar{B}$。例如，“产品合格”与“产品不合格”是互逆的事件，“一分钟内接到电话”与“一分钟内没有接到电话”也是互逆的事件。显然，对任一事件 A 有

$$A\bar{A} = \phi;\quad A + \bar{A} = \Omega; \bar{\bar{A}} = A,$$

人们注意到，随机试验的所有基本事件都是两两互斥的，因为每次试验只能出现一个结果，任何两个不同结果都不能同时出现，但基本事件彼此未必互为逆事件，例如，在掷骰子的试验中，“掷出 3 点”与“掷出 4 点”是互斥事件，但不是互逆事件，因为不掷出 3 点还可能掷出 2 点，5 点，1 点，6 点来，因此，互斥未必互逆，但互逆必定互斥。若事件 $A_1, \cdots A_n$ 两两互

斥，且 $A_1 + \cdots + A_n = \Omega$，则称 $A_1, \cdots, A_n$ 构成一个简单完备事件组。

（5）事件的差与对称差　“事件 A 出现而 B 不出现”的事件，称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A \setminus B$ 或 $A - B$。例如，“直径合格而长度不合格”是“直径合格”与“长度合格”两事件的差事件。显然，$A \setminus B = A\bar{B}$，$\bar{A} = \Omega \setminus A$。

“事件 A 与 B 中恰出现一个”的事件，称为事件 A 与事件 B 的对称差，记为 $A\Delta B$，显然，$A\Delta B = (A \setminus B) + (B \setminus A) = A\bar{B} + B\bar{A}$。

用文氏图可直观地表示以上事件之间的关系与运算，如图 1-1 所示。

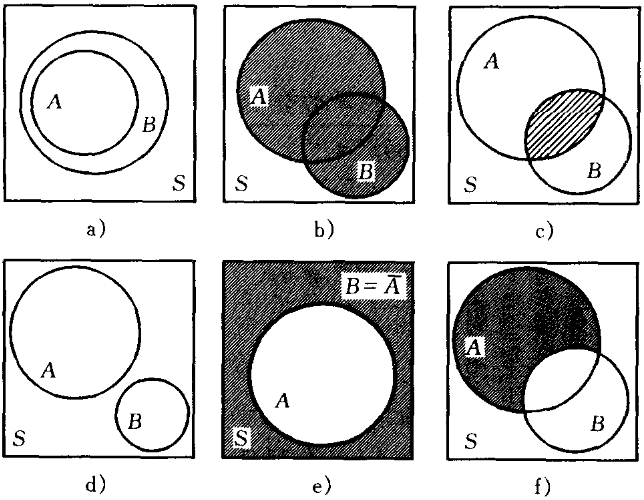


图 1-1　文氏图

a) $A \subset B$　b) $A \cup B$　c) $A \cap B$，$A\Delta B$

d) $A \cap B = \phi$　e) $B = \bar{A}$　f) $= A - B$

例 9　设 A,B,C 是三个事件，试用 A,B,C 的运算关系，表示下列事件。

1) A 出现而 B 与 C 都不出现；

2) A 与 B 都出现而 C 不出现；

3) A、B、C 中恰有一个出现；

4) A、B、C 中不多于一个出现。

解　可以借助于文氏图来直观地给出

1) $A\overline{B}\overline{C}$ 或 $A \setminus B \setminus C$；

2) $AB\overline{C}$，或 $A \cap B \setminus C$；

3) $A\Delta B\Delta C$，或 $A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$；

4) $\overline{B}\overline{C} \cup \overline{C}\overline{A} \cup \overline{A}\overline{B}$，或 $A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

5) $A \cup B \cup C$，或 $A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + AB\overline{C} + AB\overline{C} + A\overline{B}C + ABC$，或 $\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}}$。

表 1-1　概率论与集合论中相应概念对照表

记　　号	概　率　论	集　合　论
Ω	样本空间、必然事件	空间(全集)
ϕ	不可能事件	空　　集
ω	基本事件，样本点	元　　素
A	事件	Ω 的子集
$\omega \in A$	事件 A 出现	ω 是集 A 的元素
$A \subset B$	A 是 B 的子事件	A 是 B 的子集
$A = B$	事件 A 与 B 相等	集合 A 与 B 相等
$A \cup B$	事件 A 与 B 的和事件	集合 A 与 B 的并集
$A \cap B$	事件 A 与 B 的积事件	集合 A 与 B 的交集
$AB = \phi$	事件 A 与 B 互斥	集合 A 与 B 不相交
$\overline{A}$	事件 A 的逆事件	集合 A 的余集
$A \setminus B$	事件 A 与事件 B 的差事件	集合 A 与 B 的差集
$A\Delta B$	事件 A 与事件 B 的对称差	集合 A 与 B 的对称差集

例10　如图1-2所示的电路中，以 A 表示"信号灯亮"这一事件，以 B,C,D 分别表示事件：继电器接点 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ 闭合，那末容易知道 $BC \subset A, BD \subset A, BC \cup BD = A$，而 $\bar{B}A = \phi$，即事件 $\bar{B}$ 与事件 A 互斥。

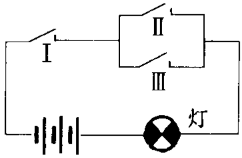


图 1-2　信号灯电路图

为了进一步搞清事件间的关系及运算，可以将它与集合论的相应概念进行比较对照，如表 1-1 所示。

五、事件运算的简单性质

这样，把事件看成样本空间 Ω 的子集后，集合运算的简单性质都可搬到事件的运算中来。上面例 9,5）实际上已给出 3 事件运算的对偶原理：$A \cup B \cup C = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$。

在进行事件运算时，经常要用到下述定律，设 A、B、C 为事件则有

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;

(2) 结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

(3) 分配律　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(4) 对偶律　$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$。

及 $\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i}$; $\overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}$。

第二节　随机事件的概率

随机事件在一次试验中可能出现也可能不出现，表现了它具有随机性的一面；但是在大量重复试验中，人们还是发现它具有一定的规律性，不同的事件，有的出现的可能性大，有

的出现的可能性小。人们希望找到一个合适的数来表示事件在一次试验中出现的可能性大小。用以度量随机事件出现的可能性大小的数字，称为事件的概率。

一、概率的统计定义

先引入频率的概念，它描述了事件出现的频繁程度。

频率定义　若事件 A 在相同条件下进行的 n 次试验出现了 r 次，则称

$$W_n(A)=\frac{r}{n} \tag{1-1}$$

为事件 A 在 n 次试验中出现的频率，称 r 为事件 A 在 n 次试验中出现的频数。

表 1-2　"抛硬币"试验的频数和频率

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	r_A	$W_n(A)$	r_A	$W_n(A)$	r_A	$W_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

例 1　考虑"抛硬币"这个试验，A 为"正面向上"的事件。将一枚硬币抛掷 5 次，50 次、500 项，各做 10 遍，得到数据

如表 1-2 所示,这种试验前人也曾做过,得到如表 1-3 所示数据。从上述数据可以看出:① 频率有随机波动性,即对于同样的试验次数,所得频率不尽相同;② 试验次数较小时频率随机波动的幅度较大,但随着试验次数的增大,频率 $W_n(A)$ 呈出某种稳定性,它总是在 0.5 附近摆动、且逐渐稳定于 0.5。

表 1-3　德·摩根等频数试验表

实验者	n	r_A	$W_n(A)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

例 2　考察英语中特定字母出现的频率。当观察字母的个数较少时,频率有较大幅度的随机波动,但当观察数目增大时,频率即呈现出稳定性,有人统计了约 438023 个字母得到了如表 1-4 所示的数据。

表 1-4　特定英语字母的出现频率

字母	频率	字母	频率	字母	频率
E	0.1268	L	0.0394	P	0.0186
T	0.0978	D	0.0389	B	0.0156
A	0.0788	U	0.0280	V	0.0102
O	0.0776	C	0.0268	K	0.0060
I	0.0707	F	0.0256	X	0.0016
N	0.0706	M	0.0244	J	0.0010
S	0.0634	W	0.0214	Q	0.0009
R	0.0594	Y	0.0202	Z	0.0006
H	0.0573	G	0.0187		